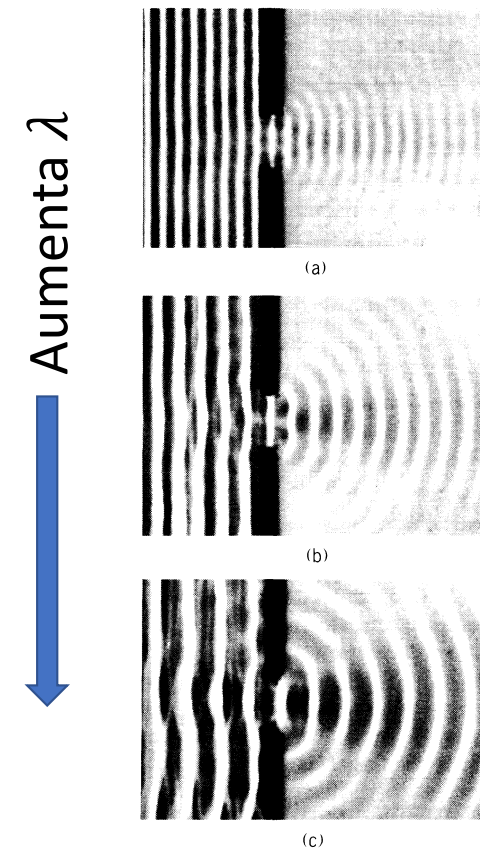


Difracción

Experimento en tanques con líquidos

- Supongamos ondas planas en la superficie de un líquido.
- Estas ondas llegan a una abertura.
- Se estudia el patrón de las ondas del otro lado de la abertura para distintos valores de longitud de onda.

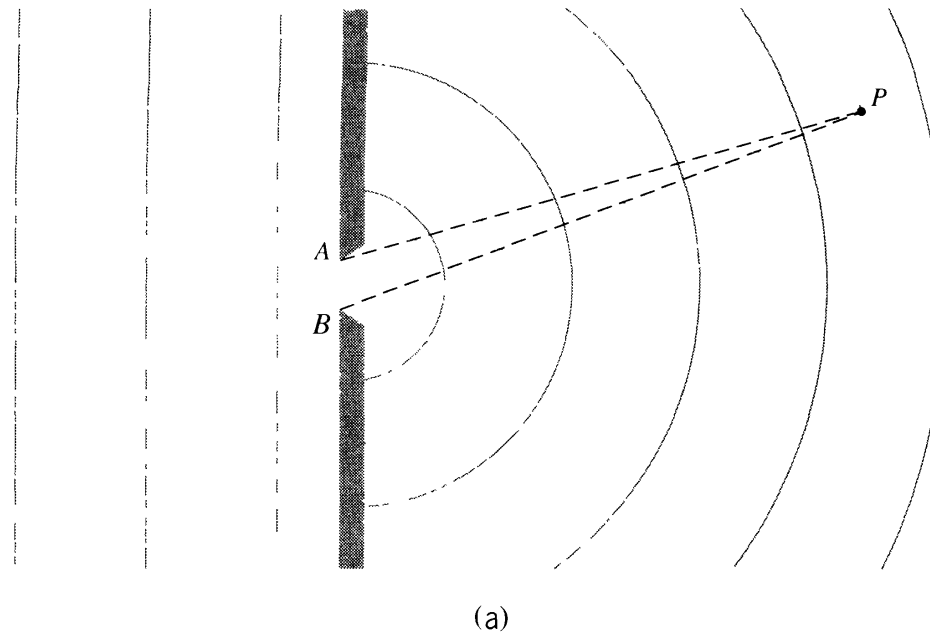


El tamaño de una abertura

- Para un punto P la maxima diferencia de camino entre dos fuentes no bloqueadas es

$$\Lambda_{\max} = |\overline{AP} - \overline{BP}|$$

- Pero $\Lambda_{\max} \leq \overline{AB}$ (solo igual sobre la pantalla que tiene la abertura)

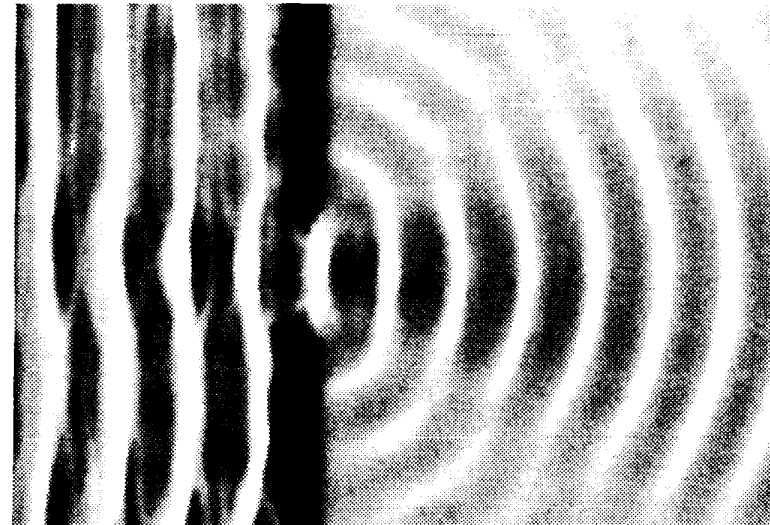


El tamaño de una abertura

- Para $\lambda > \overline{AB}$ entonces:

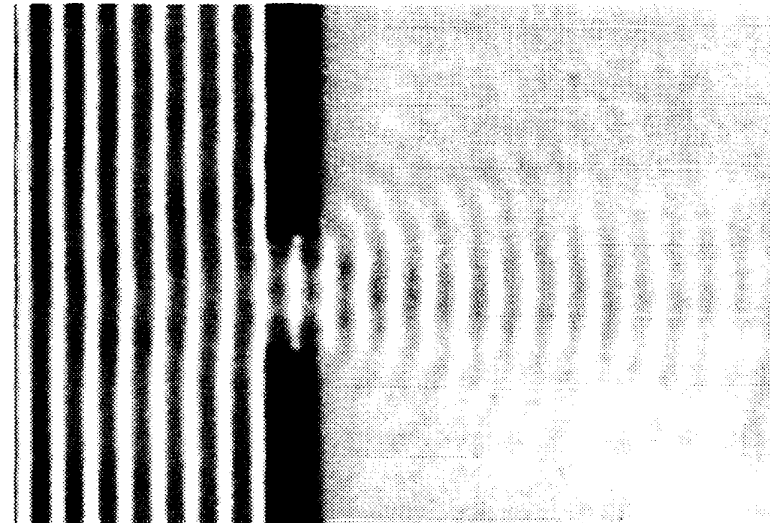
$$\lambda > \Lambda_{max}$$

- Entonces las ondas interfieren constructivamente en casi todo el espacio delante de la abertura.
- Las ondas van a esparcirse a grandes ángulos dentro de la región más allá de la obstrucción.
- Cuanto mas chica la apertura, más circular va a ser el frente de onda



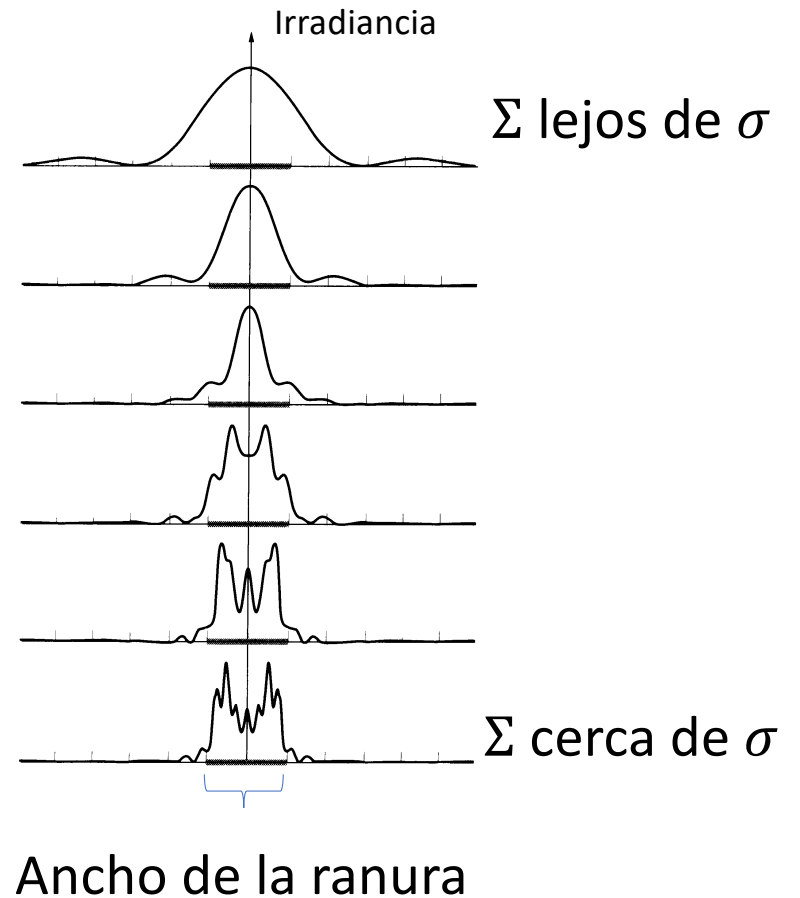
El tamaño de una abertura

- Para $\lambda < \overline{AB}$ entonces la región donde $\lambda > \Lambda_{max}$ es muy pequeña y se extiende justo enfrente de la abertura.
- Enfrente de la abertura las ondas interfieren constructivamente
- A ambos lados de la zona de interferencia constructiva, la interferencia se vuelve destructiva y empieza a formarse la sombra.



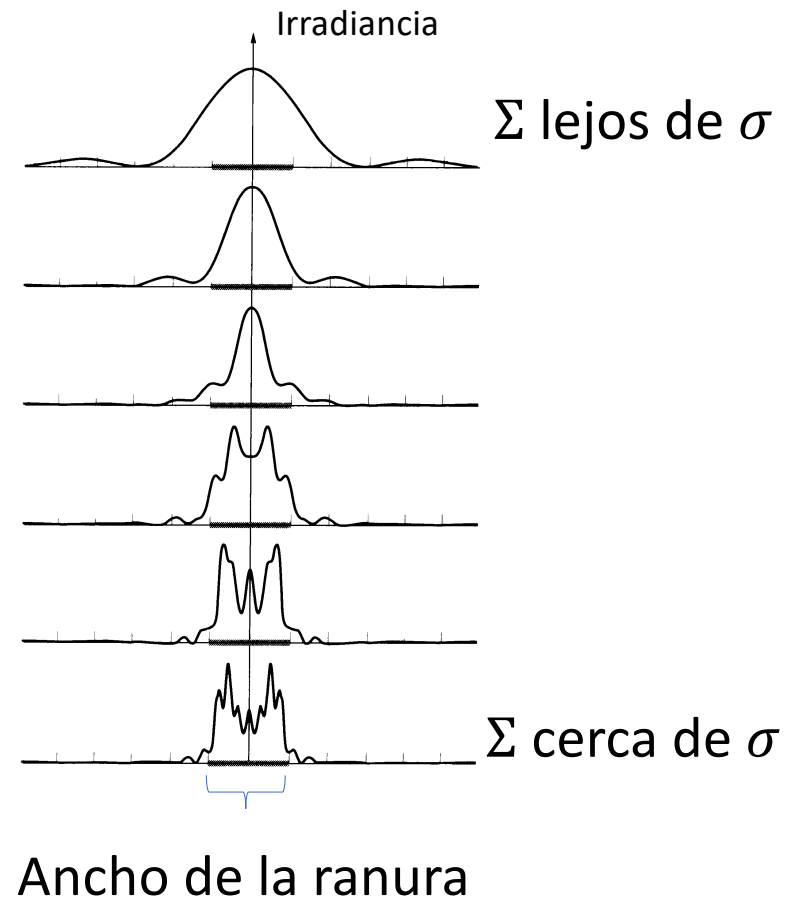
Difracción de Fresnel y Fraunhofer

- Experimento: Supongamos ondas planas provenientes de fuente puntual lejana.
- Supongamos que colocamos una pantalla con una ranura σ y detrás de ella una pantalla Σ .
- Veremos que la imagen va variando a medida que llevamos Σ desde una posición cercana a σ a una muy distante.



Difracción de Fresnel y Fraunhofer

- En el caso de abajo, las ondas provenientes de la abertura pueden ser consideradas esféricas.
- Estas interfieren para producir la difracción de campo cercano o de Fresnel
- A grandes distancias de la ranura, el patrón es el producido por ondas planas.
- Esta es la difracción de campo lejano o de **Fraunhofer**.

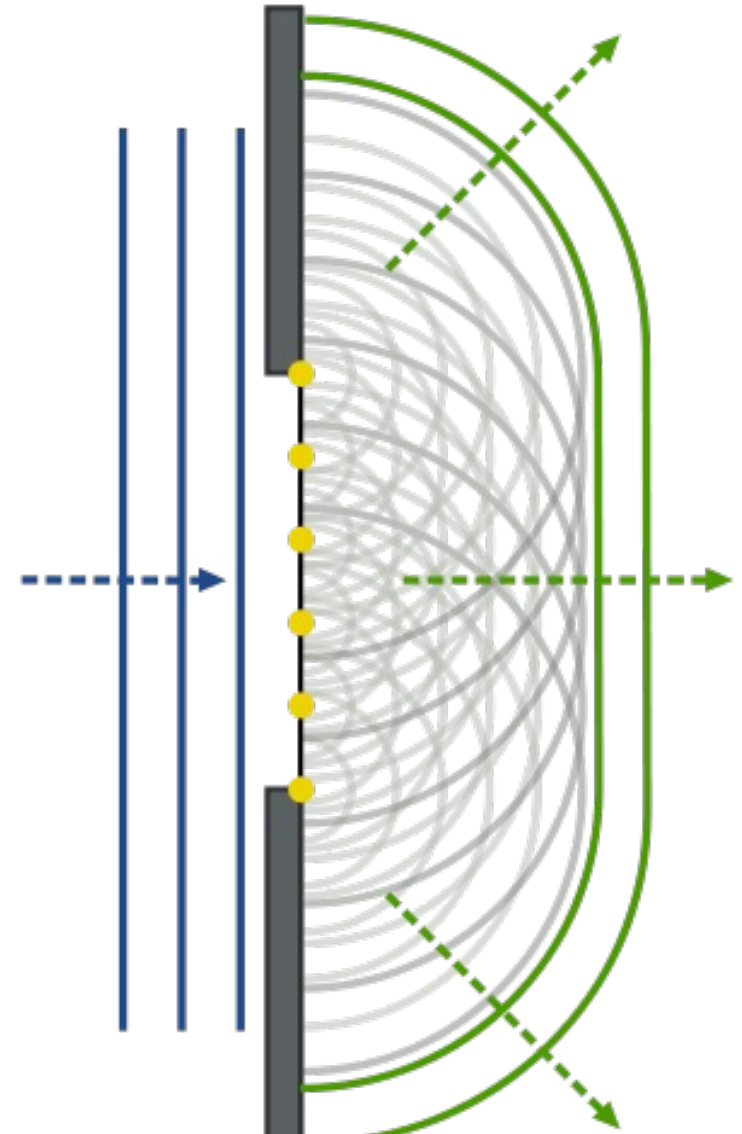


Irradiancia de N fuentes coherentes

Puede seguirse del libro *Optica de Hecht & Zajac*

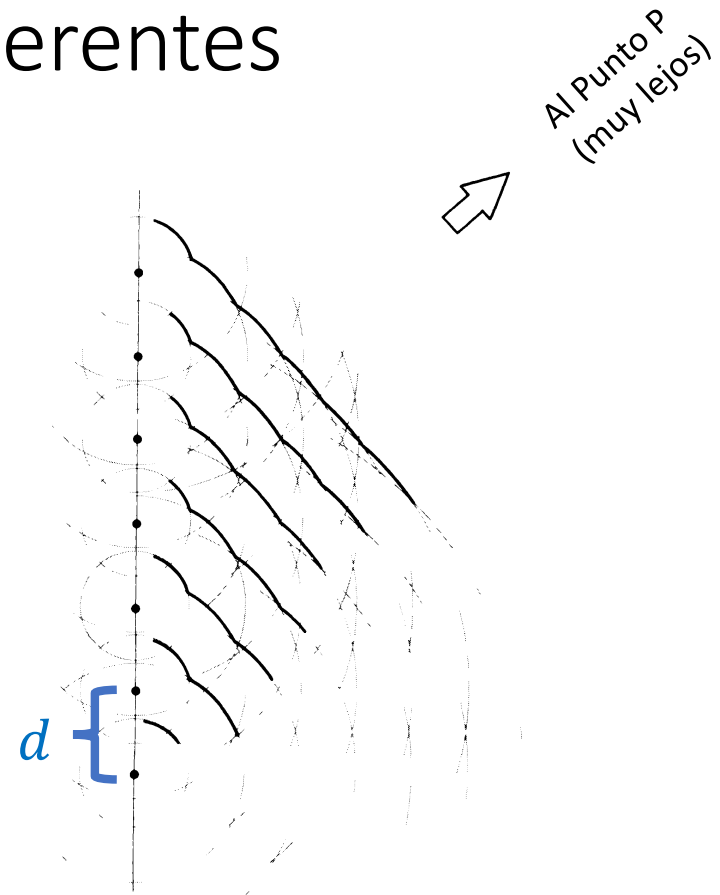
Principio de Huygens-Fresnel

- Todo punto no obstruido de un frente de onda, a un instante dado, puede ser visto como una fuente de ondas secundarias esféricas.
- Estas ondas secundarias tienen la misma frecuencia que la onda primaria.
- La amplitud del campo óptico en cualquier punto más allá de la obstrucción es la superposición de los campos de todas estas ondas considerando sus amplitudes y fases relativas.



Colección de N fuentes coherentes

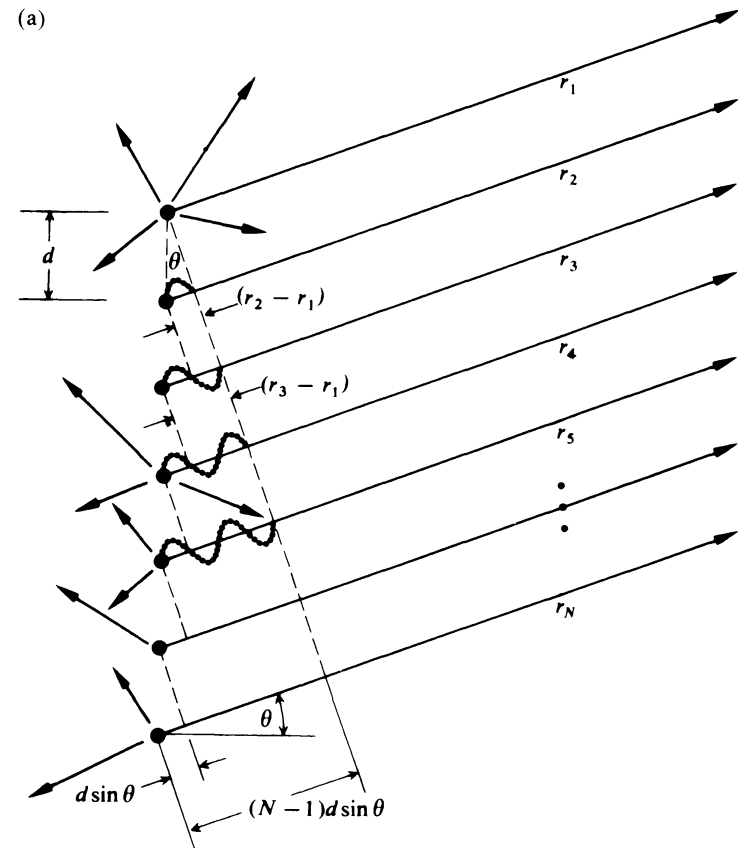
- Supongamos ahora que las ondas provenientes de una abertura en forma de ranura pueden pensarse como provenientes de una serie de N osciladores en fase dispuestos a lo largo de una línea separados por una distancia d .
- Supongamos que estudiamos la suma de los campos de cada fuente superpuestos en un punto P muy lejos



Colección de N fuentes coherentes

- Si la extensión espacial de la serie de fuentes $(N - 1)d$ es pequeña en comparación a la distancia a P , podemos suponer que la amplitud de los campos de cada una de ellas es la misma ya que habrán viajado prácticamente la misma distancia

$$E_0(r_1) = E_0(r_2) = \dots = E_0(r_N) = E_0(r)$$



Ondas en complejos

- De la misma manera que en circuitos de corriente alterna, podemos también expresar el campo eléctrico como la parte real de un número complejo

$$E_0(r) \cos(kr - \omega t) = \operatorname{Re}\{E_0(r)e^{i(kr - \omega t)}\} = \operatorname{Re}\{E_0(r)e^{ikr} e^{-i\omega t}\}$$

Colección de N fuentes coherentes

- La suma de los campos de cada una de las N fuentes en el punto P entonces da como resultado

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{i(kr_1 - \omega t)} + E_0(r)e^{i(kr_2 - \omega t)} + \dots + E_0(r)e^{i(kr_N - \omega t)}$$

- Sacamos factor común el campo de la fuente 1 y la expresión queda en función de la diferencia de camino entre la fuente 1 y las otras:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} \\ &\times [1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \dots + e^{ik(r_N - r_1)}] \end{aligned}$$

Colección de N fuentes coherentes

- Como vimos en Young, la diferencia de fase entre dos fuentes separadas una distancia d para distancias grandes es:

$$\delta = kd \sin \theta$$

- De ahí que:

$$\delta = k(r_2 - r_1), 2\delta = k(r_3 - r_1), \text{ y así sucesivamente}$$

- Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E_0(r) e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \\ &\times [1 + (e^{i\delta}) + (e^{i\delta})^2 + (e^{i\delta})^3 + \dots + (e^{i\delta})^{N-1}] \end{aligned}$$

Colección de N fuentes coherentes

- Esta suma converge al siguiente valor:

$$(e^{i\delta N} - 1) / (e^{i\delta} - 1)$$

- Sacando factor común $e^{iN\delta/2}$ en el numerador y $e^{i\delta/2}$ en el denominador llegamos a la expresión equivalente:

$$\frac{e^{iN\delta/2} [e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2}]}{e^{i\delta/2} [e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}]}$$

conjugados

conjugados

Colección de N fuentes coherentes

- Recordando para complejos que:

$$Z - Z^* = 2i \operatorname{Im}(Z)$$

- Entonces la expresión anterior equivale a:

$$e^{i(N-1)\delta/2} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right)$$

Colección de N fuentes coherentes

- Entonces el campo total en P queda:

$$\tilde{E} = E_0(r) e^{-i\omega t} e^{i[kr_1 + (N-1)\delta/2]} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right)$$

- Si R es la distancia desde el centro del arreglo de fuentes hasta P , este centro va a estar a una distancia $(N - 1)d/2$ de la primera, es decir:

$$R = \frac{1}{2}(N - 1)d \sin \theta + r_1$$

- Entonces podemos reescribir el campo en función de R como

$$\tilde{E} = E_0(r) e^{i(kR - \omega t)} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right)$$

Colección de N fuentes coherentes

- Una vez obtenido el campo eléctrico, calculemos la irradiancia I .

- Como es proporcional a $\frac{|\vec{E}|^2}{2}$ esto en complejos equivale a plantear:

$$\frac{|\vec{E}|^2}{2} = \frac{\tilde{E}\tilde{E}^*}{2}$$

*quiere decir conjugado

- Entonces llegamos a:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad \text{Donde } I_0 \text{ es el flujo de una fuente}$$

Colección de N fuentes coherentes

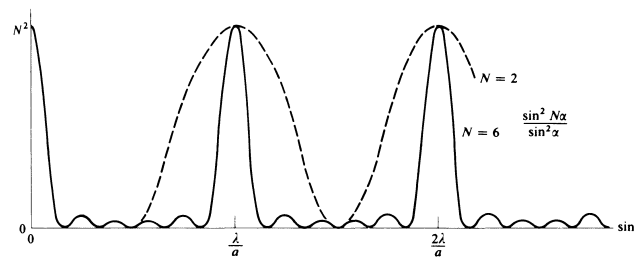
- Reemplazando δ :

$$I = I_0 \frac{\sin^2 [N(kd/2) \sin \theta]}{\sin^2 [(kd/2) \sin \theta]}$$

Fluctuaciones rápidas
(aparece N)

Fluctuaciones lentas

- La combinación da lugar a una serie de picos principales separados por una serie de máximos secundarios, en función de θ



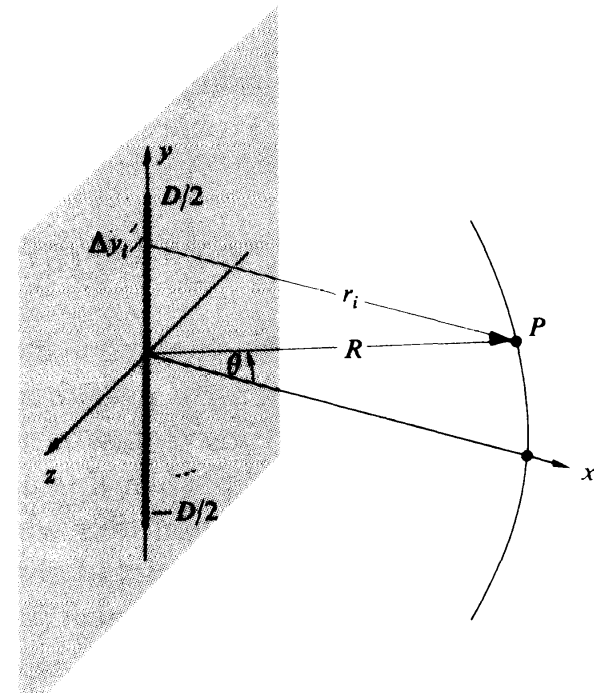
Segmento contínuo de fuentes
coherentes

Línea continua de fuentes coherentes

- Supongamos ahora un continuo de fuentes en un segmento de largo D .
- Cada punto emite una onda esférica:

$$E = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r} \right) \sin (\omega t - kr)$$

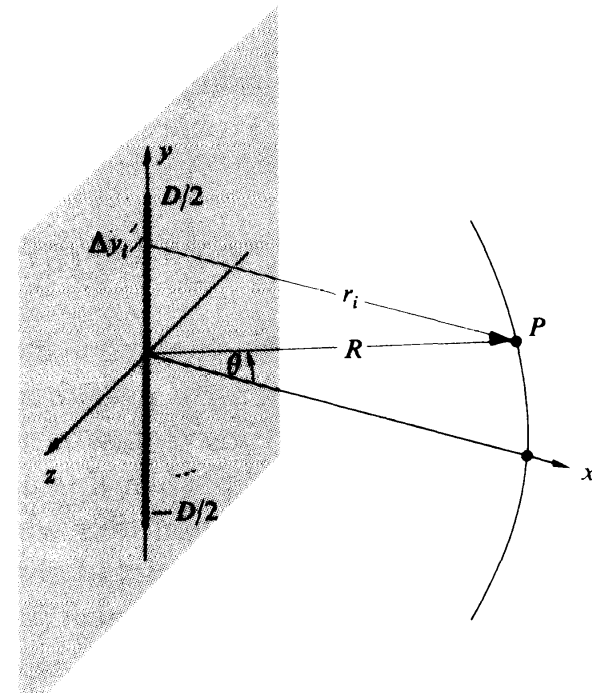
- Supongamos que la densidad de fuentes por unidad de distancia es $\frac{N}{D}$ con N grande.



Línea continua de fuentes coherentes

- Dividamos el segmento en M tramos de largo Δy en fase
- Cada segmento de largo Δy tendrá $\frac{N}{D} \Delta y$ fuentes
- La contribución del i -ésimo segmento Δy al campo eléctrico en el punto P es:

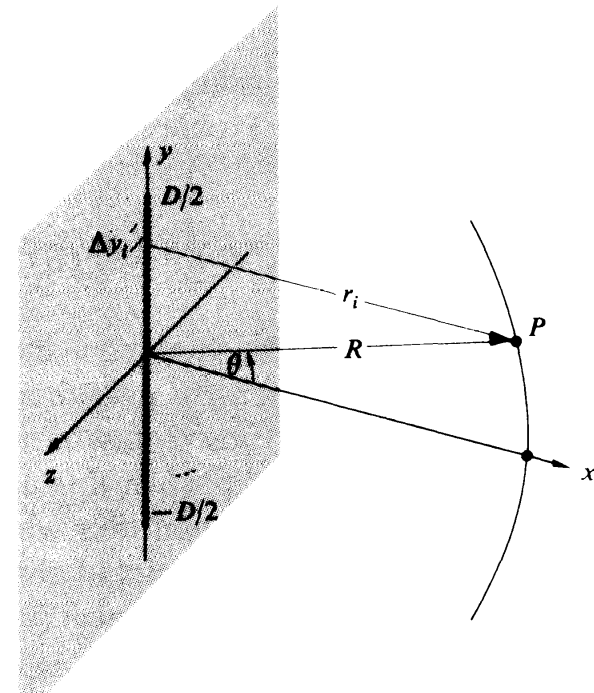
$$E_i = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r_i} \right) \sin(\omega t - kr_i) \left(\frac{N \Delta y_i}{D} \right)$$



Línea continua de fuentes coherentes

- Ahora para pasar una distribución continua de fuentes tenemos que tender N a infinito y achicar ε_0 (la amplitud del campo eléctrico de cada fuente) de manera de tener un campo finito en P .
- Definimos la intensidad de la

$$\mathcal{E}_L \equiv \frac{1}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} (\varepsilon_0 N)$$



Línea continua de fuentes coherentes

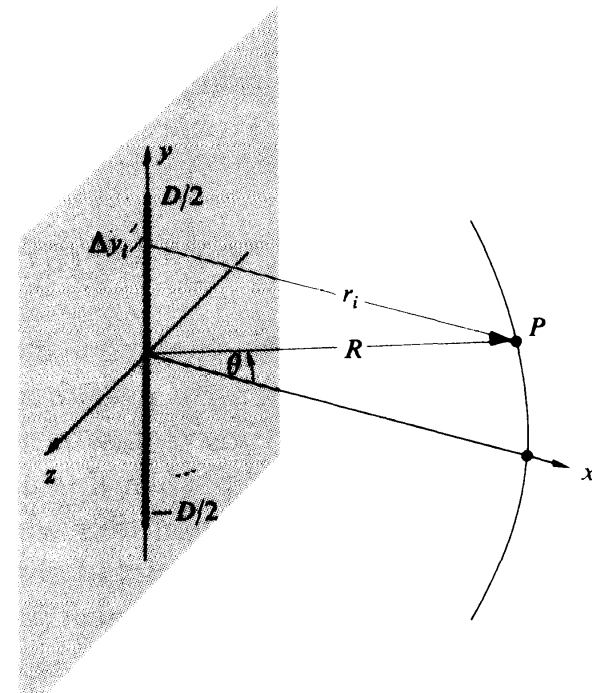
- Entonces, la suma de las contribuciones de los M segmentos de largo Δy_i queda:

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{\mathcal{E}_L}{r_i} \sin(\omega t - kr_i) \Delta y_i$$

- En el límite $\lim_{\Delta y \rightarrow 0}$ tenemos el campo en P integrando a lo largo del ancho D .

$$E = \mathcal{E}_L \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} dy$$

Con $r = r(y)$

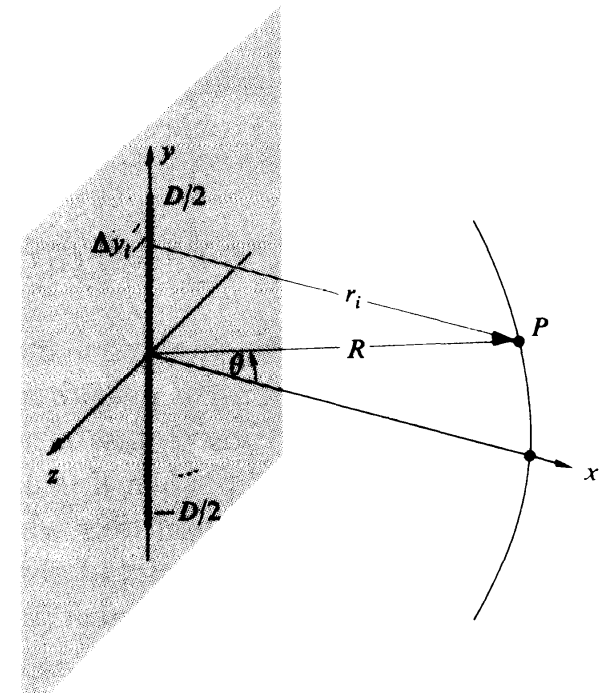


Aproximación de Fraunhofer

- Tomemos ahora el resultado anterior pero imaginemos que la distancia al punto de observación es muchísimo mayor al del largo de la línea:

$$R \gg D$$

- Esto hace que la distancia de cada dy hasta P (r) no varíe mucho con y .
- Es más, r no va a diferir de la distancia a P medida desde el centro de la línea, R .

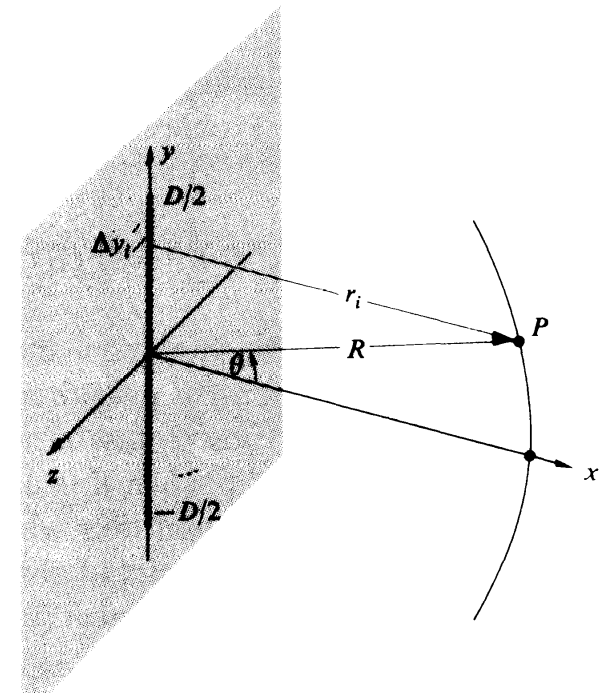


Aproximación de Fraunhofer

- Entonces, la amplitud de la contribución del campo de cada dy también será la misma:

$$dE = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \sin(\omega t - kr) dy$$

- Ahora, para aproximar r dentro de la fase hay que tener más cuidado.



Aproximación de Fraunhofer

- Haciendo el mismo planteo que para Young, tenemos que

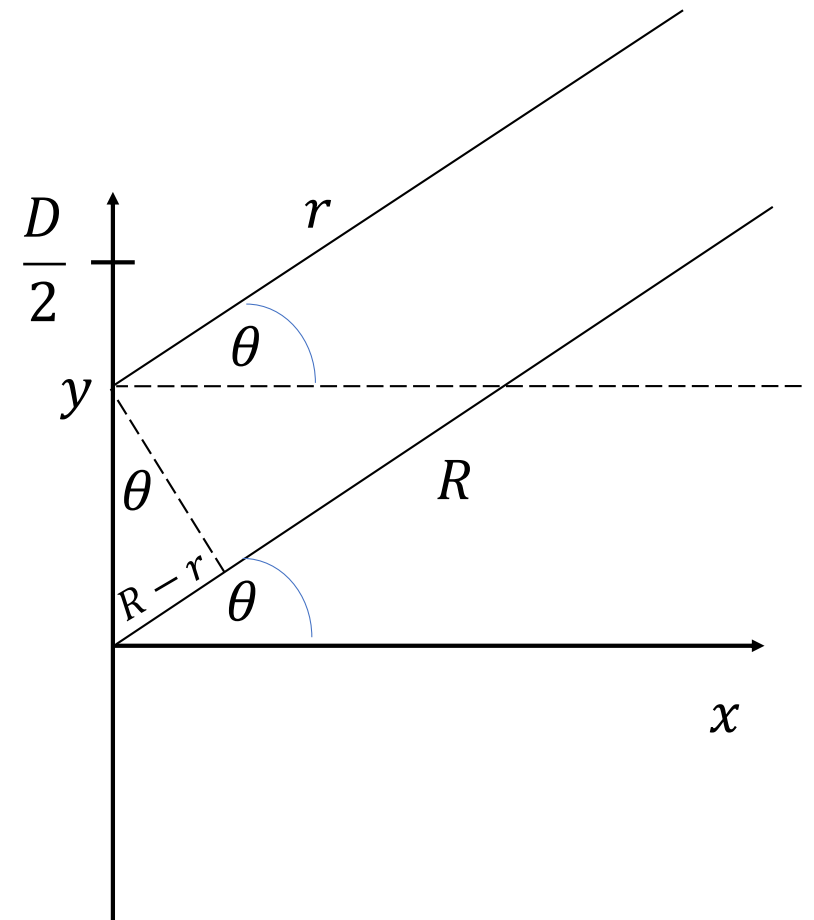
$$R - r \cong y \sin \theta$$

- Lo cual implica

$$r \cong R - y \sin \theta$$

- Entonces, en la aproximación de Fraunhofer:

$$E = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \int_{-D/2}^{+D/2} \sin [\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy$$

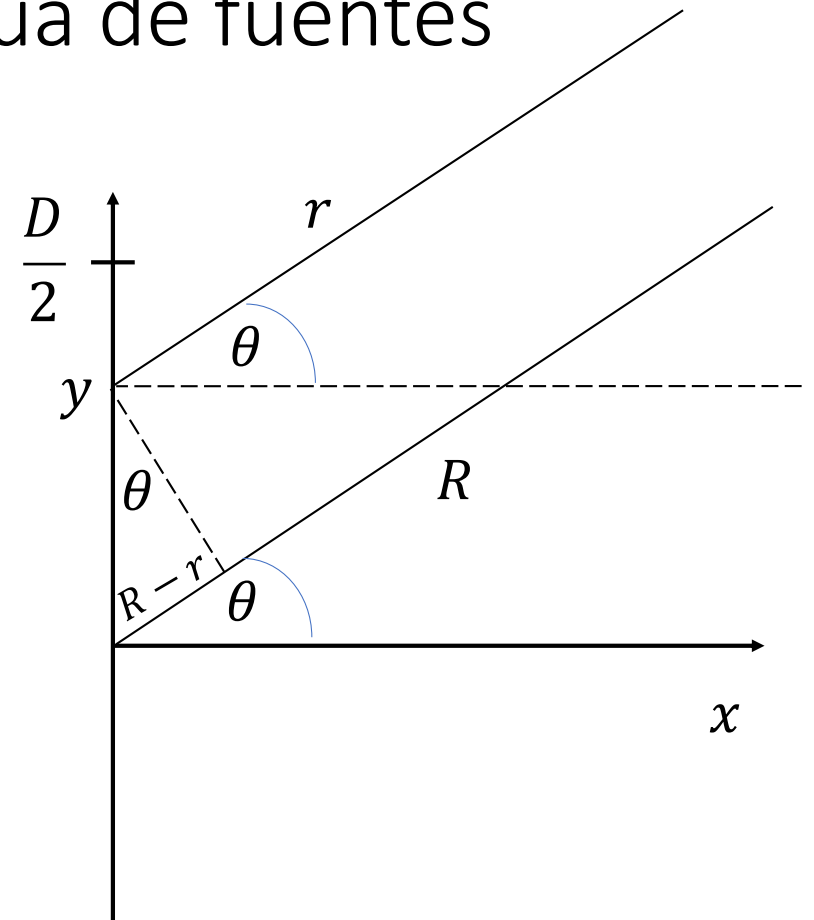


Fraunhofer para línea continua de fuentes

- La integral anterior se resuelve fácilmente haciendo

$$\begin{aligned} \sin(\omega t - kR + ky \sin \theta) &= \sin(\omega t - kR) \cos(ky \sin \theta) \\ &+ \cos(\omega t - kR) \sin(ky \sin \theta) \end{aligned}$$

- La integral respecto a y entre $\pm \frac{D}{2}$ del segundo término del segundo miembro es cero.



Fraunhofer para línea continua de fuentes

- Resultando

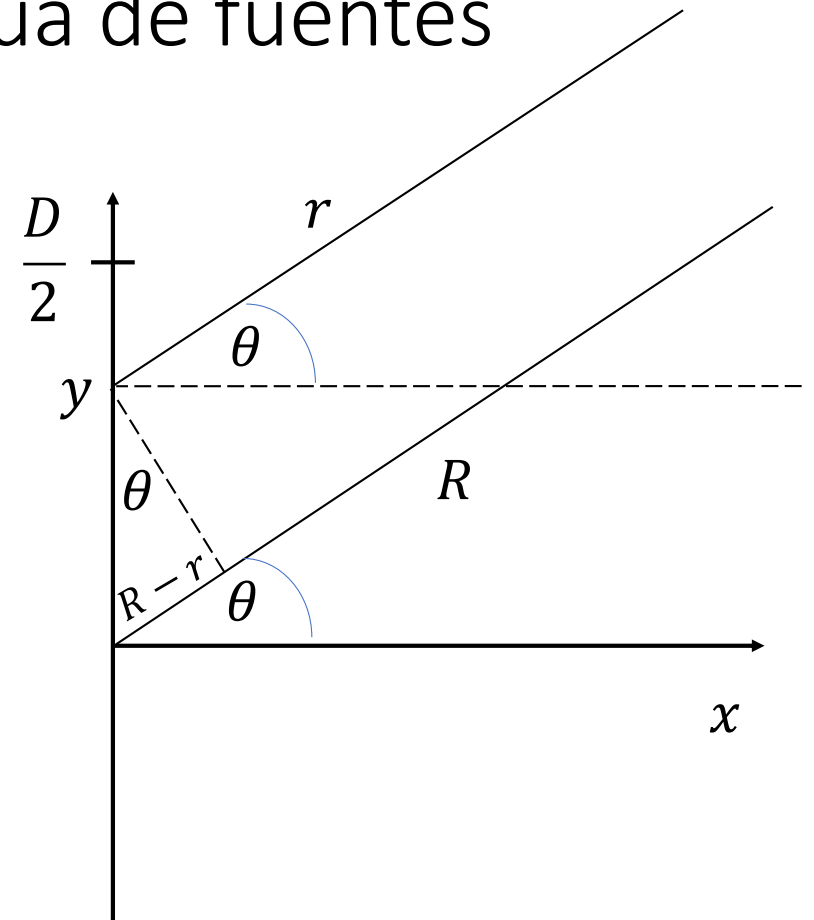
$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \frac{\sin[(kD/2) \sin \theta]}{(kD/2) \sin \theta} \sin(\omega t - kR)$$

- Si hacemos

$$\beta \equiv (kD/2) \sin \theta$$

- Tenemos

$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR)$$



Fraunhofer para línea continua de fuentes

- La irradiancia entonces, es proporcional al promedio temporal del cuadrado del campo eléctrico

$$I(\theta) = \langle |E|^2 \rangle$$

- Como $\langle |\sin(\omega t - kR)|^2 \rangle = 1/2$ obtenemos:

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

Fraunhofer para línea continua de fuentes

- Analicemos esta curva en función de la variable $\sin \theta$
- Tenemos un máximo en $\beta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$

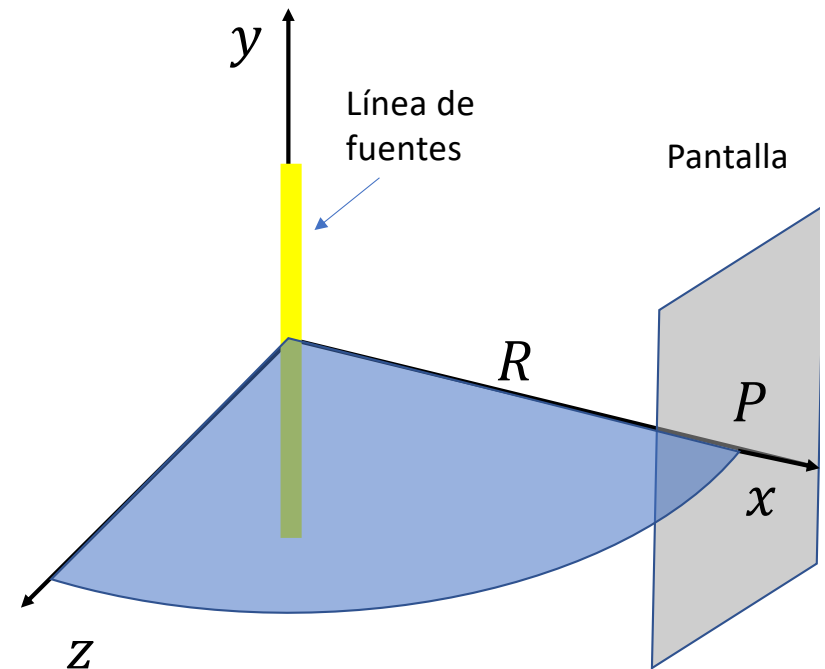
$$I(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_L D}{R} \right)^2$$

- Tendremos mínimos $I(\theta_{min}) = 0$ en $\beta = \pm n\pi$ para $n = 1, 2, 3, 4 \dots$
- Esto implica

$$\sin \theta_{min} = \pm \frac{2n\pi}{kD} = \pm \frac{n\lambda}{D}$$

Fraunhofer para línea continua de fuentes

- Notemos que cuando $D \gg \lambda$ entonces la irradiancia decae muy rápido con θ por culpa de β en el denominador
- Esto se ve para valores de $D \approx 1\text{cm}$ para luz visible
- En cuanto a la fase, es como si toda la línea fuera una fuente puntual situada en el centro de la línea a una distancia R de P
- Es como si irradiara una onda circular en el plano $\theta = 0$ (perpendicular a la línea)



Para $D \gg \lambda$ la emisión se da en el plano xz

Fraunhofer para línea continua de fuentes

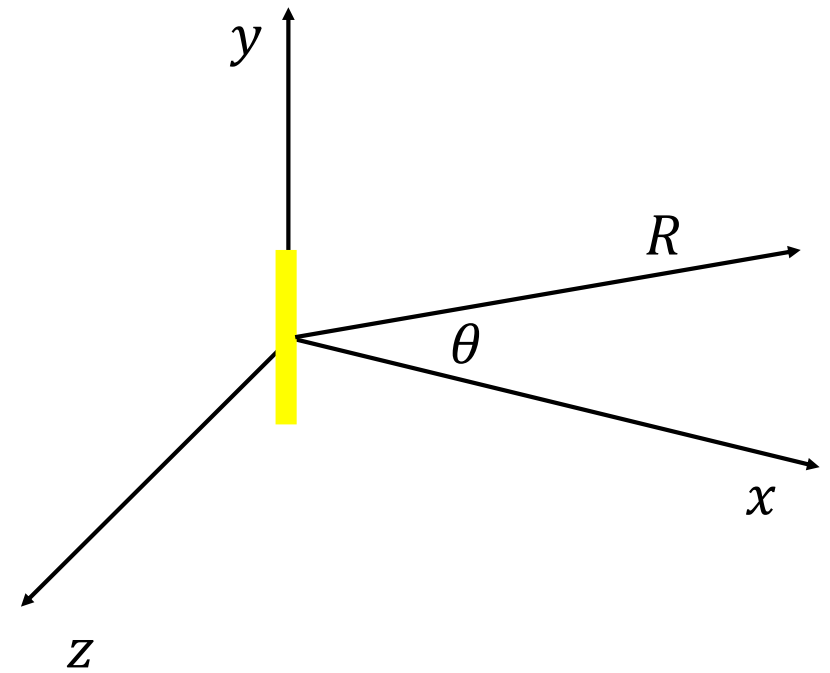
- Si, por el contrario $\lambda \gg D$ entonces β es pequeño y luego:

$$\beta \cong \sin \beta$$

- Entonces:

$$I(\theta) = I(0)$$

- Entonces la irradiancia es constante para todo θ y entonces la línea parece una fuente puntual en el centro emitiendo ondas esféricas

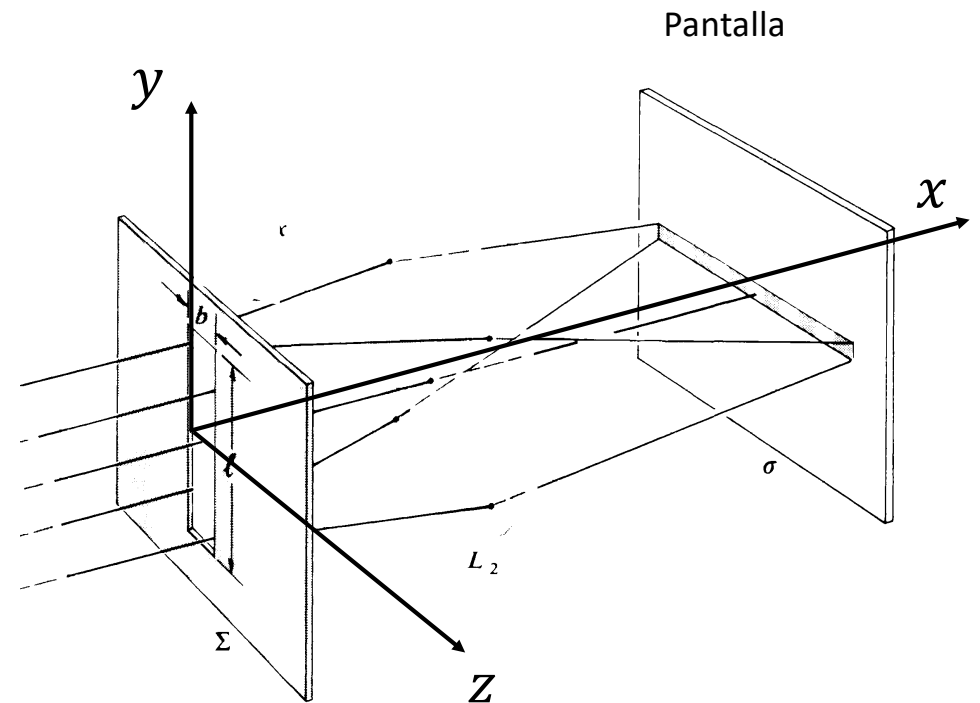


Para $\lambda \gg D$ la irradiancia es la misma para todo θ

Difracción de Fraunhofer de una rendija

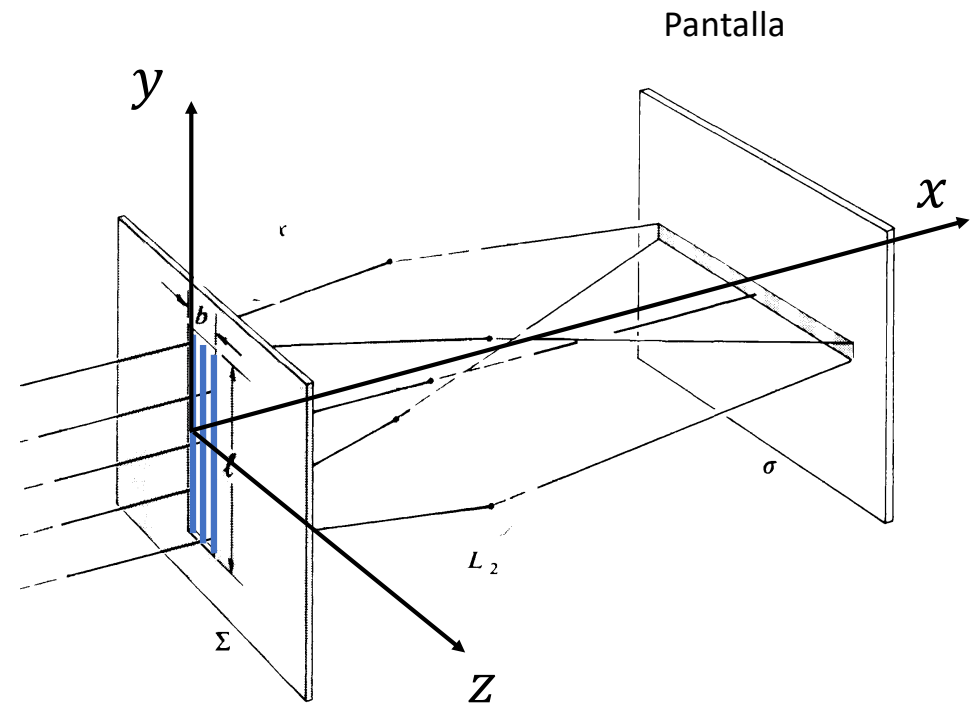
Rendija Única

- Consideremos ahora la difracción de Fraunhofer de ondas planas a través de una abertura rectangular tal que:
- La abertura tiene un largo l de varios cm ($l \gg \lambda$).
- El ancho de la abertura b es de algunos cientos de λ ($b > \lambda$).



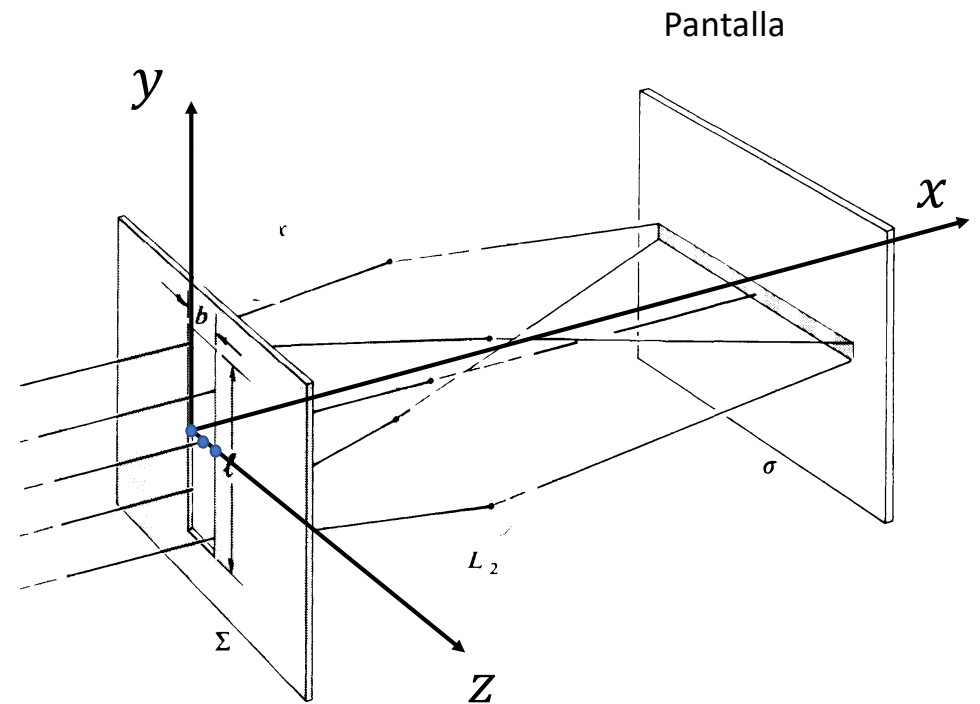
Rendija Única

- Lo que se hace normalmente es dividir la ranura en segmentos verticales de fuentes coherentes como las que vimos anteriormente.



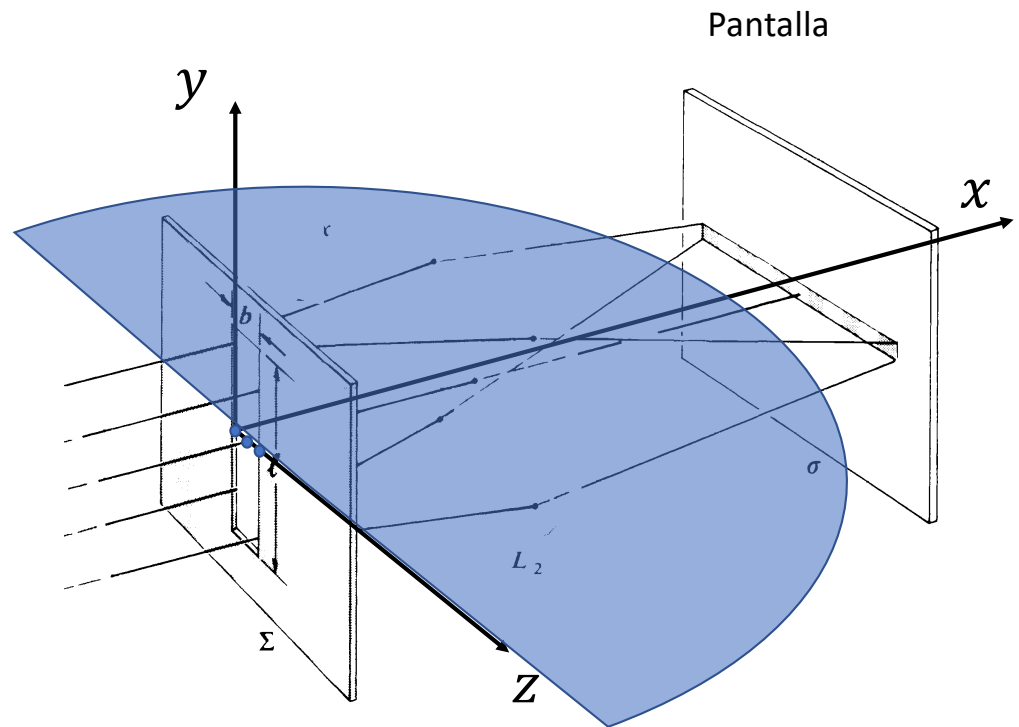
Rendija Única

- Lo que se hace normalmente es dividir la ranura en segmentos verticales de fuentes coherentes como las que vimos anteriormente.
- Por lo que acabamos de ver, cuando $l \gg \lambda$ cada segmento puede representarse como una sola fuente puntual a lo largo del eje z que irradia en el plano xz



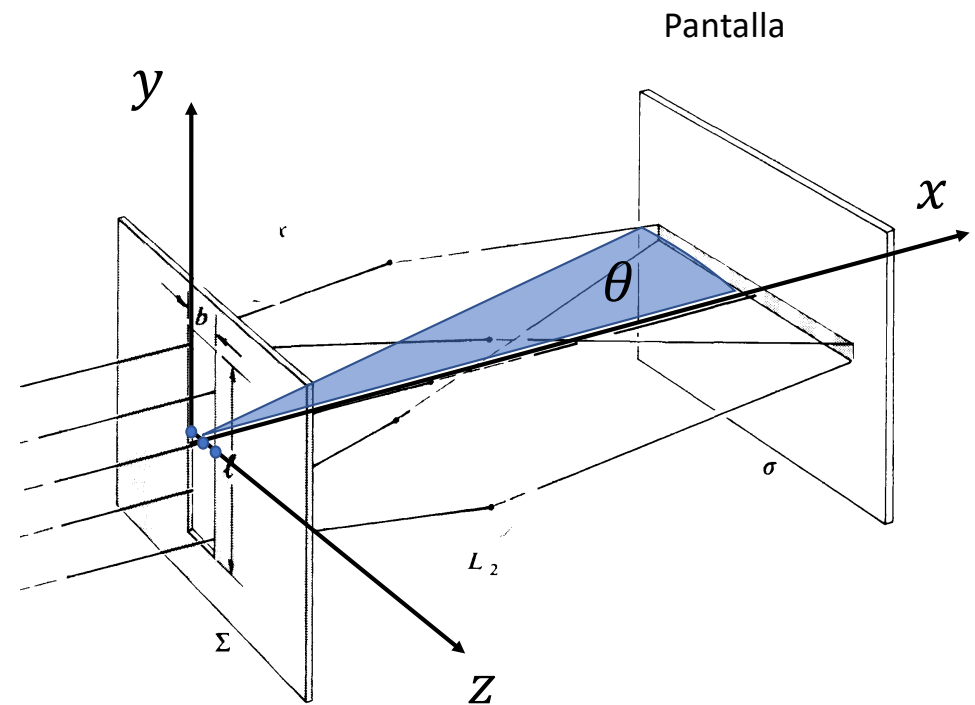
Rendija Única

- Lo que se hace normalmente es dividir la ranura en segmentos verticales de fuentes coherentes como las que vimos anteriormente.
- Por lo que acabamos de ver, cuando $l \gg \lambda$ cada segmento puede representarse como una sola fuente puntual a lo largo del eje z que irradia en el plano xz
- Entonces habrá muy poca difracción en la dirección paralela a los bordes de la rendija.



Rendija Única

- En esas condiciones, el ángulo θ indica la dirección al punto de evaluación de la irradiancia sobre la pantalla.
- θ se mide desde el eje x sobre el plano xz .

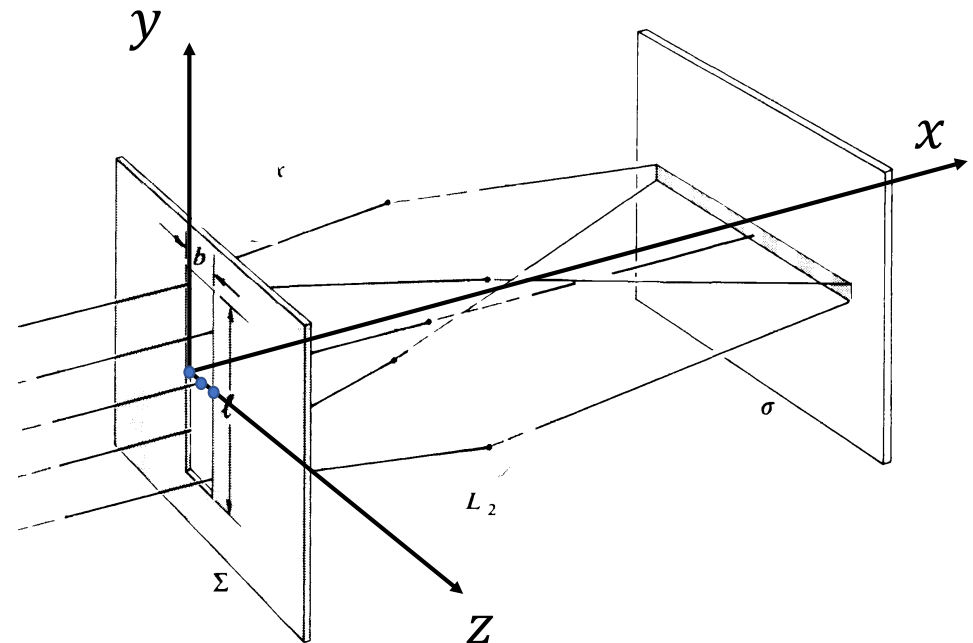


Rendija Única

- Entonces, el problema se limita al de una serie de fuentes coherentes en el eje z a lo largo de una distancia b .
- Este problema ya lo analizamos y la irradiancia resultante es

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

- donde $\beta = (kb/2) \sin \theta$



En la pantalla el patrón es perpendicular al lado mayor de la rendija



Rendija Única

- Para graficar $I(\theta)$ versus $\sin \theta$ volvamos a ver sus máximos y mínimos.
- $I(\theta) \geq 0$ por definición
- Máximo en $\theta = 0$ lo cual ocurre sí y solo sí $\beta = 0$
- Mínimos ($I = 0$) cuando $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi \dots \pm n\pi$. Esto implica que los mínimos se hallan en:

$$\sin \theta_{min} = \pm \frac{2n\pi}{kb} = \pm \frac{n\lambda}{b}$$

Rendija Única

- Ahora, que haya mínimos en $\beta = \pm\pi, \pm2\pi \dots \pm n\pi$ implica que entre ellos debe haber máximos.
- Entre los mínimos de primer orden, en $\sin \theta_{1min} = \pm \frac{\lambda}{b}$ tenemos el máximo central del patrón de difracción.
- ¿Qué pasa con los otros?
- Busquemos otros valores de $I(\beta)$ extremos haciendo $\frac{dI(\beta)}{d\beta} = 0$

Rendija única

- Derivando tenemos:

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0) \frac{2 \sin \beta (\beta \cos \beta - \sin \beta)}{\beta^3} = 0$$

- Por un lado tenemos máximo cuando $\beta = 0$ y mínimos cuando

$$\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$$

Rendija única

- Entonces la otra manera de que esta expresión sea cero:

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0) \frac{2 \sin \beta (\beta \cos \beta - \sin \beta)}{\beta^3} = 0$$

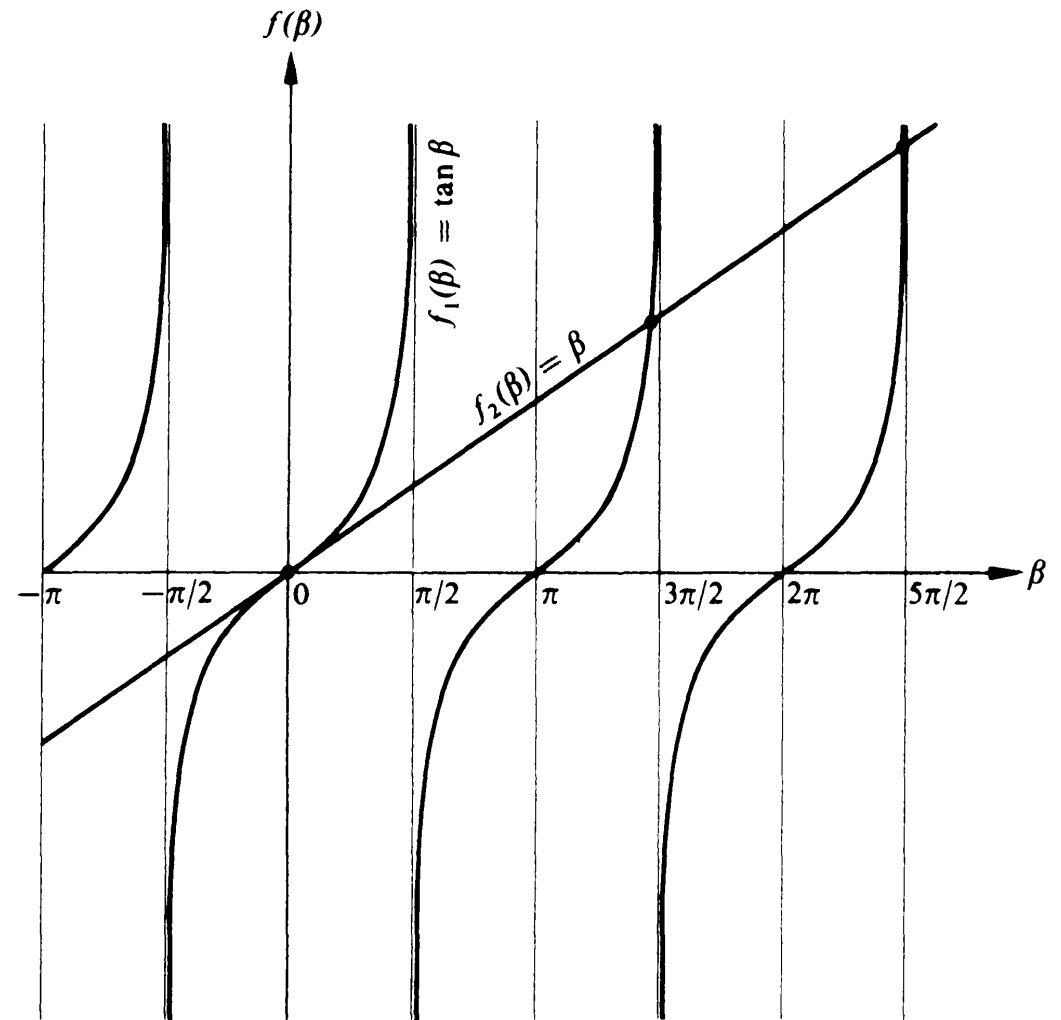
- Es que el término encerrado sea cero. De ahí se obtiene:

$$\beta \cos \beta - \sin \beta = 0$$

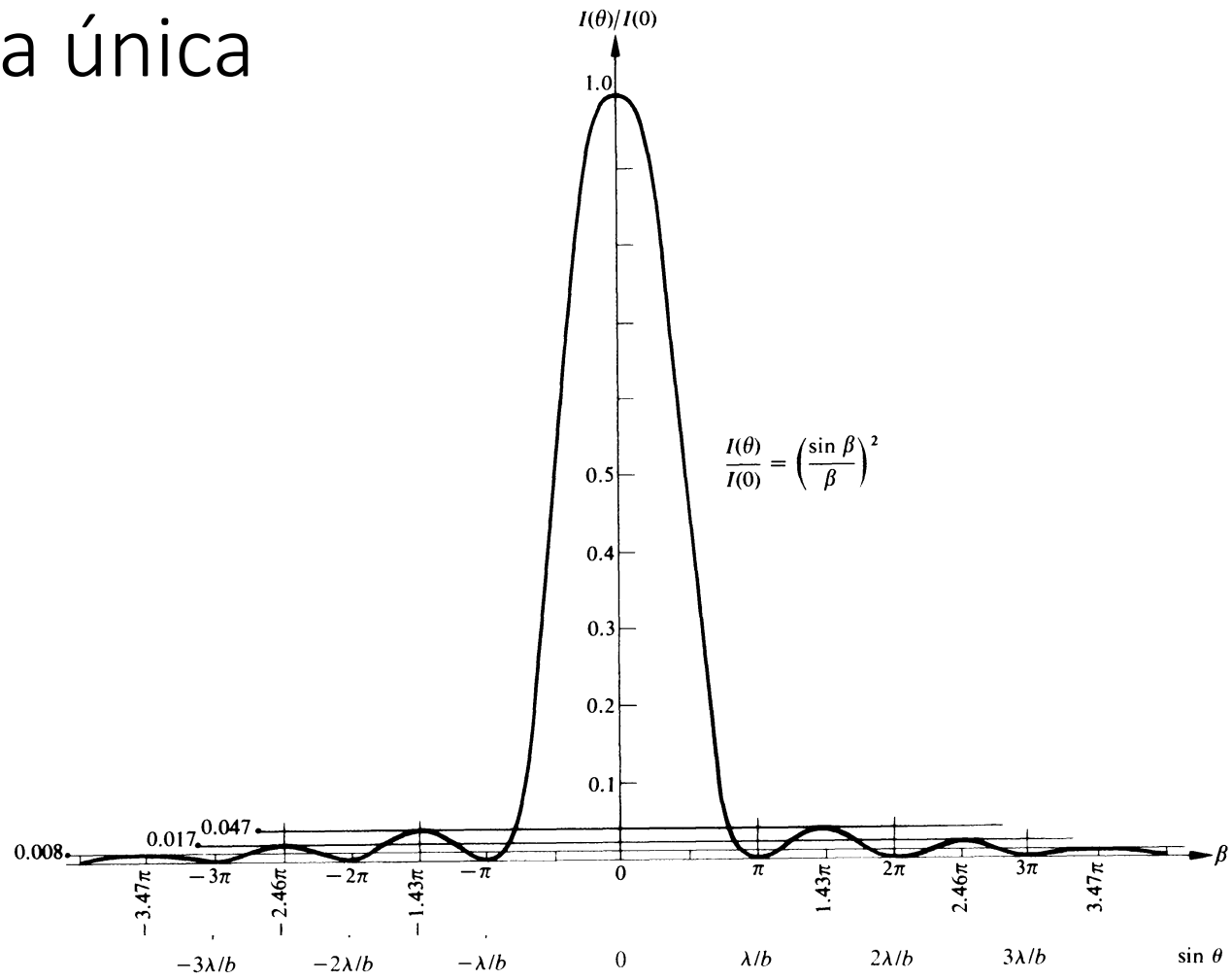
$$\tan \beta = \beta$$

Rendija única

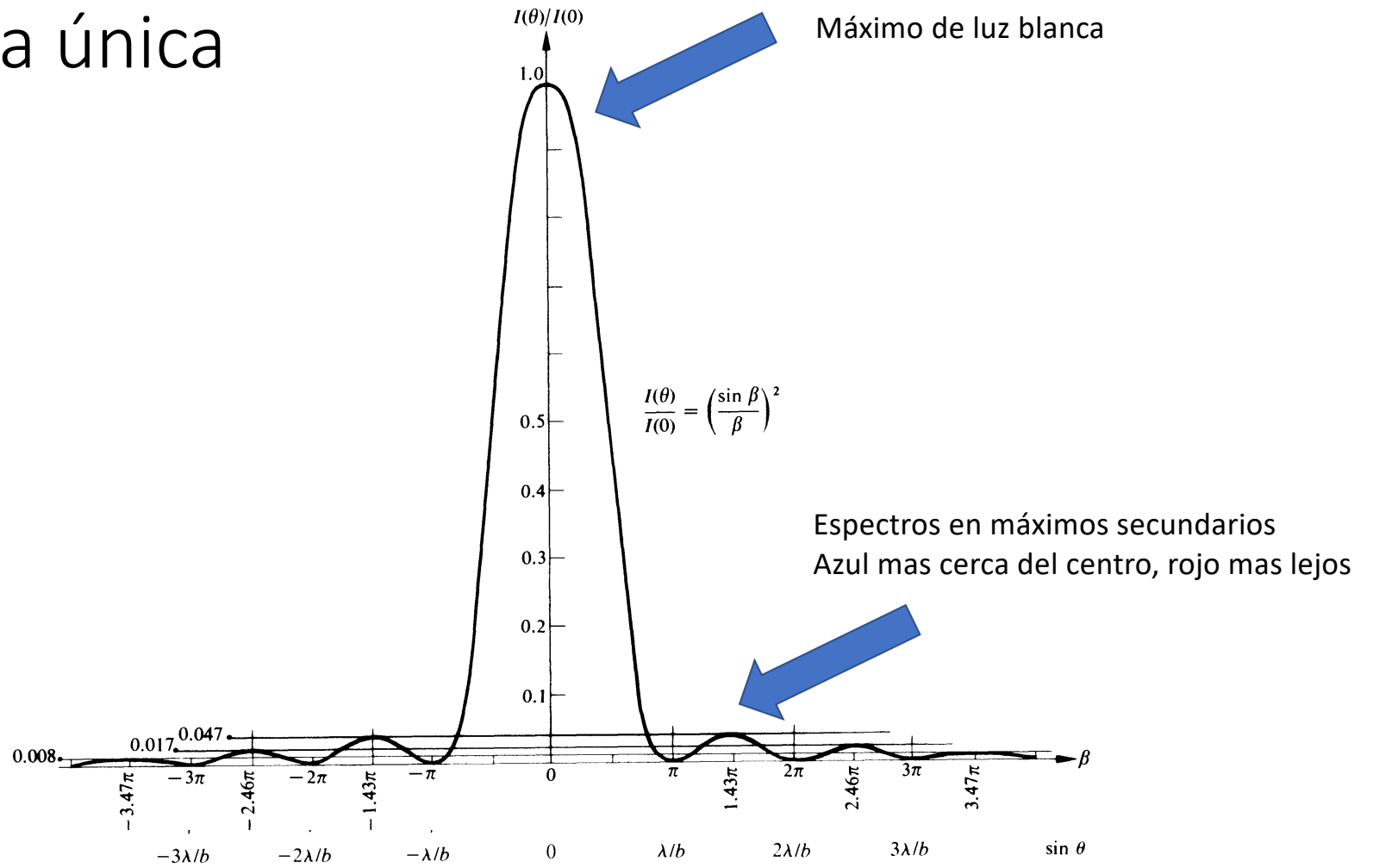
- La ecuación anterior no tiene soluciones analíticas, pero sí numéricas.
- Sus primeras raíces son:
$$\beta = \pm 1,4303\pi,$$
$$\pm 2,4590\pi, \pm 3,4707\pi \dots$$
- Esto es casi a mitad de camino entre dos mínimos



Rendija única



Rendija única



Luz blanca

Luz monocromática

