

Circuitos RLC

Objetivos

Analizar el régimen transitorio de un circuito RLC serie. Analizar en el régimen estacionario el comportamiento de la corriente en función de la frecuencia: encontrar la frecuencia de resonancia y estudiar el desfase en función de la frecuencia del generador.

Circuito RLC serie

Se tiene un circuito compuesto por un capacitor C, una inductancia L y una resistencia R conectados en serie a una fuente de tensión G como se muestra en la Figura 1.

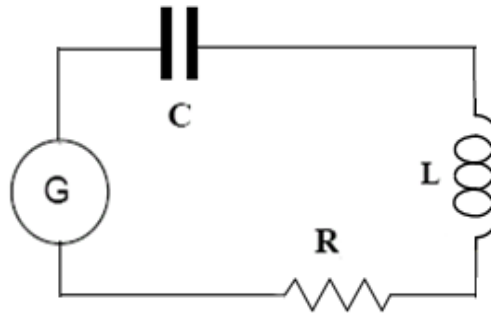


Figura 1: Circuito RLC serie.

Aplicando las leyes de Kirchoff al circuito de la figura:

$$\Delta V = \Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{c} \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{c} \quad (2)$$

La solución a la ecuación diferencial dependerá de las condiciones del circuito. Por ejemplo, si en algún instante de tiempo se cambia al menos una de las variables se inicia un estado temporal denominado *régimen transitorio*, hasta el estado de equilibrio. Una vez alcanzado, el circuito se estabiliza alcanzando el denominado *régimen estacionario*.

Régimen transitorio

En un circuito RLC serie como el de la Figura 2, donde a $t = 0$ $V_0 = 0$, la ecuación (2) resulta

$$0 = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} \quad t > 0 \quad (3)$$

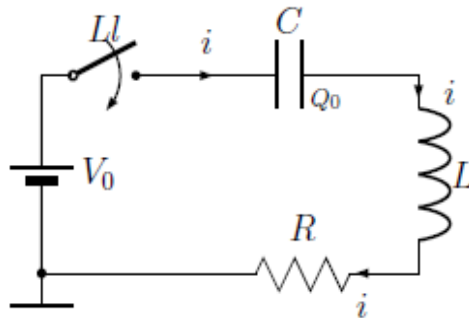


Figura 2: Circuito RLC en régimen transitorio.

La llave se cierra en $t = 0$

Plantando soluciones del tipo $i(t) \propto e^{\lambda t}$, resulta la ecuación característica

$$L \lambda^2 + R \lambda + \frac{1}{C} = 0 \quad (4)$$

cuyas raíces son

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta \quad (5)$$

donde se definió

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad y \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (6)$$

con α denominada constante de amortiguación. Considerando que tanto R como L y C son positivos, se pueden dar tres casos: $\beta^2 > 0$ sobreamortiguado, $\beta^2 = 0$ crítico, y $\beta^2 < 0$ subamortiguado. Estudiaremos a continuación los casos $\beta^2 > 0$ y $\beta^2 < 0$.

1. Caso sobreamortiguado: $\alpha^2 > \omega_0^2$ o $R > 2\sqrt{L/C}$

Ambas raíces son reales y distintas, resultando

$$i(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \quad (7)$$

siendo A y B dos constantes reales que dependen de las condiciones iniciales. Asumiendo que el capacitor está inicialmente descargado resulta $i(0) = 0$ y $di/dt|_0 = V_0 / L$, se tiene

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V_0}{2L\beta} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} t\right) \end{aligned} \quad (9)$$

2. Caso subamortiguado: $\alpha^2 < \omega_0^2$ o $R < 2\sqrt{L/C}$

Ambas raíces son complejas y distintas

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega \quad , \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (10)$$

Resultando

$$i(t) = e^{-\alpha t}(A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad (11)$$

Aplicando las condiciones iniciales $i(0) = 0$ y $di/dt|_0 = V_o / L$, se obtiene

$$i(t) = \frac{V_o}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

$$= \frac{V_o}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t\right) \quad (12)$$

Un ejemplo de ambas respuestas se puede ver en la Figura 3.

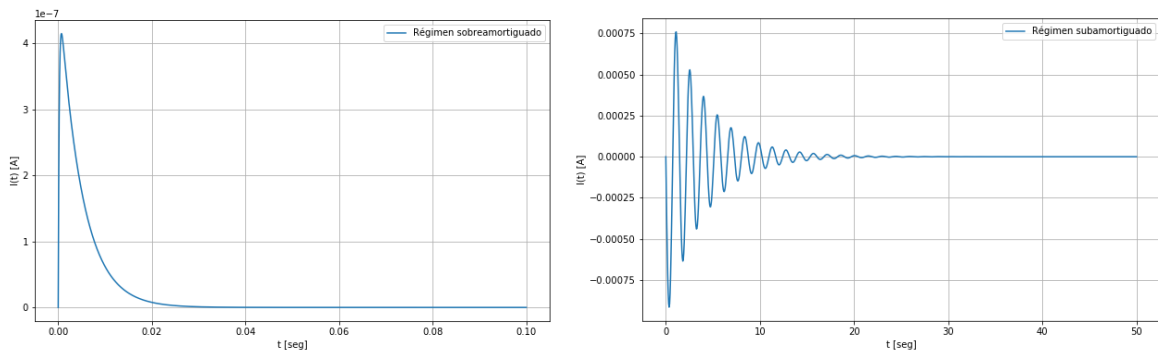


Figura 3: Casos sobreamortiguado (izquierda) y subamortiguado (derecha)

Realización de la práctica:

- Montar un circuito como el de la Figura 1 usando un generador de ondas cuadradas, y encontrar los casos sobreamortiguado y subamortiguado. Ajustar el caso subamortiguado y comparar con los datos del circuito. Se debe tener presente que la inductancia tiene resistencia propia y en caso que corresponda debe ser tomada en cuenta en la resistencia total del circuito.

Régimen estacionario

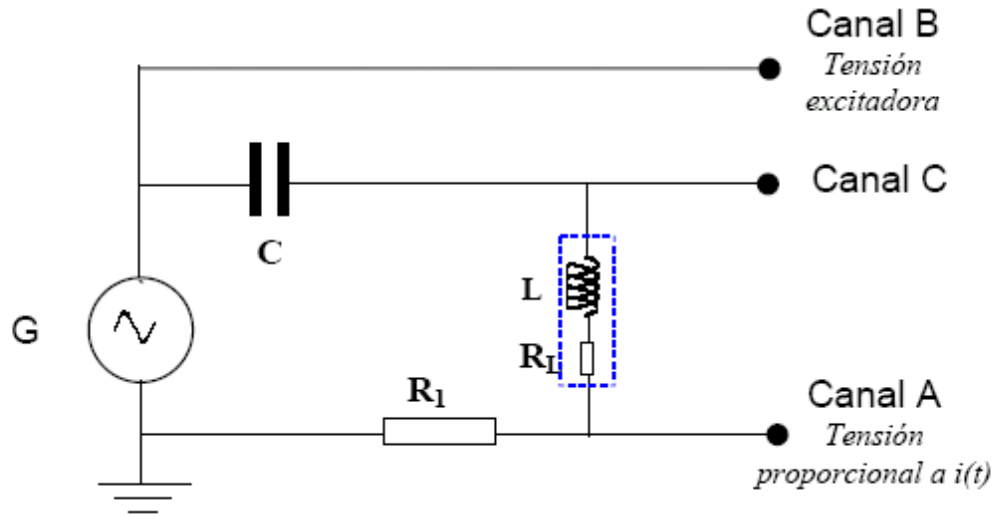


Figura 3: Circuito RLS serie en régimen estacionario

El voltaje suministrado por el generador G es sinusoidal : $V(t) = V_{max} \text{sen}(\omega t)$ y la corriente del circuito estará dada por $I(t) = I_{max} \text{sen}(\omega t + \phi)$ (con $\omega = 2\pi f$, la frecuencia angular asociada a la frecuencia f suministrada por el generador). De este modo el circuito queda expresado como

$$V = I Z = I(R + Z_L + Z_C) = I \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \quad (13)$$

con Z_L y Z_C las impedancias de la inductancia y el capacitor respectivamente, y j la unidad imaginaria ($j^2 = -1$).

La expresión (13) puede escribirse en términos del módulo y la fase resultando que

$$|Z|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2, \quad \text{tg}(\phi) = \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} = \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R} \quad (14)$$

$$|I| = \frac{|V|}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (15)$$

A partir de esta ecuación pueden verificarse los siguientes casos:

$$1) \omega \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad |I| \rightarrow 0$$

Circuito capacitivo: la fase es negativa y el desfase de I respecto a V positivo

$$2) \omega \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad X_L = \omega L \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad |I| \rightarrow 0$$

Circuito inductivo: la fase es positiva y el desfase de I respecto a V negativo

$$3) \omega \text{ es tal que } \omega L = \frac{1}{\omega C}, \text{ resultando en una reactancia } X_L - X_C = 0$$

Circuito resistivo: la fase es cero e I y V están en fase

En este caso

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (6)$$

resultando un circuito donde $|I|$ alcanza su máximo valor $|I|_{max} = |V| / R$.

Por ello la condición $\omega = \omega_0$ para la cual $X_T = 0$ define lo que se denomina *resonancia* del circuito.

La figura 4 muestra el gráfico de $I(\omega)$ para tres casos de R, L y C, donde se observa la resonancia en $\omega = \omega_0$

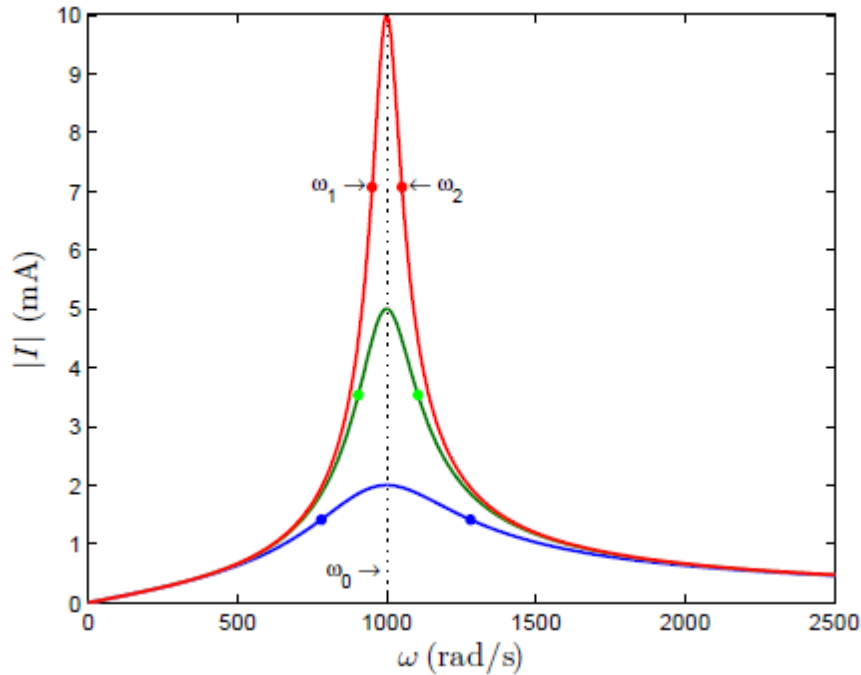


Figura 4: Amplitud de la corriente circulante por un circuito RLC serie alimentado por una fuente de tensión armónica de $1 V_{pp}$, en función de la frecuencia, para los casos: $R_1 = 100$, $R_2 = 200$ y $R_3 = 500$. En los tres casos se mantuvo: $L = 1H$ y $C = 1 \mu F$. Se destacan las frecuencias ω_1 y ω_2 que permiten definir los correspondientes anchos de banda $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

El ancho de banda $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ es el intervalo de frecuencias para el cual la potencia disipada cae a la mitad de la máxima.

$$P(\omega) = \frac{|I|^2}{2} R, \quad P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{P_{Max}}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{R}{L} \quad (7)$$

A su vez, se define el factor de calidad o factor de mérito Q :

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \text{o relacionado a } \Delta\omega \quad \rightarrow \quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (8)$$

Realización de la práctica:

- Montar un circuito como el de la Figura 1 y medir la corriente en función de la frecuencia. Encontrar a partir de estas mediciones la frecuencia de resonancia y el valor del factor de mérito. Se debe tener presente que la inductancia tiene resistencia propia y en caso que corresponda debe ser tenida en cuenta en la resistencia total del circuito.
- Medir el desfase (f) en función de la frecuencia. Puede utilizar para esto el modo X-Y del osciloscopio.

Bibliografía

1. M. Alonso and E.J. Finn. Física: Campos y ondas, volume 2 of Física. Editorial Pearson Educación, 1998.
2. F.S. Crawford. Ondas, volume 3 of Berkeley Physics Course. Editorial Reverté, 1994.
3. E.M. Purcell. Electricidad y magnetismo, volume 2 of Berkeley Physics Course. Editorial Reverté, 1988.
4. J.R. Reitz, F.J. Milford, and R.W. Christy. Fundamentos de la teoría electromagnética. Pearson Educación. Editorial Pearson Educación, 1996.
5. F.R. Trelles. Temas de electricidad y magnetismo. Ediciones previas. Editorial EUDEBA, 1984.
6. Guías de Laboratorio 3 - 1er Cuatrimestre 2019 - César Moreno – DF – FCEyN-UBA

APÉNDICE G

DETERMINACIÓN DE LA DIFERENCIA DE FASES ENTRE DOS SEÑALES

Consideremos dos señales eléctricas de variación senoidal de igual frecuencia pero de distintas amplitudes y con una diferencia de fases entre ellas que llamamos ϕ . Las expresiones analíticas que las describen son:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad (\text{G.1})$$

$$y(t) = B \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) \quad (\text{G.2})$$

Si a cada una de estas señales la enviamos a los canales 1 y 2 de un osciloscopio de doble traza funcionando en el "modo base de tiempo" (o las adquirimos con un sistema de toma de datos), las señales se verán como se muestra en la Fig. G.1.

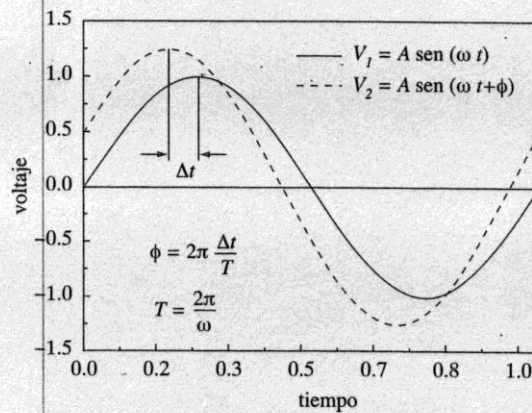


Figura G.1 - Vista de las señales (G.1) y (G.2) en un osciloscopio en función del tiempo.

La diferencia de fases ϕ de las ondas está relacionada con la diferencia Δt por:

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \quad (\text{G.3})$$

donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$. En el gráfico pueden medirse Δt y T con mucha precisión, y así determinar ϕ .

Si las mismas señales se analizan con un osciloscopio de doble traza funcionando en el "modo XY" (los osciloscopios digitales no poseen comúnmente esta función), lo que obtenemos es un gráfico si-

340 Física re-Creativa

milar al de la Fig. G.2. Lo que vemos es $y(t)$ en función de $x(t)$, y, en consecuencia, resulta un gráfico que es el lugar geométrico descrito por las ecuaciones paramétricas (G.1) y (G.2). Dicho lugar geométrico resulta –en este caso de funciones senoidales desfasadas– una elipse, con ejes que no caen alineados con los ejes vertical y horizontal del osciloscopio.

Es fácil ver de (G.1) y (G.2) que para $t = 0$, $x(0) = 0$ y $y(0) = B \cdot \text{sen}(\phi)$. O sea que del cociente entre el valor de y donde la elipse corta al eje vertical y el valor máximo de la señal y ($y_{\text{máx}} \doteq B$), obtenemos el valor $\text{sen}(\phi)$. Un análisis similar se aplica al eje horizontal.

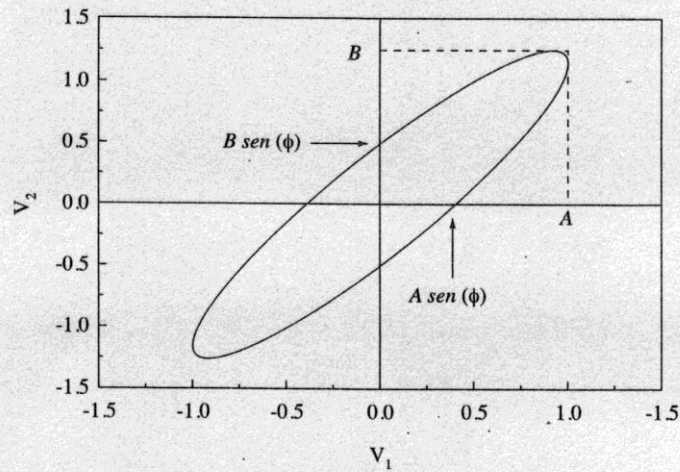


Figura G.2 - Señales (G.1) y (G.2) vistas en el modo XY. Descripción del procedimiento gráfico para obtener la diferencia de fases entre las dos señales.

Si las señales se adquieren con un sistema de toma de datos conectado a una PC, se deben obtener las dos ondas $x(t)$ y $y(t)$ por lo menos durante un período, y luego se representa gráficamente $y(x)$.