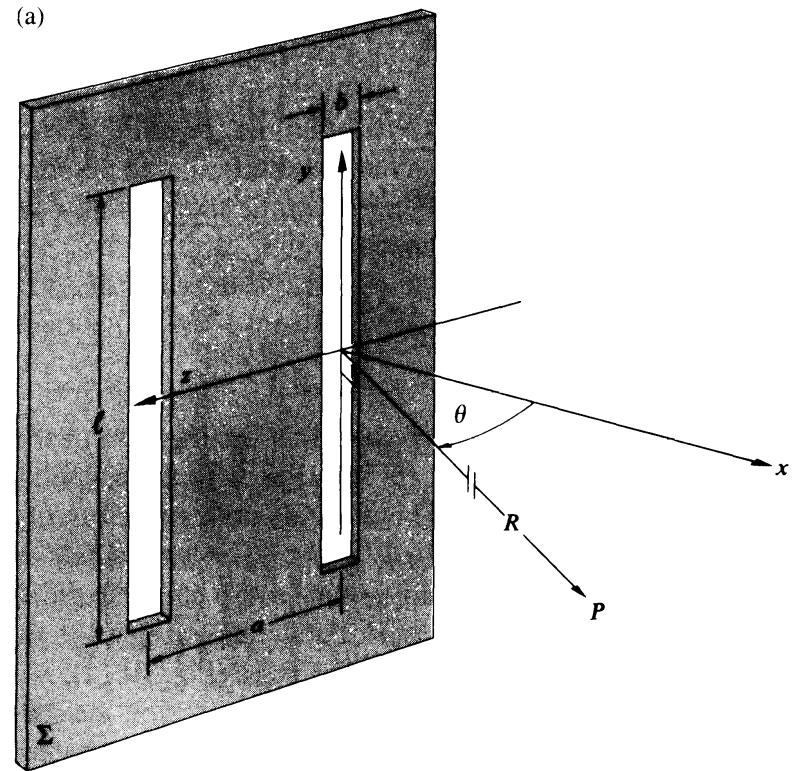


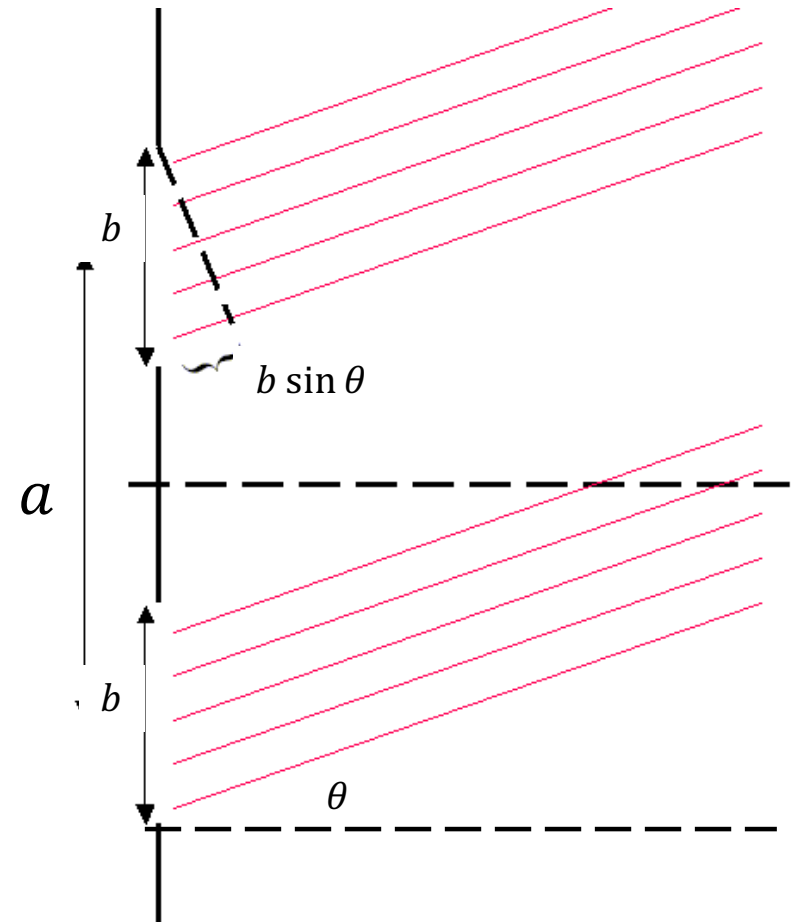
Doble rendija

- Supongamos dos rendijas idénticas del ancho b cuyos centros están separados una distancia a .
- Cada rendija por separado va a generar el patrón de difracción que vimos anteriormente.
- Para cada punto de la pantalla, las contribuciones al campo de cada rendija van a sumarse con la posibilidad de generar interferencia.



Doble rendija

- Recordemos el principio de Huygens Fresnel.
- Para una fuente lejana, la diferencia de fase inicial entre las ondas secundarias en las dos rendijas es cero.
- Luego, la diferencia de fase entre las ondas secundarias que llegan a un mismo punto P dependerá de la diferencia de camino óptico.



Doble rendija

- Hagamos el mismo planteo que para la rendija única ahora para dos rendijas vistas como dos segmentos de fuentes puntuales coherentes.
- La contribución del campo en un punto de la pantalla viene dada por:

$$E = C \int_{-b/2}^{b/2} F(z) dz + C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z) dz$$

rendija 1 rendija 2

- C es la misma pues es la misma amplitud que llega a cada rendija y luego a cada punto de la pantalla.

Doble rendija

- La función a integrar es similar al caso de una línea de fuentes, ahora sobre el eje z .

$$F(z) = \sin [\omega t - k(R - z \sin \theta)].$$

donde R es la distancia entre la rendija 1 y la pantalla

- La integral da:

$$E = bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) [\sin(\omega t - kR) + \sin(\omega t - kR + 2\alpha)]$$

donde $\alpha = \frac{ka}{2} \sin \theta$

Doble rendija

- Esto es la suma de dos campos, uno proveniente de la rendija 1 y otro proveniente de la rendija 2
- La cantidad 2α es la diferencia de fase entre una fuente en la rendija 1 y otra a una distancia a en la rendija 2.
- Simplificando la expresión anterior tenemos

$$E = 2bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \cos \alpha \sin (\omega t - kR + \alpha)$$

Doble rendija

- Elevando la expresión anterior al cuadrado y promediándola en el tiempo para tiempos largos llegamos a la expresión para la irradiancia:

$$I(\theta) = 4I_0 \left(\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \cos^2 \alpha$$

- Donde I_0 es la intensidad para una rendija

Doble rendija

- Esta expresión tiene un máximo en $\theta = 0$ con lo cual $\alpha = \beta = 0$.
- Ya vimos que los mínimos de difracción tenían lugar para $\beta = \pm \pi, \pm 2\pi \dots \pm n\pi$. Esto implicaba que los mínimos de difracción se hallan en:

$$\sin \theta_{mindif} = \pm \frac{2n\pi}{kb} = \pm \frac{n\lambda}{b}$$

- Por otro lado, los mínimos de interferencia ocurren cuando:

$$\alpha = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$$

Doble rendija

- Esto último implica que

$$\sin \theta_{minint} = \pm \frac{(2n+1)2\pi}{2ka} = \pm \frac{(2n+1)\lambda}{2a} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Por último, los máximos de interferencia ocurrirán cuando

$$\alpha_{maxint} = \pm n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- es decir, en las posiciones

$$\sin \theta_{maxint} = \pm \frac{2\pi n}{ka} = \pm \frac{n\lambda}{a}$$

Doble rendija: órdenes perdidos

- Puede darse el caso que a sea un múltiplo de b :

$$a = mb \quad m \in \mathbb{N}$$

- Eso hace que haya $2m$ líneas brillantes dentro del pico central de difracción.
- Un máximo de interferencia puede coincidir espacialmente con un mínimo de difracción si:

$$a = \frac{m}{n} b$$

- En ese caso, el máximo m -ésimo coincidirá con el mínimo n -ésimo:

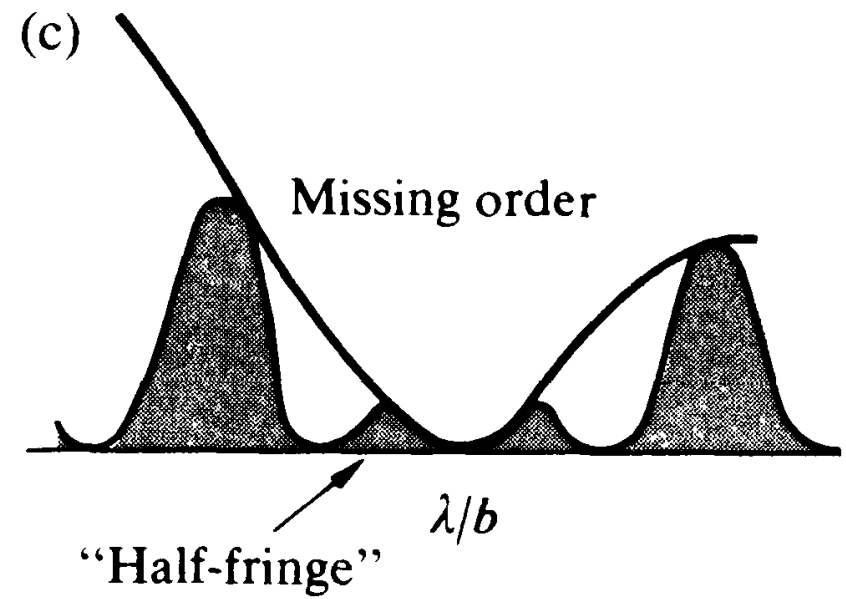
$$\sin \theta_{\max int}(m) = \frac{m\lambda}{a} = \sin \theta_{\min dif} = \frac{n\lambda}{b}$$

Pregunta

- ¿Qué se observa en ese valor de θ ?

Pregunta

- ¿Qué se observa en ese valor de θ ?

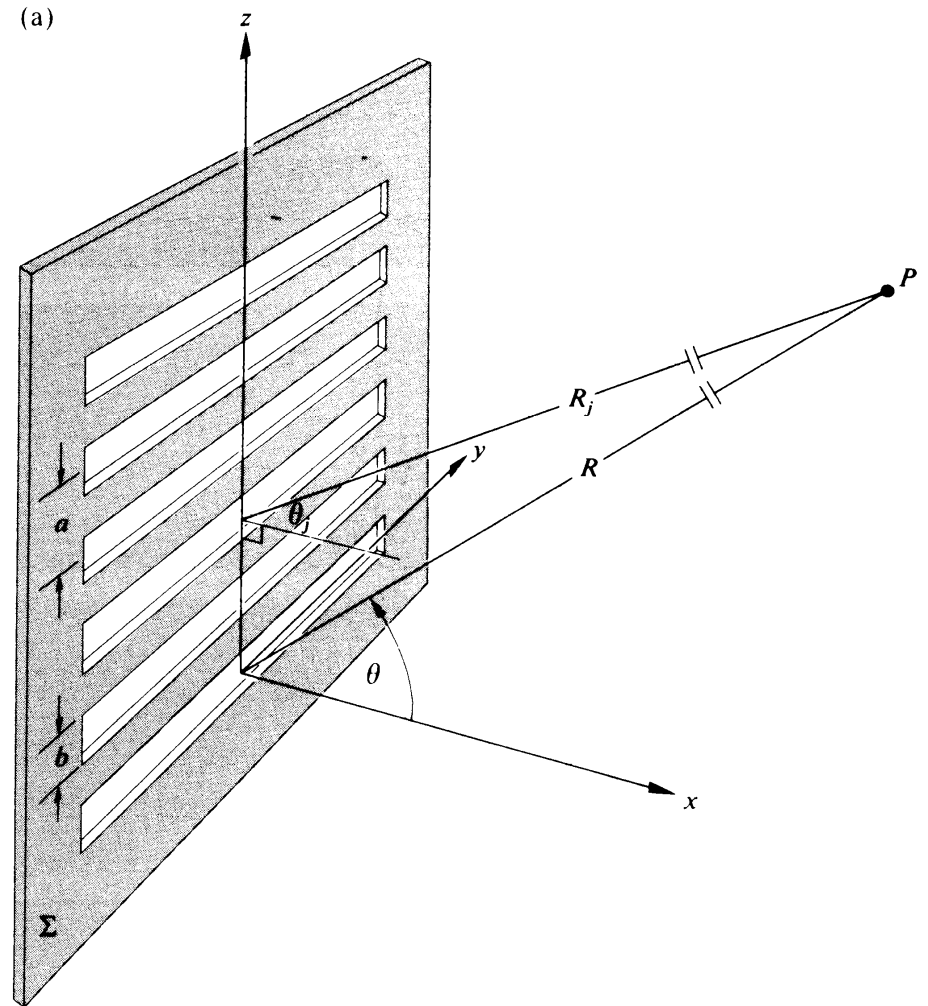


N rendijas

N rendijas

- Al igual que para el caso de dos rendijas sumemos las contribuciones al campo magnético en un punto de la pantalla:

$$\begin{aligned} E = & C \int_{-b/2}^{b/2} F(z) dz + C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z) dz \\ & + C \int_{2a-b/2}^{2a+b/2} F(z) dz + \cdots \\ & + C \int_{(N-1)a-b/2}^{(N-1)a+b/2} F(z) dz \end{aligned}$$



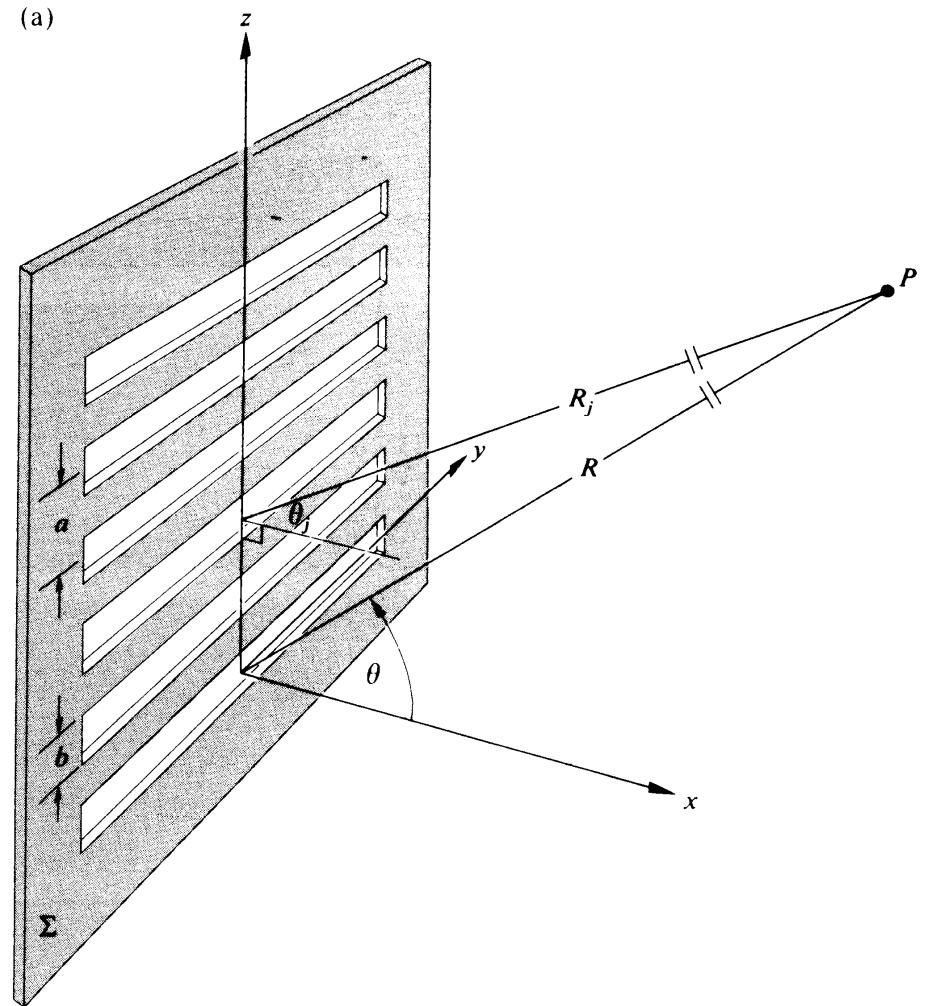
N rendijas

- En la expresión anterior, la función $F(z)$ sigue siendo:

$$F(z) = \sin [\omega t - k(R - z \sin \theta)].$$

- Una suposición adicional es que todo el conjunto de rendijas debe cumplir con la aproximación de Fraunhofer:

$$r = R - z \sin \theta$$



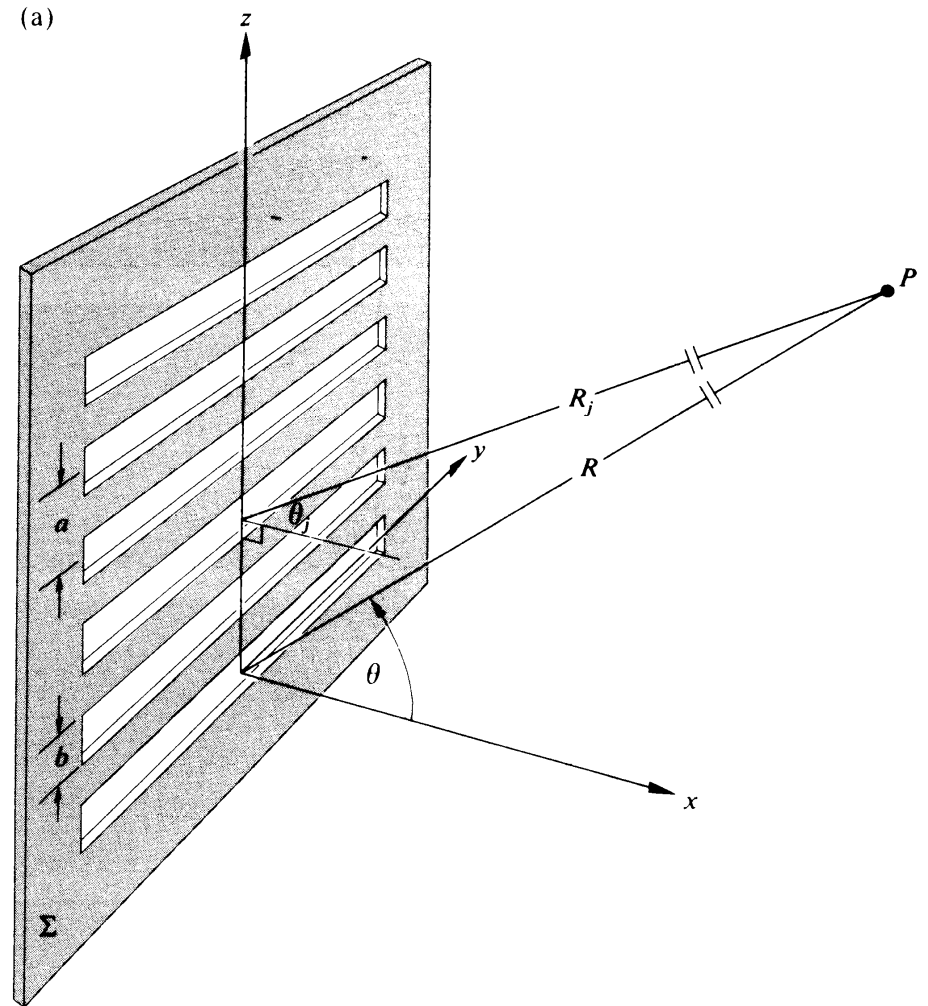
N rendijas

- En la expresión anterior, la función $F(z)$ sigue siendo:

$$F(z) = \sin [\omega t - k(R - z \sin \theta)].$$

- Una suposición adicional es que todo el conjunto de rendijas debe cumplir con la aproximación de Fraunhofer:

$$r = R - z \sin \theta$$



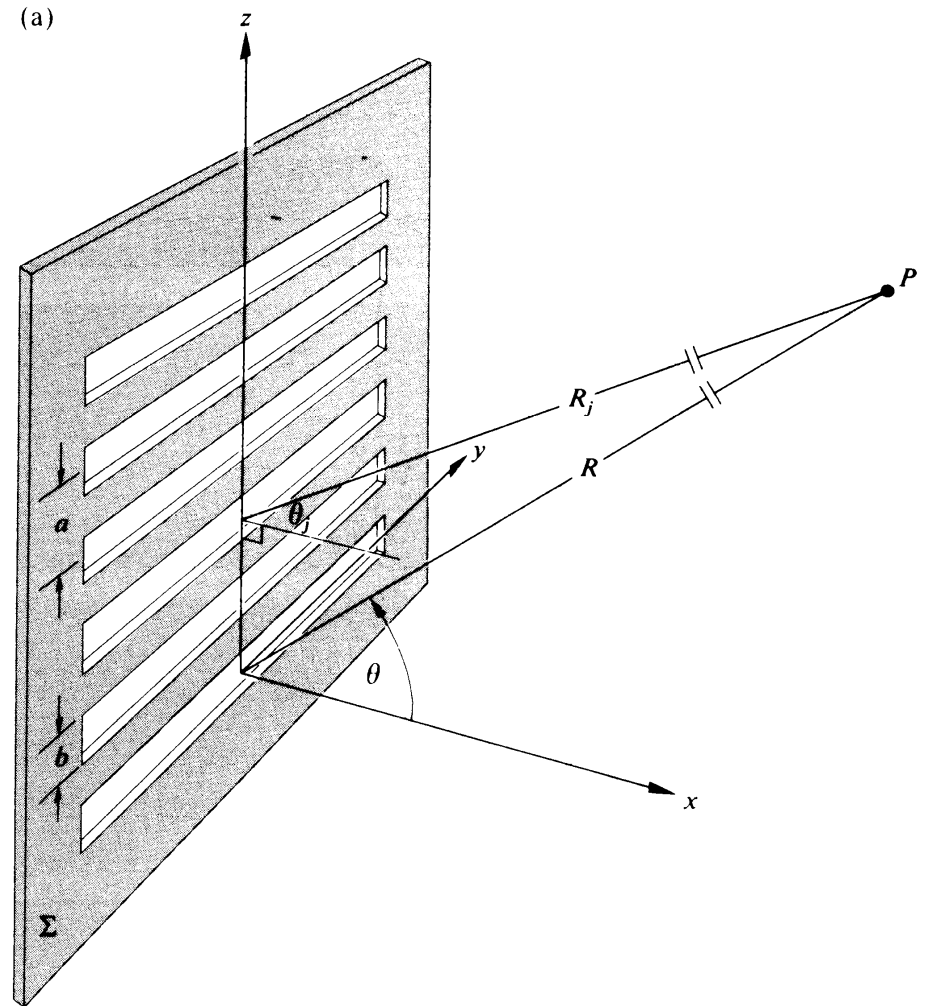
N rendijas

- La contribución de la j -ésima rendija a la integral si $\theta_i = \theta$

$$E_j = bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin (\omega t - kR + 2\alpha j)$$

- Entonces la contribución total en el punto P es:

$$E = \sum_{j=0}^{N-1} bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin (\omega t - kR + 2\alpha j)$$



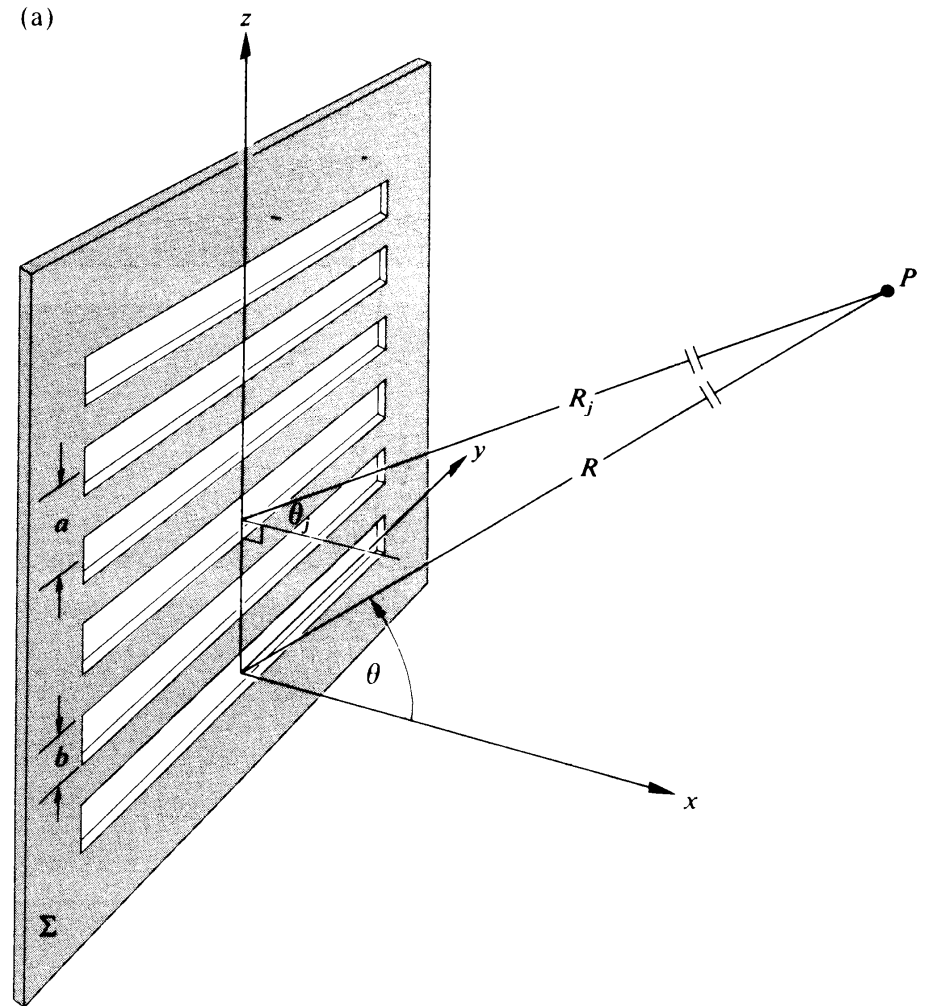
N rendijas

- Esto equivale a:

$$E = \text{Im} \left[bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) e^{i(\omega t - kR)} \sum_{j=0}^{N-1} (e^{i2\alpha})^j \right]$$

- Pero ya vimos esta serie geométrica, con lo cual concluimos

$$E = bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right) \sin[\omega t - kR + (N-1)\alpha]$$



N rendijas

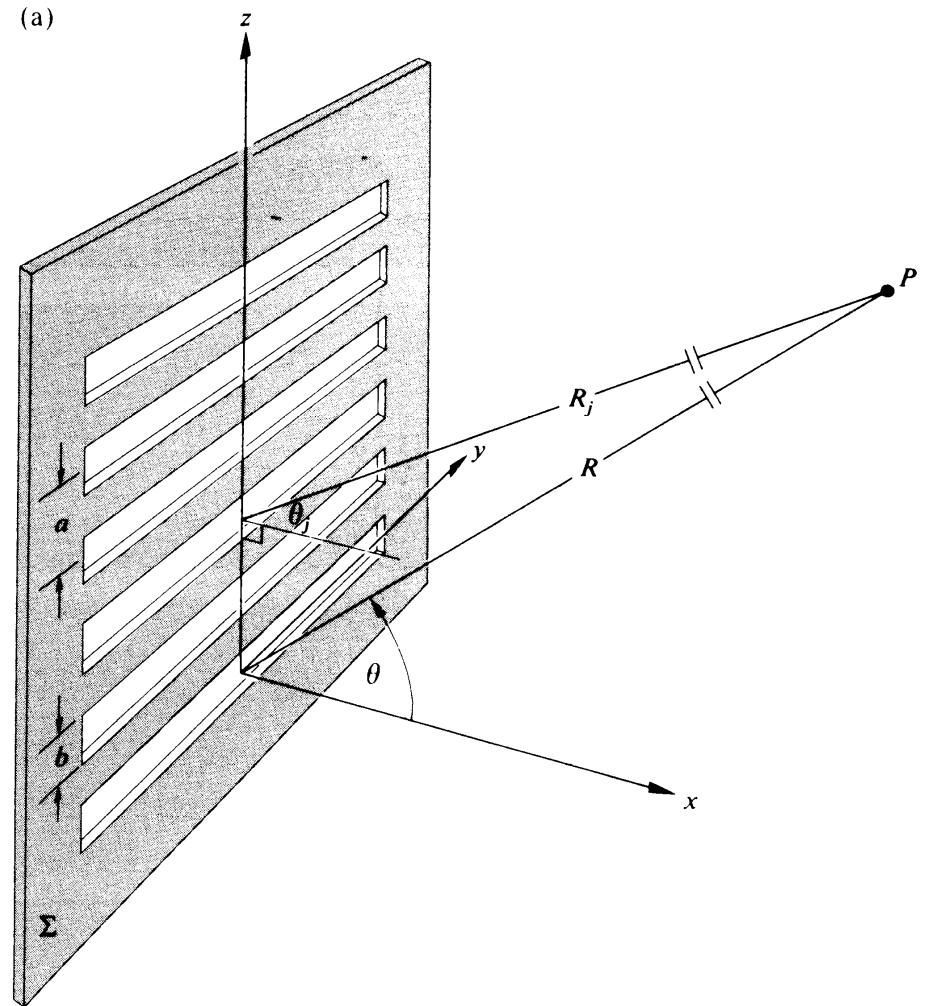
- Entonces, la irradiancia queda:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

- donde

$$\alpha = \frac{ka}{2} \sin \theta$$

$$\beta = \frac{kb}{2} \sin \theta$$



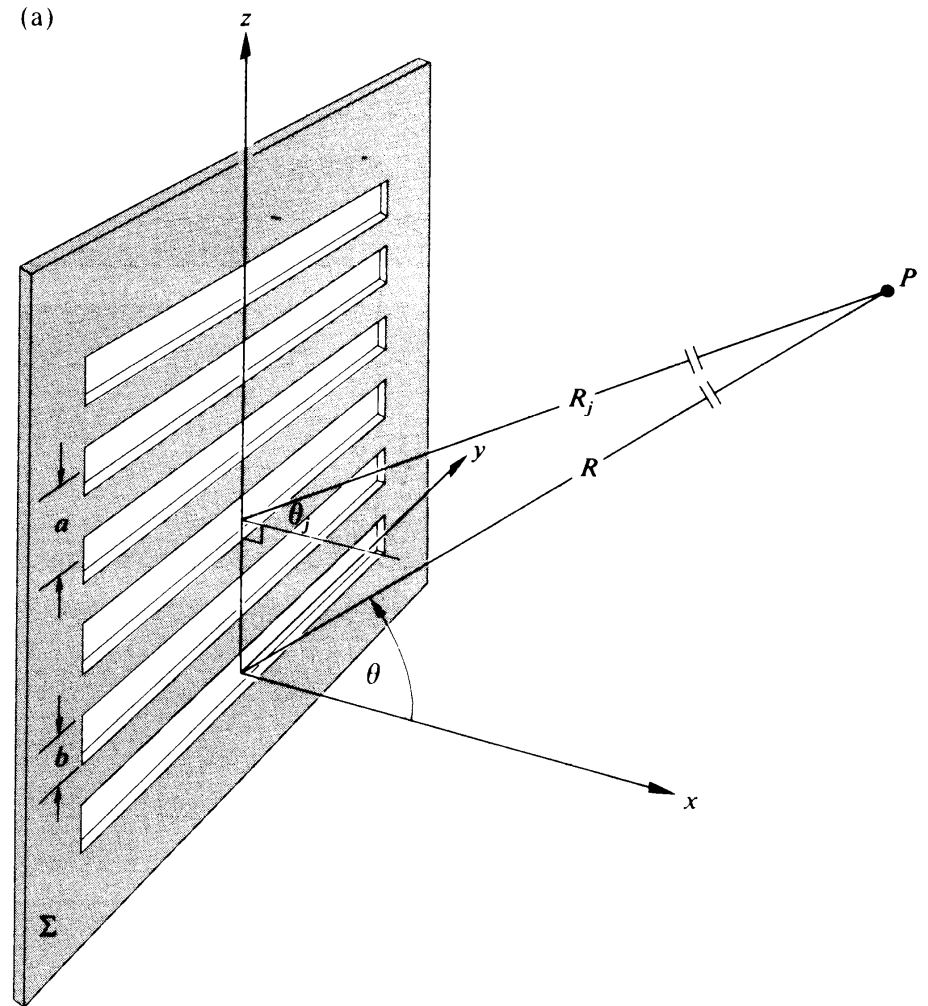
N rendijas: interferencia

- Veamos qué aporta el factor

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

- Este factor alcanza un valor máximo igual a N^2 cuando

$$\alpha = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$$



N rendijas: máximos de interferencia

- Entonces, los máximos de

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

- Ocurren en las posiciones:

$$\sin \theta_{maxint} = \pm \frac{n\lambda}{a} ; \quad 0, 1, 2, 3 \dots$$

N rendijas: mínimos de interferencia

- Los mínimos de la función

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

- Son más fáciles de encontrar, estos ocurren para los valores de

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{N}, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{3\pi}{N}, \dots, \pm \frac{(N-1)\pi}{N}, \pm \frac{(N+1)\pi}{N}, \dots$$

N rendijas: mínimos de interferencia

- Los mínimos de la función

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

- Son más fáciles de encontrar, estos ocurren para los valores de

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{N}, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{3\pi}{N}, \dots, \pm \frac{(N-1)\pi}{N}, \pm \frac{(N+1)\pi}{N}, \dots$$

Pregunta

- ¿Por qué no se incluye a $\frac{N\pi}{N}$ entre los mínimos de interferencia?

N rendijas: mínimos de interferencia

- En consecuencia, entre dos máximos de interferencia (que llamaremos principales) existen $N - 1$ mínimos. Por ejemplo, entre el máximo central y los máximos principales de orden ± 1 los mínimos ocurren para

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{N}, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{3\pi}{N}, \dots, \pm \frac{(N-1)\pi}{N}$$

- En este ejemplo, esto corresponde a las ubicaciones:

$$\sin \theta_{minint} = \pm \frac{\lambda}{aN}, \pm \frac{2\lambda}{aN}, \pm \frac{3\lambda}{aN}, \dots, \pm \frac{(N-1)\lambda}{aN}$$

N rendijas: máximos secundarios de interferencia

- Si existen **$N - 1$ mínimos entre dos máximos principales**, deben existir **máximos secundarios entre esos mínimos**. Entre el máximo central y el primer máximo principal los máximos secundarios se ubican en

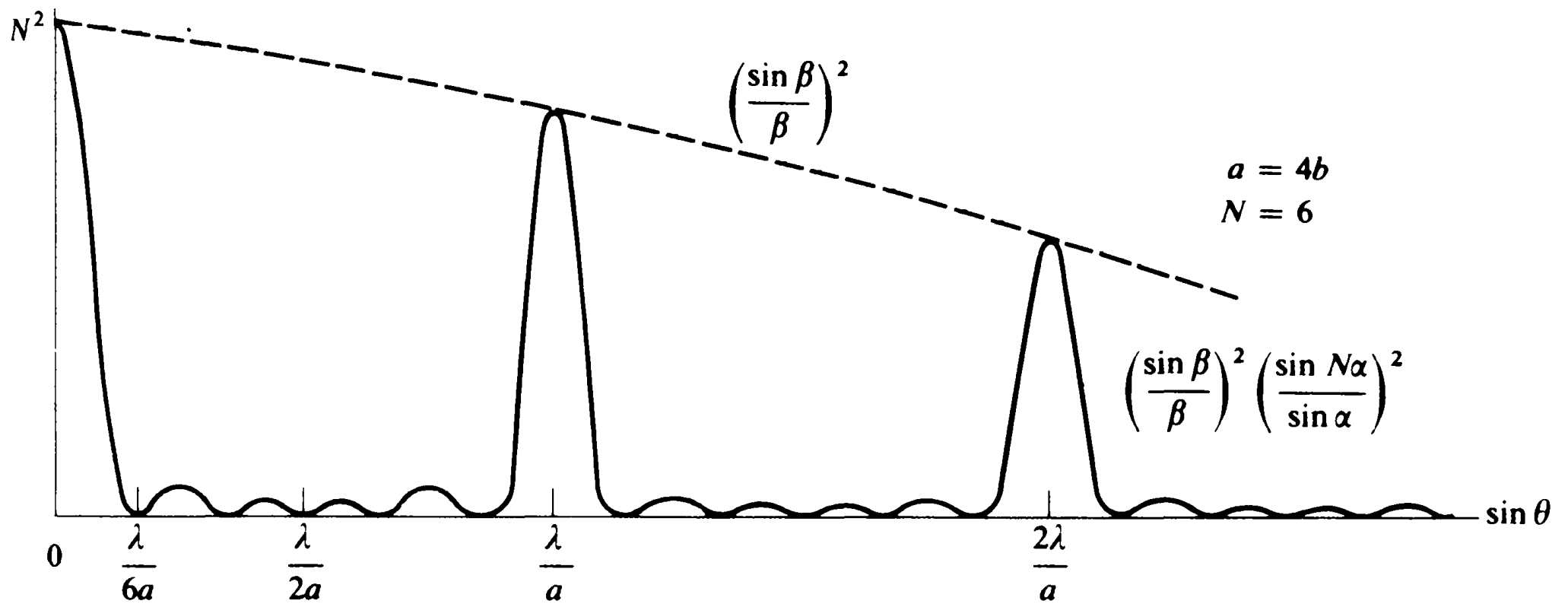
$$\alpha = \pm \frac{3\pi}{2N}, \pm \frac{5\pi}{2N}, \dots$$

Son $N - 2$ entre dos máximos principales

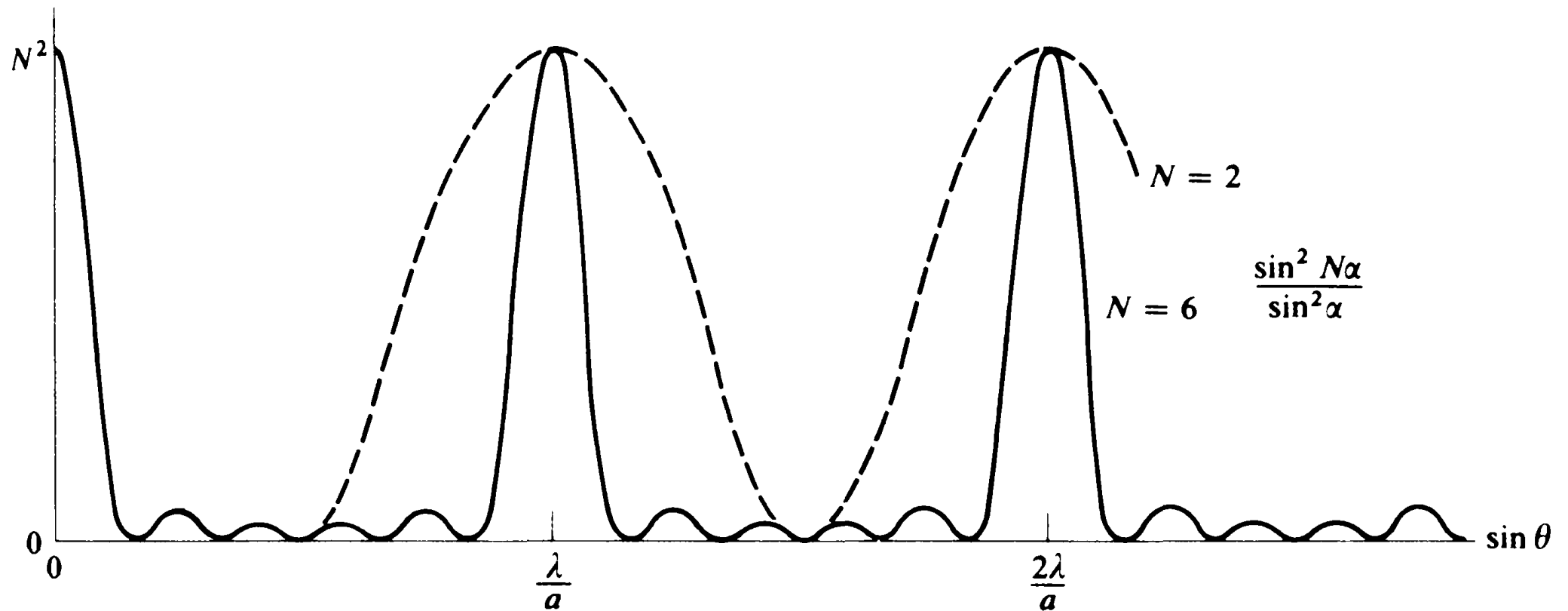
- Pues es ahí donde $\sin N\alpha$ tiene máximos
- En este ejemplo, esto corresponde a las ubicaciones:

$$\sin \theta_{maxsec} = \pm \frac{3\lambda}{2aN}, \pm \frac{5\lambda}{2aN}, \dots$$

Ejemplo: 6 rendijas



Ejemplo: 6 versus 2 rendijas



Variación con N

- Ya sabemos dónde están los máximos y mínimos de difracción y los de interferencia.
- ¿Cómo cambian las posiciones y las irradiancias en los máximos cuando cambiamos N ?

Variación con N

- Al aumentar N , la intensidad de los máximos principales de interferencia va aumentar como N^2 . Es decir, acumulan más energía al aumentar N .
- La posición de los máximos principales no depende de N para $N \geq 2$.
- A la vez que crecen en intensidad, se vuelven más finos ya que los mínimos que los rodean se acercan.

$$\Delta\alpha \text{ entre mínimos que rodean a máximo principal} \quad \frac{(N+1)\pi}{N} - \frac{(N-1)\pi}{N} = \frac{2\pi}{N}$$

- La posición de los máximos y mínimos de difracción no cambia con N .

Variación con N

- ¿Qué pasa con los máximos secundarios?
- Como $I(\theta = 0) = I_0 N^2$ la irradiancia puede reescribirse como:

$$I(\theta) = \frac{I(0)}{N^2} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

- Al crecer N , los valores de α_{maxsec} correspondientes a los máximos secundarios se hacen cada vez más pequeños:
- Entonces, se puede aproximar $\sin \alpha_{maxsec} \cong \alpha_{maxsec}$

Variación con N

- Como $|\sin N\alpha_{maxsec}| = 1$ la irradiancia queda:
 - Para el primer máximo secundario

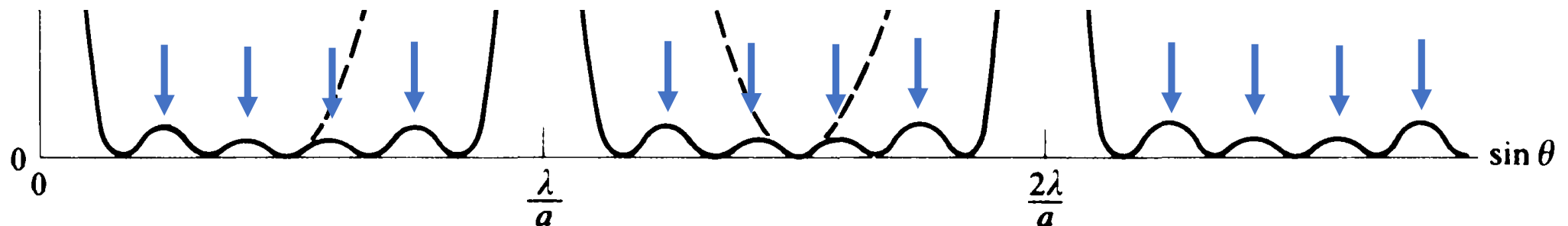
$$I(\theta_{maxsec1}) = \frac{I(0)}{N^2} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \frac{4N^2}{9\pi^2} = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \frac{4}{9\pi^2} \cong \frac{1}{22} I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

- Para el segundo

$$I(\theta_{maxsec2}) \cong \frac{1}{64} I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

Variación con N

- A mitad de camino del siguiente máximo principal, la intensidad de los máximos secundarios vuelve a subir de manera simétrica.



- La irradiancia de un máximo secundario no varía con N , pero su ancho se achica con lo cual al aumentar N se perciben cada vez menos.

$w=50\mu$

$d=150\mu$

3 slits

4 slits

5 slits

7 slits

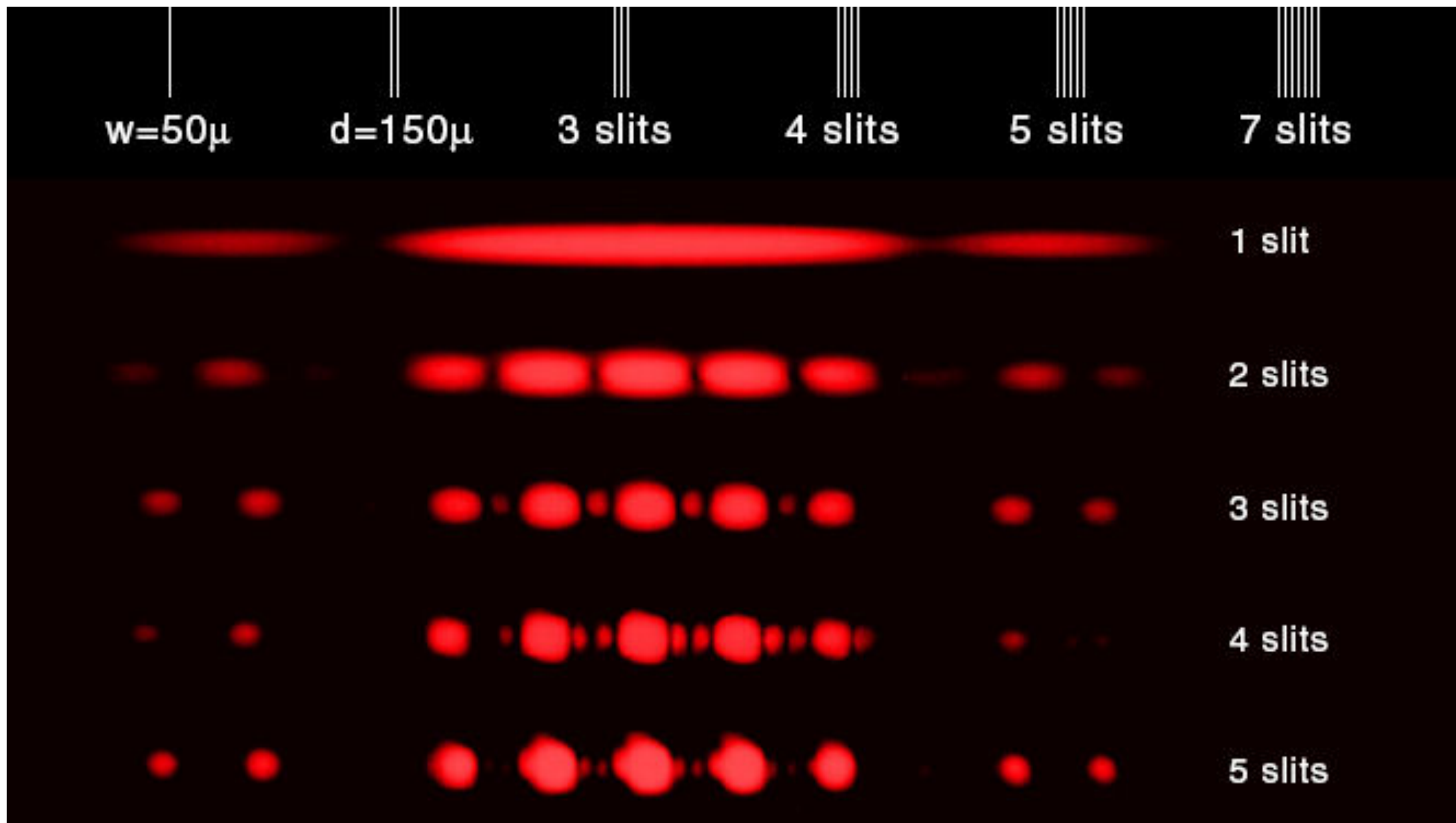
1 slit

2 slits

3 slits

4 slits

5 slits



Variación con λ

