Ondas

Fenómenos periódicos

- Corazón
- Respirar
- Hamaca
- Bandera
- Movimiento de estrellas, planetas, lunas
- Nubes
- Sonido
- Luz

Ondas

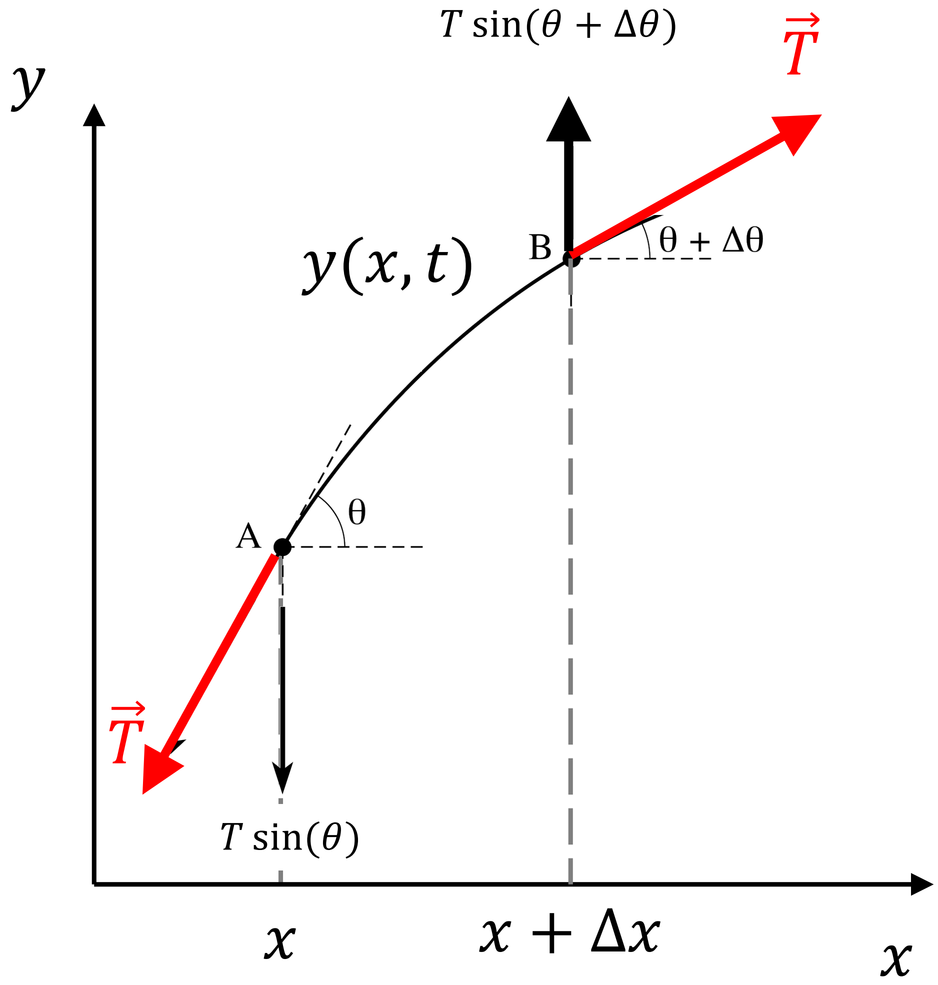
Una onda es una perturbación espacio temporal de una cantidad física con cierta periodicidad con la capacidad de transferir energía al propagarse.

- **Ondas transversales**: La perturbación es perpendicular al sentido de propagación de la onda (onda en una cuerda, ondas electromagnéticas, etc)
- **Ondas longitudinales**: La perturbación se da en la misma dirección que la propagación de la onda (ondas sonoras)

Ondas mecánicas transversales: cuerda

Ondas en una cuerda

- Cuerda de densidad de masa μ por unidad de distancia.
- Sometida a una tensión $\vec{T}$
- $\vec{T}$ es tangente a la forma de la cuerda
- Forma de la cuerda en un instante dado es $y(x)$
- Inextensible (el módulo de la tensión T es el mismo en toda la cuerda).
- Consideremos un tramo de la cuerda entre los puntos A y B (entre x y $x + \Delta x$).



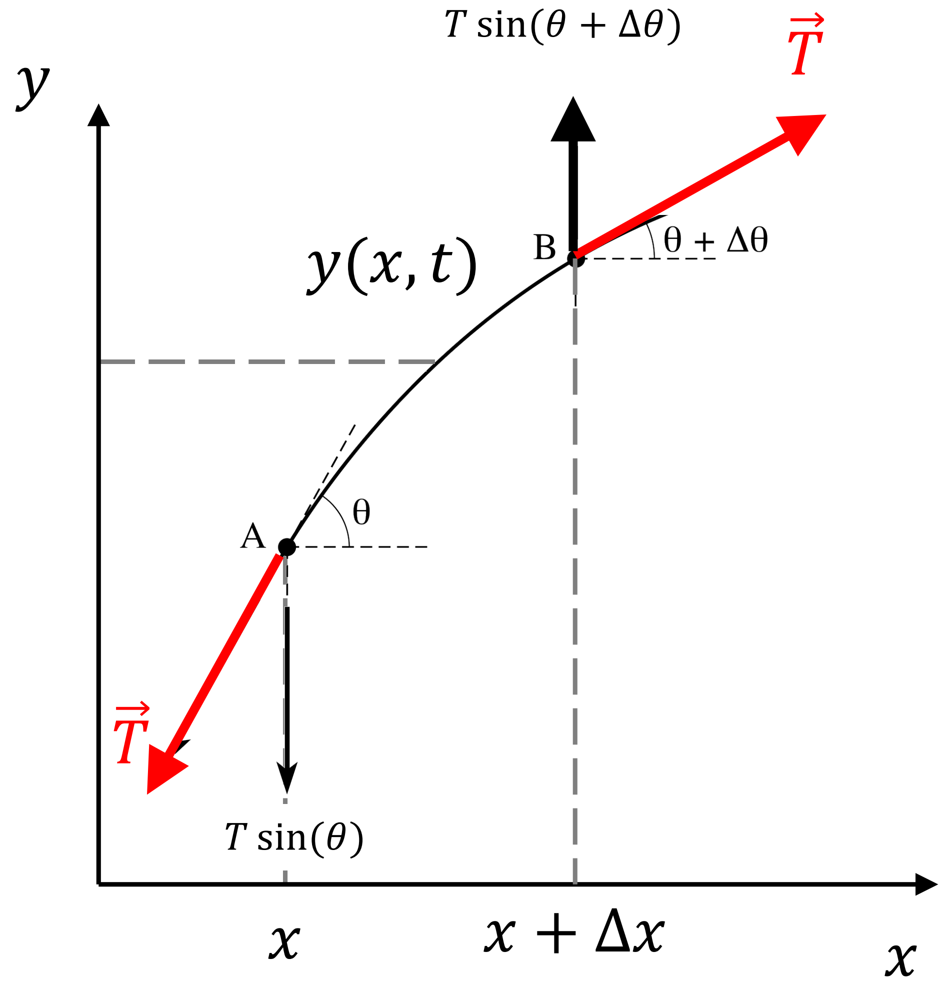
Ondas en una cuerda

- Consideremos ahora movimiento en la componente y.

$$F_y = -T\sin\theta + T\sin(\theta + \Delta\theta)$$

- Si llamamos ΔL al largo del segmento, por segunda ley de Newton tenemos:

$$\mu\,\Delta L\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T\sin\theta + T\sin(\theta + \Delta\theta)$$



Ondas en una cuerda

- Para pequeños apartamientos (Δy y θ pequeños)

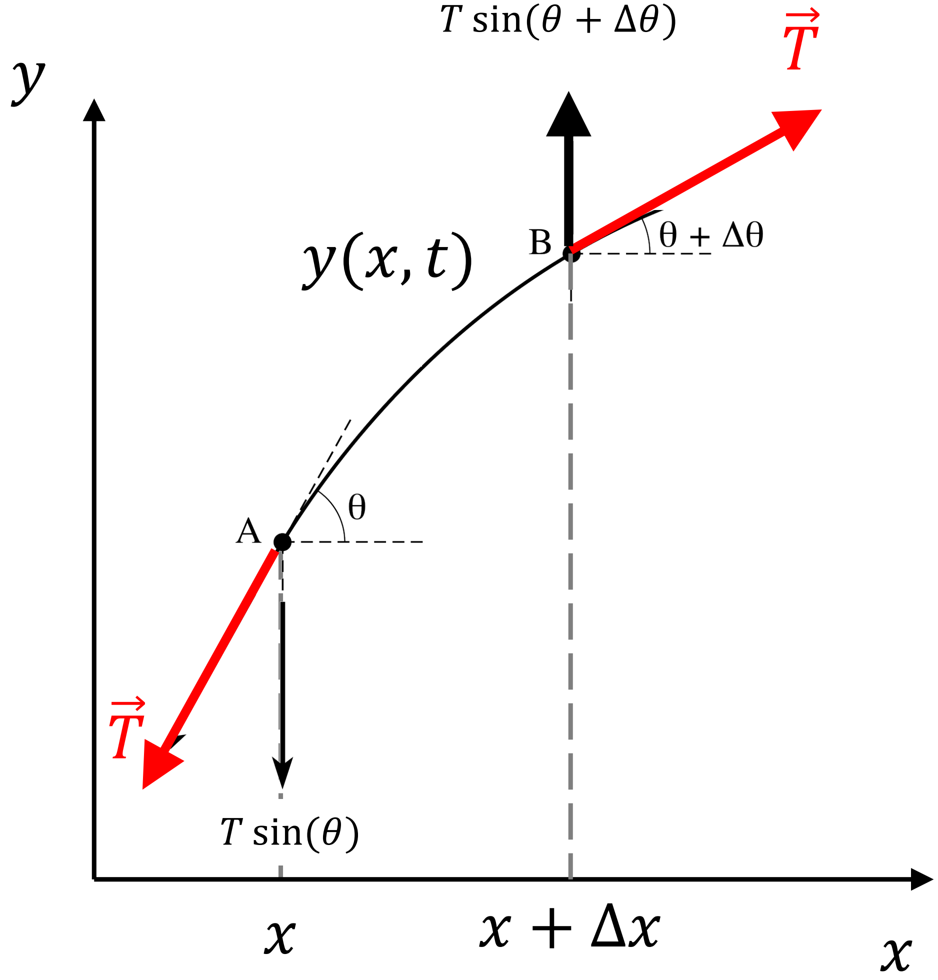
$$\Delta L \cong \Delta x$$
$$\sin\theta \cong \tan\theta \cong \theta$$

- Entonces

$$\mu\,\Delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T\theta + T(\theta + \Delta\theta) = T\Delta\theta$$

- Hagamos ahora tender $\Delta x \to 0$

$$\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$



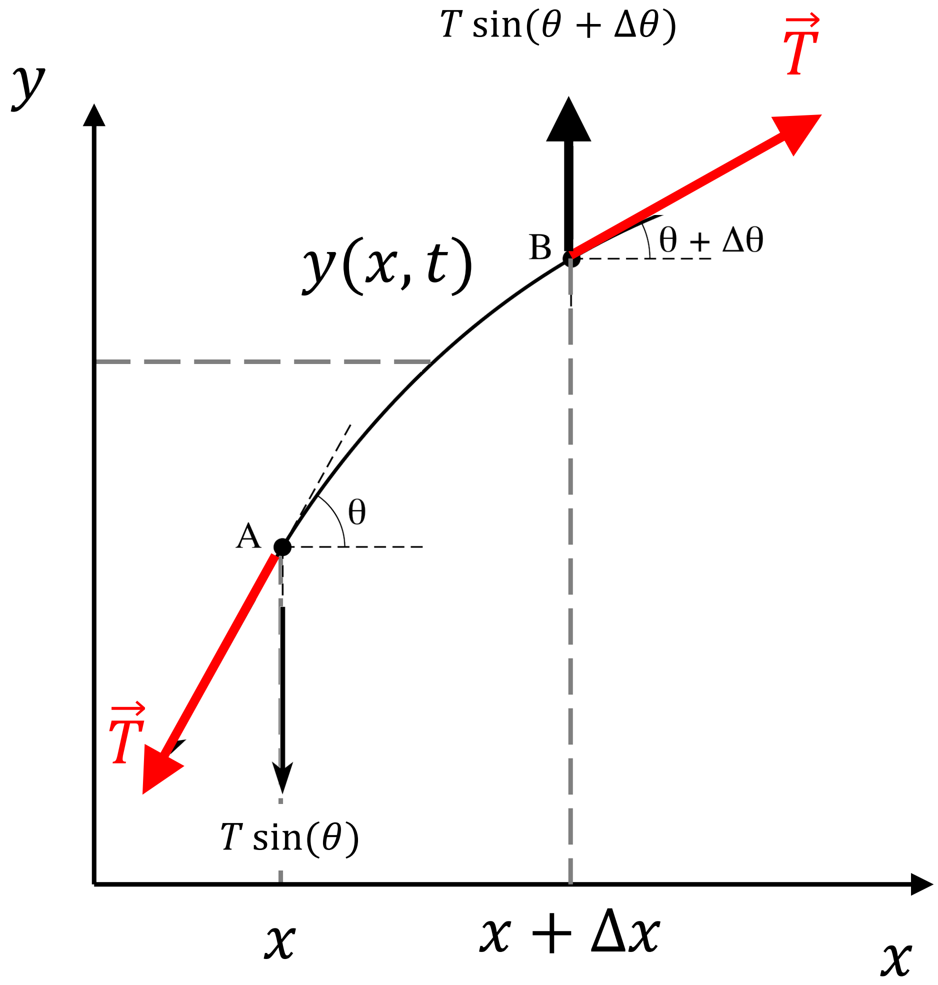
Ondas en una cuerda

- Derivando respecto a x tenemos

$$\frac{\partial \tan\theta}{\partial x} = \frac{1}{(\cos\theta)^2}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Para $\theta \cong 0$, $(\cos\theta)^2 \cong 1$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



Ondas en una cuerda

- Entonces, retomando, tenemos

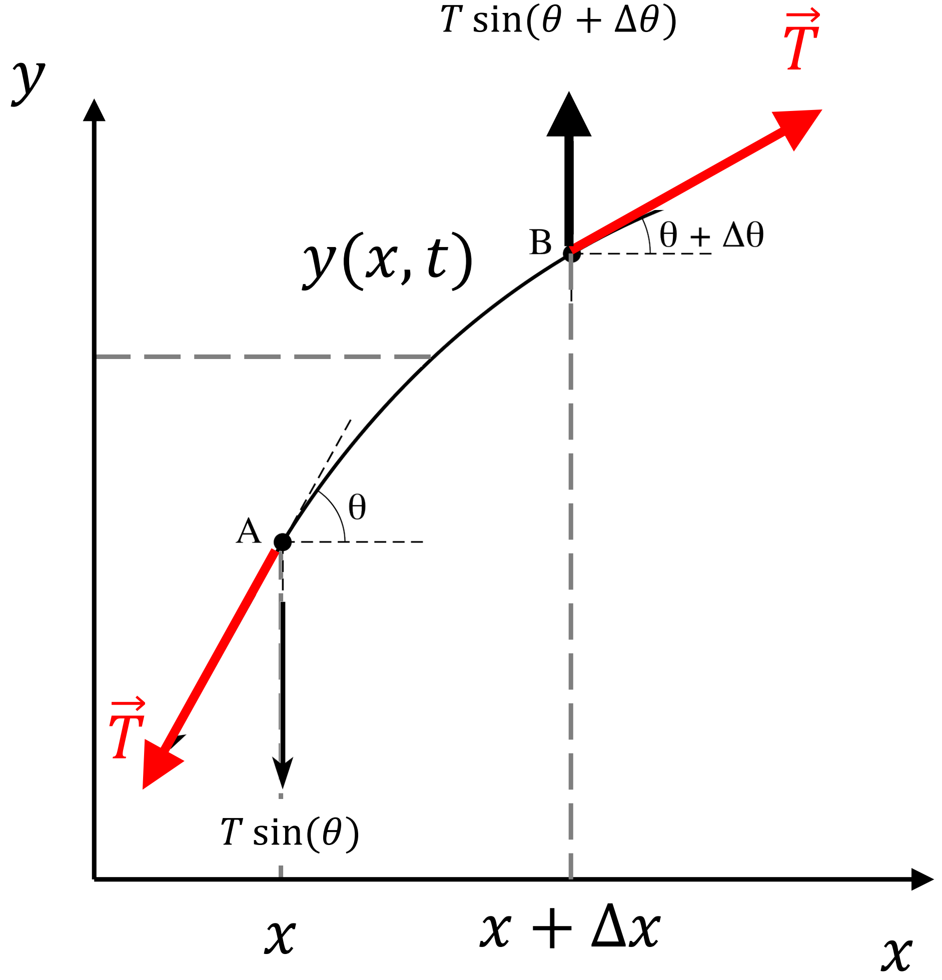
$$\mu\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T d\theta$$

- Divido por dx (que no nos vea unx matemáticx)

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

- y reemplazo $\frac{\partial \theta}{\partial x}$:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



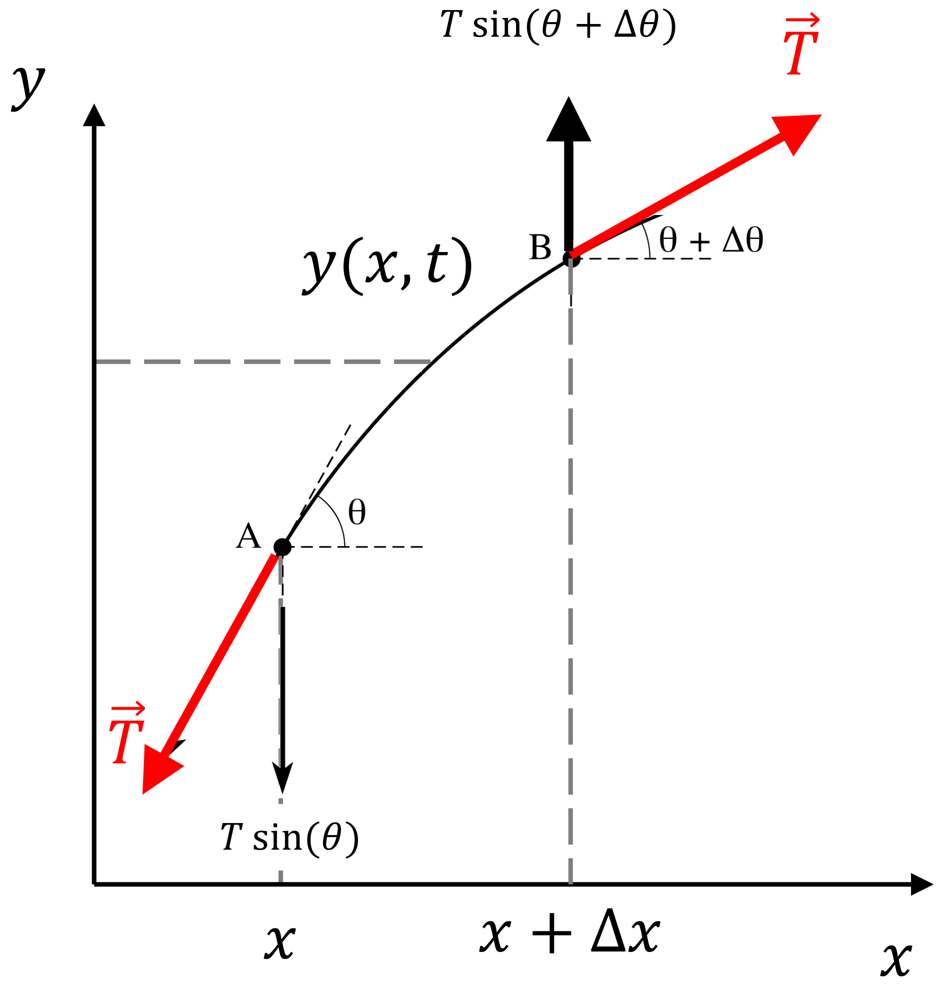
Ondas en una cuerda

- Tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- $\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ tiene unidades de inversa de la velocidad, entonces, tomando una velocidad v tal que

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



Ondas en una cuerda

- Tenemos la **ecuación de onda** unidimensional

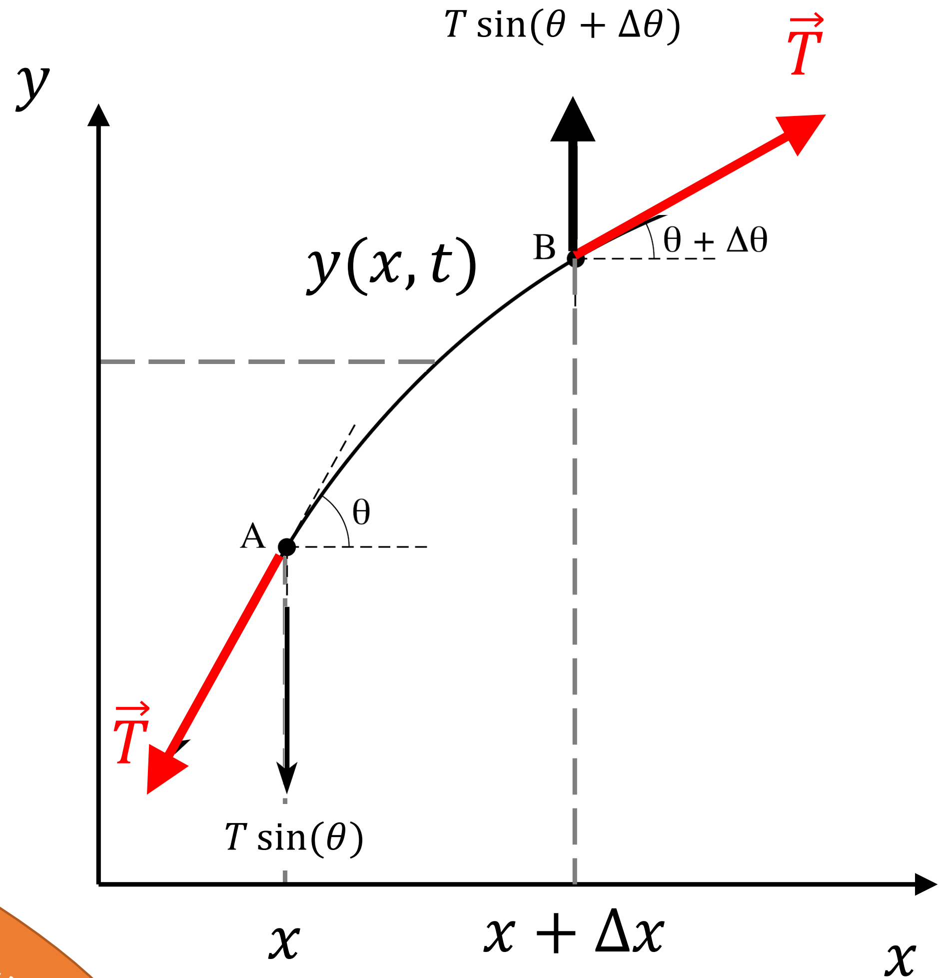
$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Ecuación fundamental, presente en muchas áreas de la física

Mecánica de Fluidos

Electromagnetismo

Mecánica Cuántica



Ecuación de onda

- La ecuación de onda

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Tiene como solución cualquier función $\mathrm{y} = f(x,t)$ del tipo

$$y(x,t) = f(x,t) = f(x \pm vt)$$

- Como es **lineal**, una combinación lineal de soluciones también es una solución.

Velocidad de fase

- En la ecuación de onda, v es la velocidad a la que cambia el argumento de f (lo que está entre paréntesis) es decir, la fase de la oscilación.

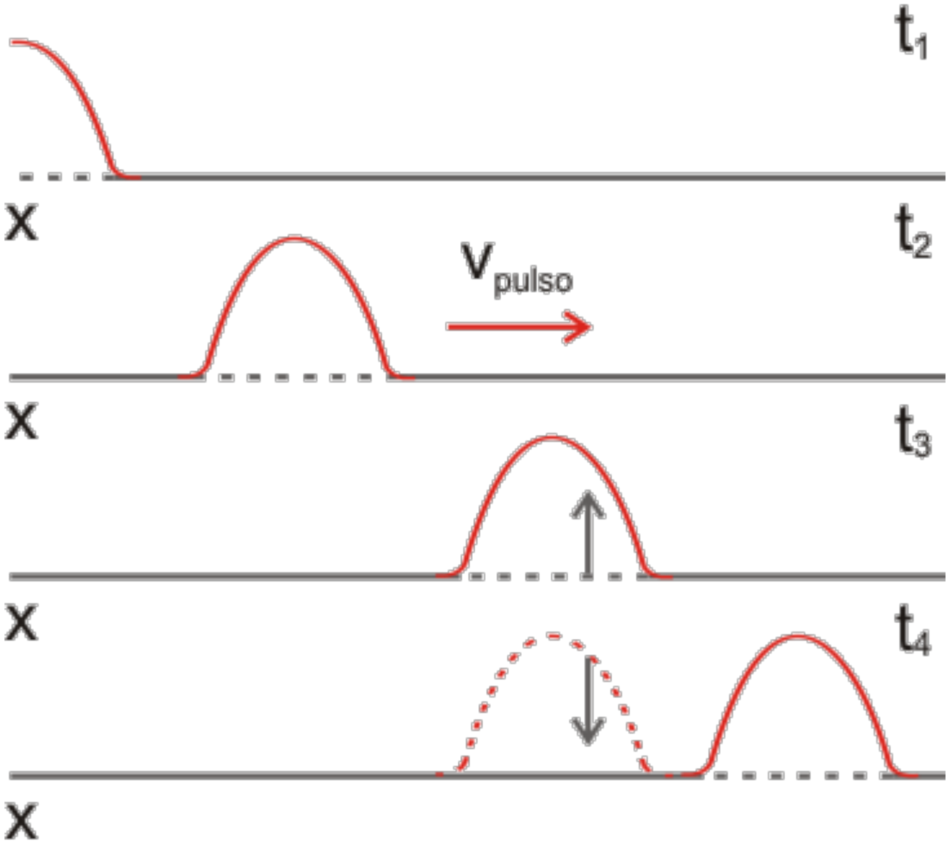
- Se denomina velocidad de fase.

- Tanto $+v$ como $-v$ son válidas en la ecuación de onda

- En el caso de la cuerda, reemplazar $f(x \pm vt)$ en la ecuación de onda nos da:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Signos de v en un pulso $f(x \pm vt)$



Si $v > 0$

$$\boxed{y = f(x \pm vt)}$$

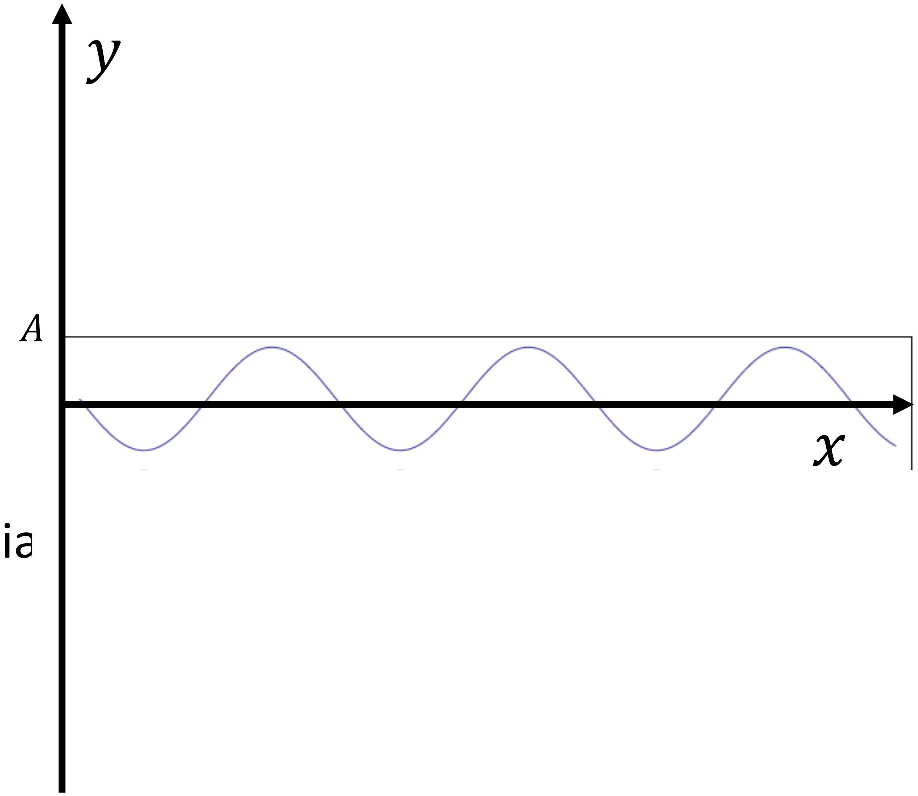
$-$ $\longrightarrow$ propagación de izda a dcha

$+$ $\longleftarrow$ propagación de dcha a izda

Ejercicio

- Pensá y escribí una función solución de la ecuación de onda

Ondas viajeras sinusoidales



- Una de las soluciones de la ecuación de onda es la función:

$$f(x,t) = A\ \cos(kx - \omega t)$$

- Moviendo el extremo de la cuerda de arriba hacia abajo con una frecuencia angular ω la puedo generar (también le doy amplitud A)

- Viaja hacia la derecha con velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Ondas viajeras sinusoidales

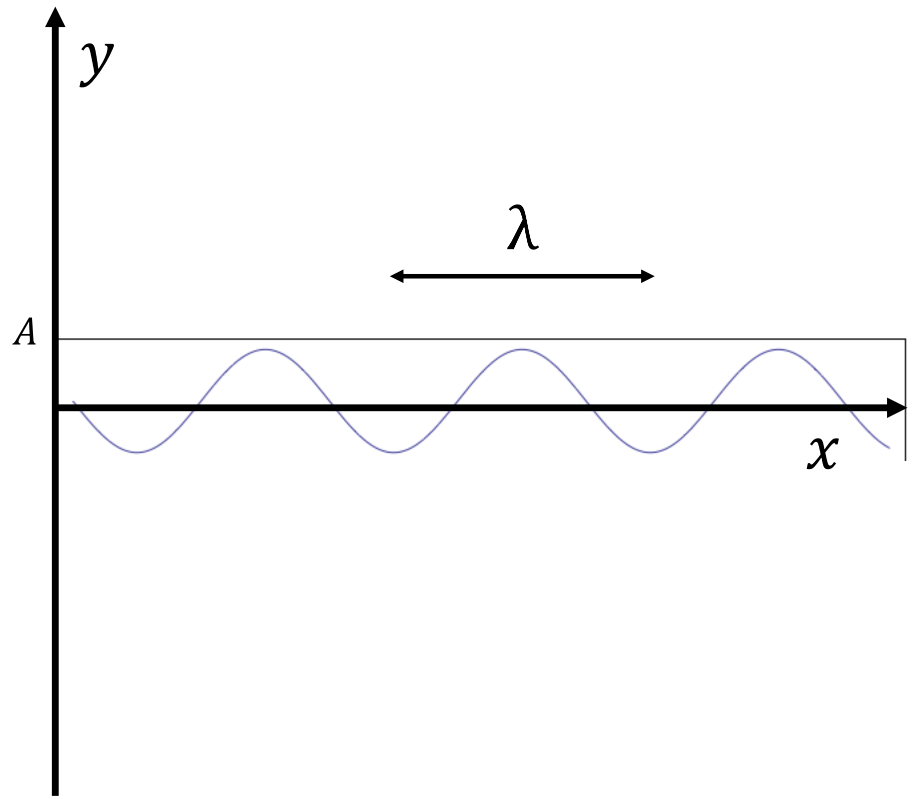
- Si sacamos una foto de la cuerda a un instante dado t_0, la forma de la onda es:

$$f(x, t_0) = A\ \cos(kx - \omega t_0)$$

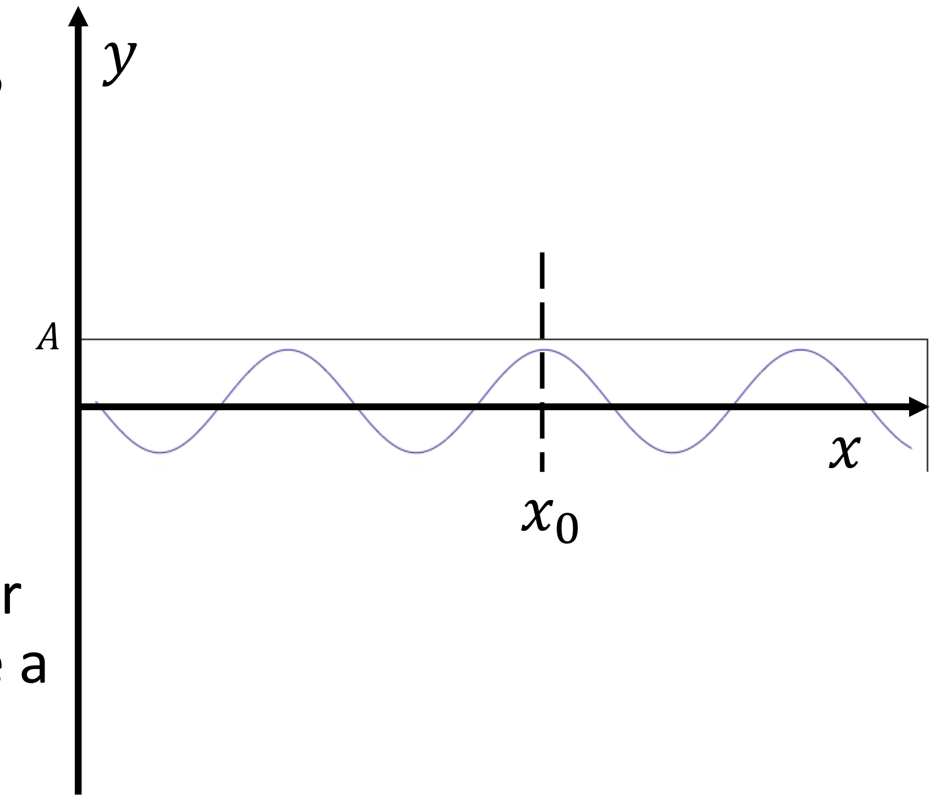
- Es fácil ver que esta forma se repite cada distancia λ tal que

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- A λ se la denomina longitud de onda y k se denomina numero de onda



Ondas viajeras sinusoidales



- Si ahora nos paramos a una distancia x_0

$$f(x_0, t) = A\ \cos(kx_0 - \omega t)$$

- Vemos el punto d ela cuerda subir y bajar con frecuencia ω. La oscilación se vuelve a repetir al cabo de un período τ tal que

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ondas viajeras sinusoidales

- Es facil ver reemplazando en la ecuación o sacando factor común k que

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\omega}{k}$$

Ecuación de dispersión de la onda

- En este caso, v no depende de ω ni de k y estas se acomodan de manera de siempre cumplir con la ec. de dispersión.
- En este caso la velocidad de fase es igual la velocidad con la que se propaga la energía (cinética) a lo largo de la cuerda.

Reflexión, transmisión e impedancia

La velocidad de fase depende solo de la tensión y de la densidad de masa

Cuerda inhomogénea: condición de contorno

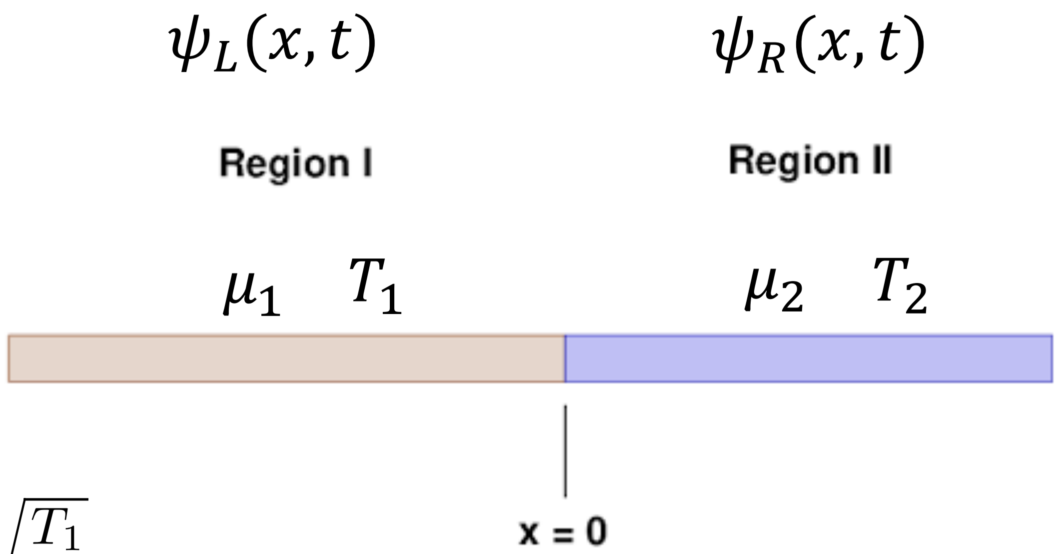
- Dos cuerdas de distinta densidad de masa unidas en $x = 0$
- De un lado y el otro

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \psi_L(x,t), & x < 0 \\ \psi_R(x,t), & x \geqslant 0 \end{cases}$$

- Donde:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\psi_L(x,t) = 0, \quad v_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\psi_R(x,t) = 0, \quad v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{\mu_2}}$$



Cuerda inhomogénea: condición de contorno

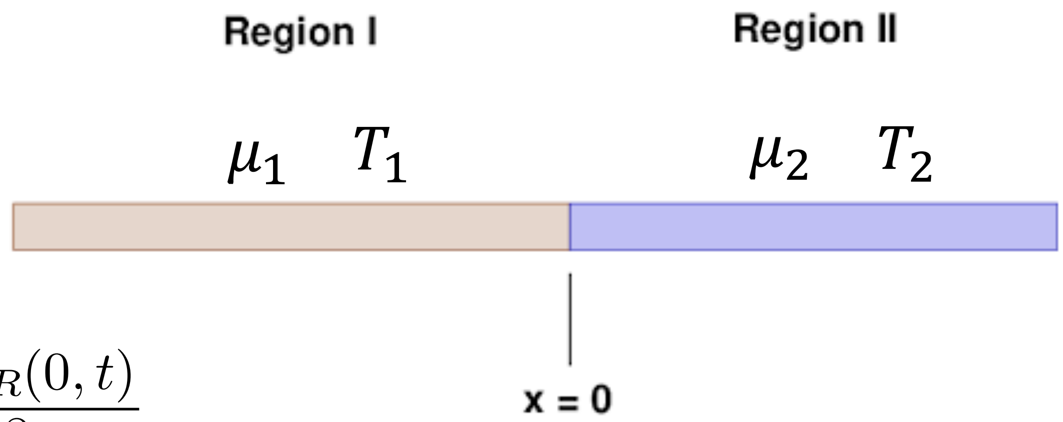
- Necesitamos que haya continuidad en $x = 0$

$$\boxed{\psi_L(0,t) = \psi_R(0,t)}$$

- Para un pedacito de cuerda de largo Δx en $x = 0$ la ecuación de movimiento da:

$$\mu \Delta x \frac{\partial \psi(0,t)}{\partial t^2} = T_1 \frac{\partial \psi_L(0,t)}{\partial x} - T_2 \frac{\partial \psi_R(0,t)}{\partial x}$$

- Es decir, que si no hay pendiente no hay fuerza



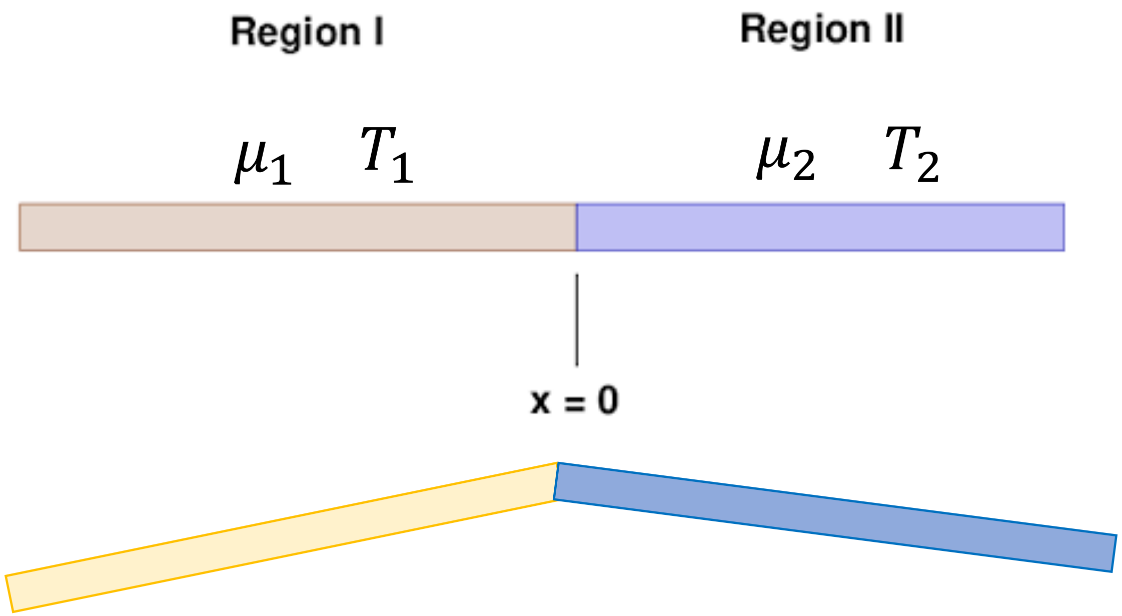
Cuerda inhomogénea: condición de contorno

- Tomando $\Delta x \to 0$ nos queda

$$\boxed{T_1 \frac{\partial \psi_L(0,t)}{\partial x} = T_2 \frac{\partial \psi_R(0,t)}{\partial x}}$$

- Es decir, la pendiente de la cuerda en $x = 0$ medida desde el lado derecho (R) y del lado izquierdo no deben coincidir a menos que las tensiones sean las mismas

- Esta es la condición de contorno para el problema



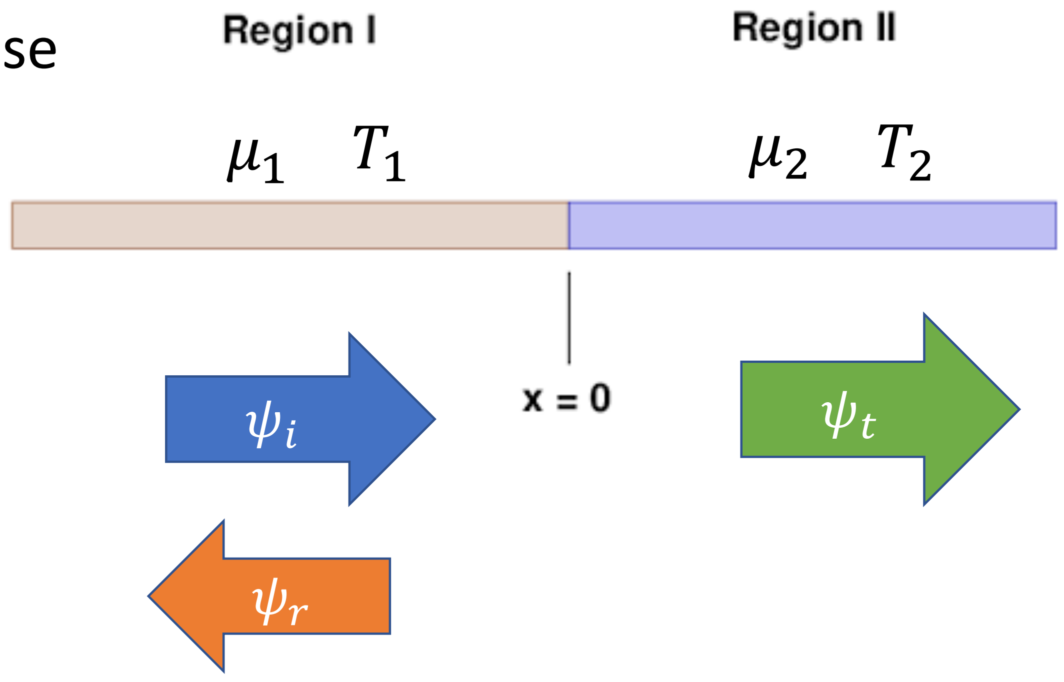
Cuerda inhomogénea: solución del problema

- En el lado izquierdo (L) supongamos que tenemos una perturbación que viene de la derecha (incidente) y la perturbación reflejada en la interfase en $x = 0$.

$$\psi_L(x,t) = \psi_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + \psi_r\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$$

- En el lado derecho queda la onda transmitida

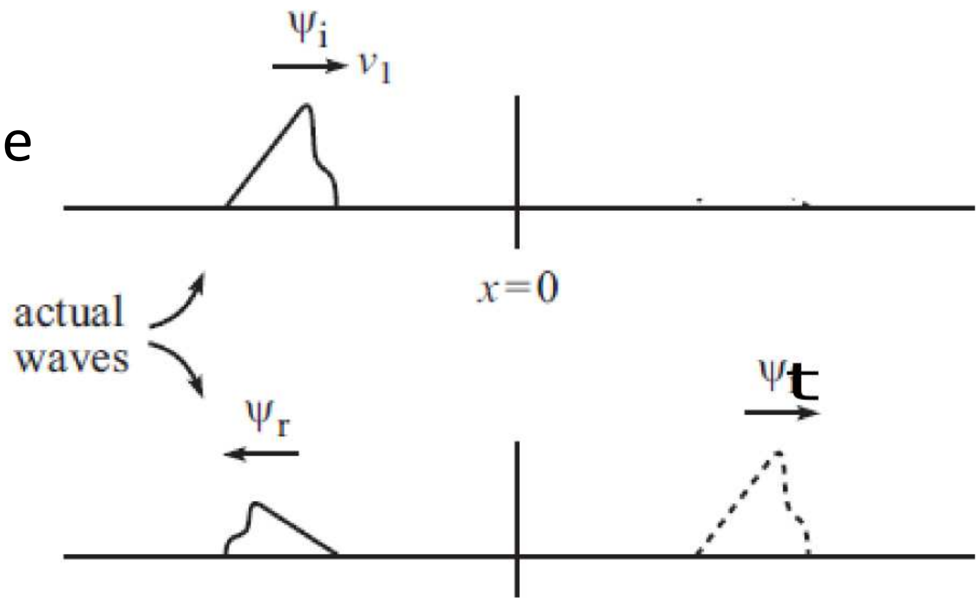
$$\psi_R(x,t) = \psi_t\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$



Cuerda inhomogénea: solución del problema

- En el lado izquierdo (L) supongamos que tenemos una perturbación que viene de la derecha (incidente) y la perturbación reflejada en la interfase en $x = 0$.

$$\psi_L(x,t) = \psi_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + \psi_r\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$$



- En el lado derecho queda la onda transmitida

$$\psi_R(x,t) = \psi_t\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$

Coeficientes de transmision y reflexión

- Por continuidad tenemos en x=0

$$\psi_i(t) + \psi_r(t) = \psi_t(t)$$

- La condición de contorno de salto de la pendiente implica por un lado

$$T_1 \frac{\partial \psi_L(0,t)}{\partial x} = T_1 \frac{\partial}{\partial x}\left[\psi_i\left(t - \frac{x}{v_1} \right) + \psi_r\left(t + \frac{x}{v_1} \right) \right]_{x=0}$$

- Esto equivale a escribir

$$\frac{T_1}{v_1}[-\psi_i'(t) + \psi_r'(t)]$$

como si la derivada fuera en t

Coeficientes de transmision y reflexión

- Apliquemos el mismo razonamiento a la onda transmitida:

$$T_2 \frac{\partial \psi_R(0,t)}{\partial x} = T_2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\psi_t\left(t - \frac{x}{v_2}\right)\right]_{x=0} = -\frac{T_2}{v_2}\psi_t'(t)$$

- Entonces:

$$\frac{T_1}{v_1}[-\psi_i'(t) + \psi_r'(t)] = -\frac{T_2}{v_2}\psi_t'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{T_1}{v_1}\psi_i(t) + \frac{T_1}{v_1}\psi_r(t) + \frac{T_2}{v_2}\psi_t(t)\right] = 0$$

Coeficientes de transmision y reflexión

- Esto quiere decir que si la derivada es nula

$$\frac{T_1}{v_1}[-\psi_i(t) + \psi_r(t)] = -\frac{T_2}{v_2}\psi_t(t) + \mathrm{const}$$

- Esa constante debe ser cero si no un desplazamiento no nulo no tiene mucho sentido

$$\frac{T_1}{v_1}[-\psi_i(t) + \psi_r(t)] = -\frac{T_2}{v_2}\psi_t(t) \cdot$$

Coeficientes de transmision y reflexión

- Entonces, reemplazando ψ_t según la ecuación de continuidad

$$\frac{T_1}{v_1}[-\psi_i(t)+\psi_r(t)] = -\frac{T_2}{v_2}[\psi_i(t)+\psi_r(t)]$$

- Y reagrupando términos, tenemos:

$$\left(\frac{T_1}{v_1}+\frac{T_2}{v_2}\right)\psi_r = \left(\frac{T_1}{v_1}-\frac{T_2}{v_2}\right)\psi_i(t)$$

Coeficientes de transmision y reflexión

- Ahora definamos las cantidades

$$Z_1 = \frac{T_1}{v_1}, \qquad Z_2 = \frac{T_2}{v_2}$$

- Entonces, la relación anterior implica que:

$$\boxed{\psi_r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\psi_i}$$

$$\boxed{\psi_t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\psi_i}$$

Coeficientes de transmision y reflexión

- Por otro lado, como

$$\frac{T_1}{v_1}[-\psi_i(t) + \psi_r(t)] = -\frac{T_2}{v_2}\psi_t(t) \cdot$$

- Tenemos

$$\boxed{\psi_t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\psi_i}$$

Coeficientes de transmision y reflexión

- En otras palabras, quedaron definidos los coeficientes de transmisión T y reflexión R tales que las ondas reflejada y transmitida quedan en función de la incidente:

$$\psi_r = R\psi_i, \qquad \psi_t = T\psi_i$$

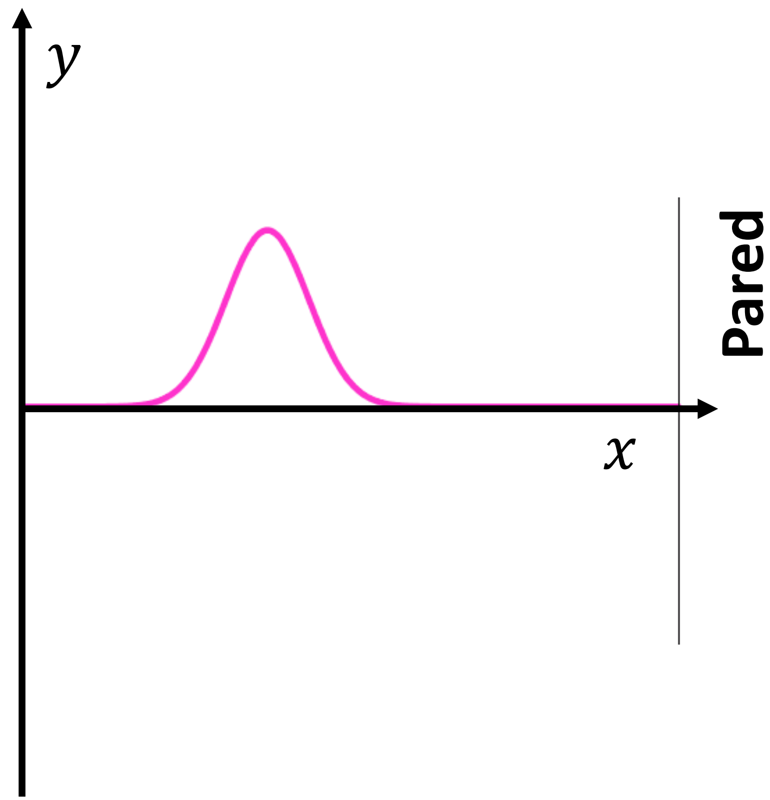
- R y T quedan definidas a partir de las impedancias Z_1 y Z_2:

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T = \frac{2\,Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Condiciones de contorno: extremo fijo

- Experimento: Fijamos un extremo de la cuerda de una pared (condición de extremo fijo).
- Esto quiere decir que en la pared, siempre:
  - $y = constante,$
  - En particular $y = 0$
- Notamos que pulso se 'refleja' y vuelve con la amplitud invertida.
- La pared genera un pulso igual pero opuesto en amplitud y velocidad de modo que $y = 0$ en la pared siempre.

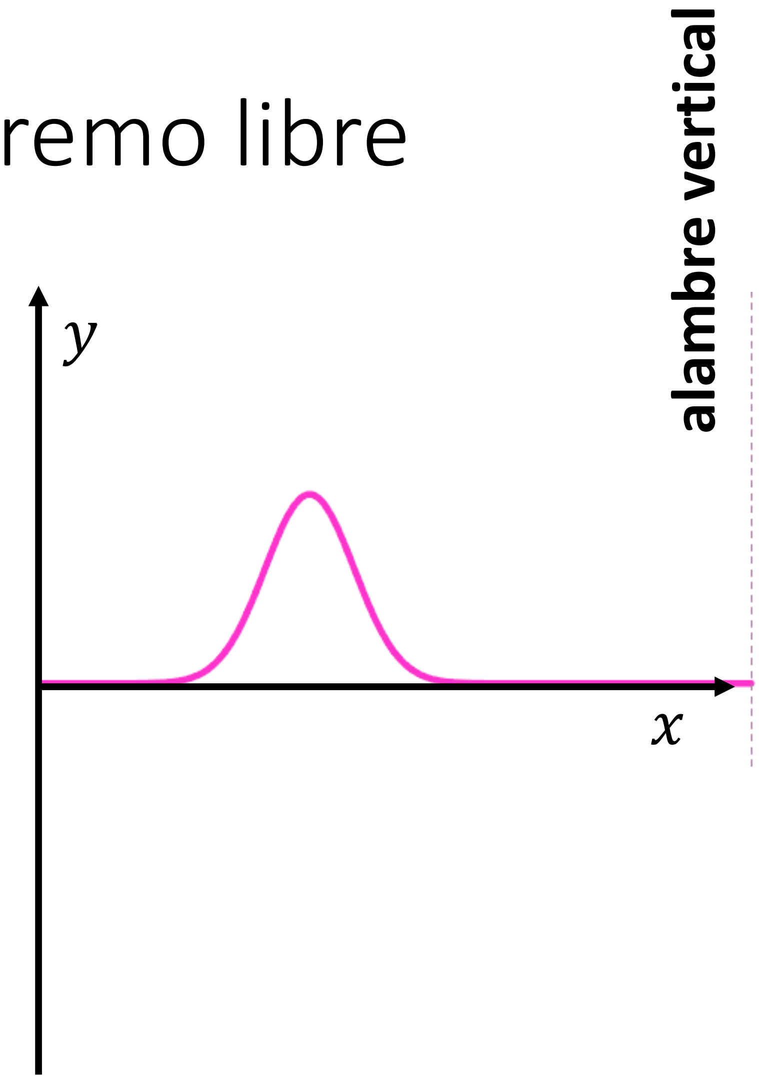


Condiciones de contorno: extremo libre

- Experimento: En un extremo ponemos un anillo angarzado a un alambre vertical sin rozamiento (condición de extremo libre).
- Esto quiere decir que en ese extremo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

- Notamos que pulso se 'refleja' y vuelve con la amplitud sin invertir.
- El alambre genera un pulso igual pero opuesto en velocidad de modo de que $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ en ese extremo.



Ondas estacionarias

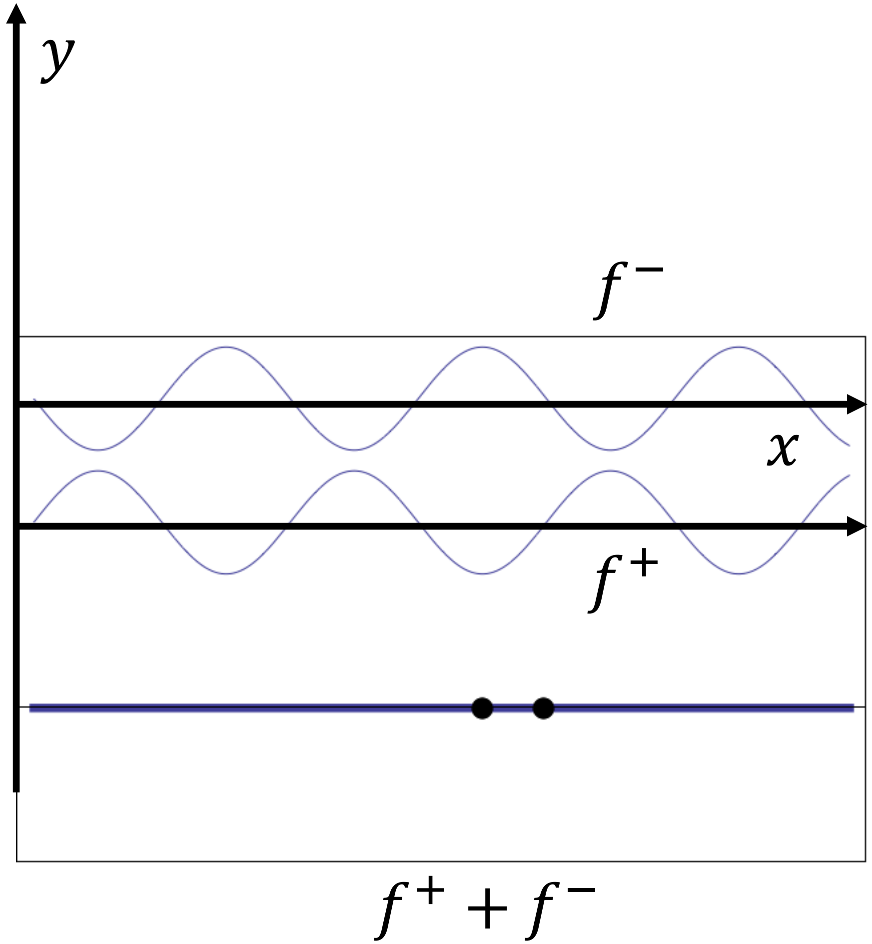
Ondas estacionarias

- Vimos que la ecuación de onda admitía soluciones viajeras en ambos sentidos de propagación.

- Supongamos entonces dos ondas

$$f^{\pm}(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t)$$

- La suma de ambas es también una solución



Ondas estacionarias

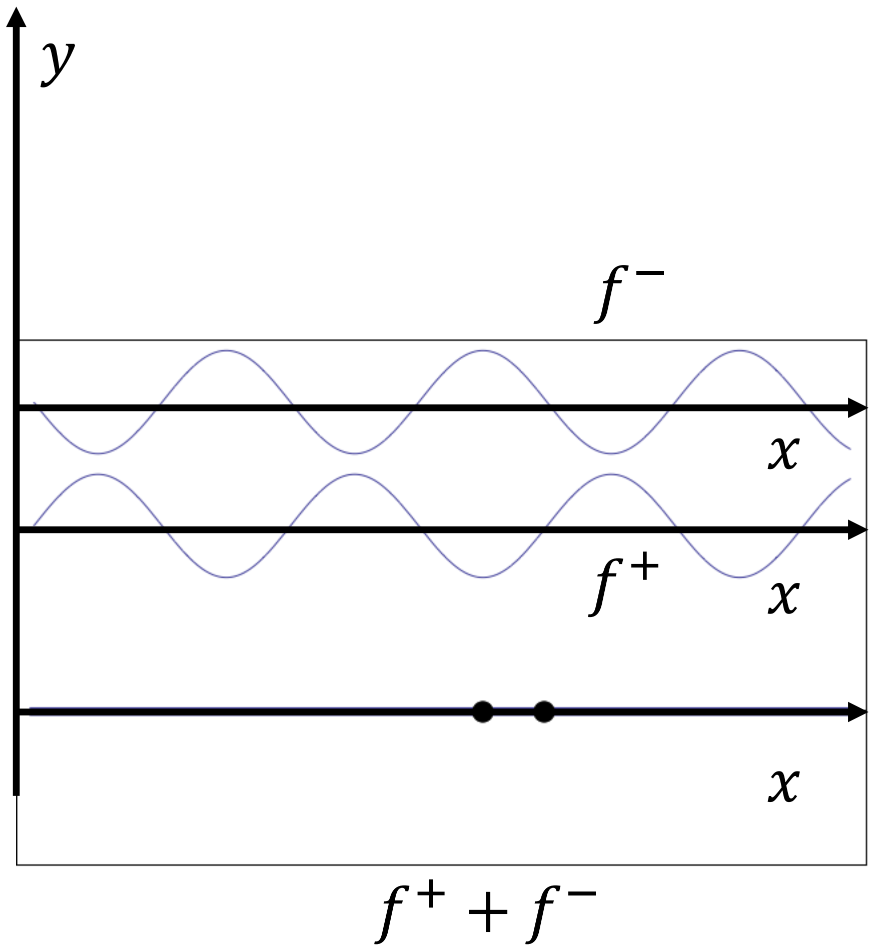
- Sumemos $f^+ + f^-$

$$A(\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)) =$$
$$A(\sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t$$
$$+ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t) =$$

- El resultado da una onda estacionaria

$$f^+ + f^- = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Parte espacial Parte temporal



Ondas estacionarias

- Los nodos son los lugares donde la onda siempre es cero.
- Estos son los valores de x_n tales que:

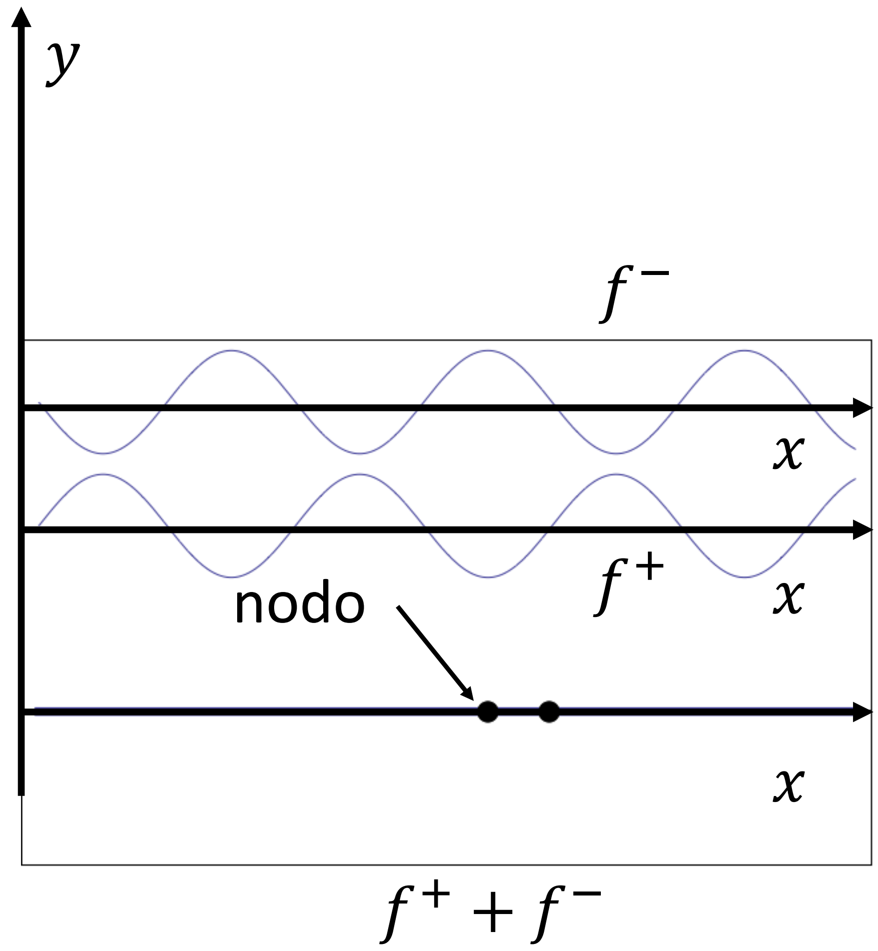
$$\sin kx_n = 0$$

- Esto equivale a que para un n natural o cero

$$kx_n = n\pi$$

- O bien

$$x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}$$



Cuerda con condiciones de contorno

- Vimos que la presencia de una condición de contorno generaba reflexión de ondas.

- Si tenemos una onda sinusoidal en una cuerda de largo L con condiciones de contorno en los extremos seguramente tendremos soluciones estacionarias.

- No nos vamos a preguntar cómo se genera la onda, simplemente de qué modo va a oscilar con las condiciones de contorno establecidas.

Modos normales con 2 extremos fijos

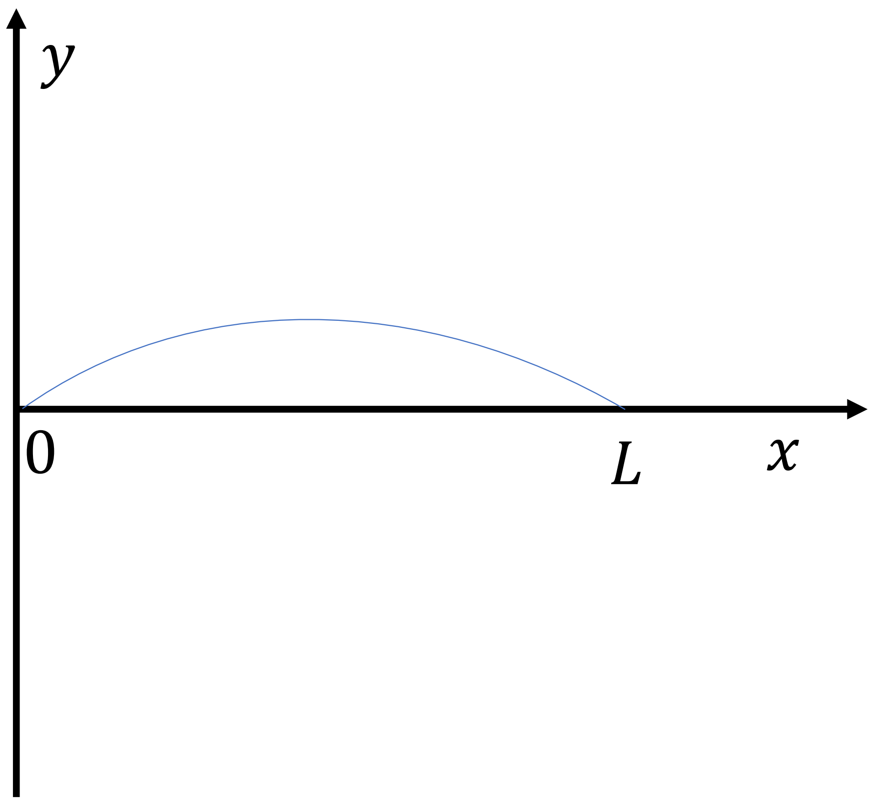
- Veamos una cuerda de largo L con **extremos fijos**

- Las <u>**condiciones de contorno**</u> son:

  <u>**Condición 1:**</u> $y(0,t) = 0$

  <u>**Condición 2:**</u> $y(L,t) = 0$

- Estas condiciones van a hacer que la solución estacionaria tenga **nodos en lugares bien específicos.**



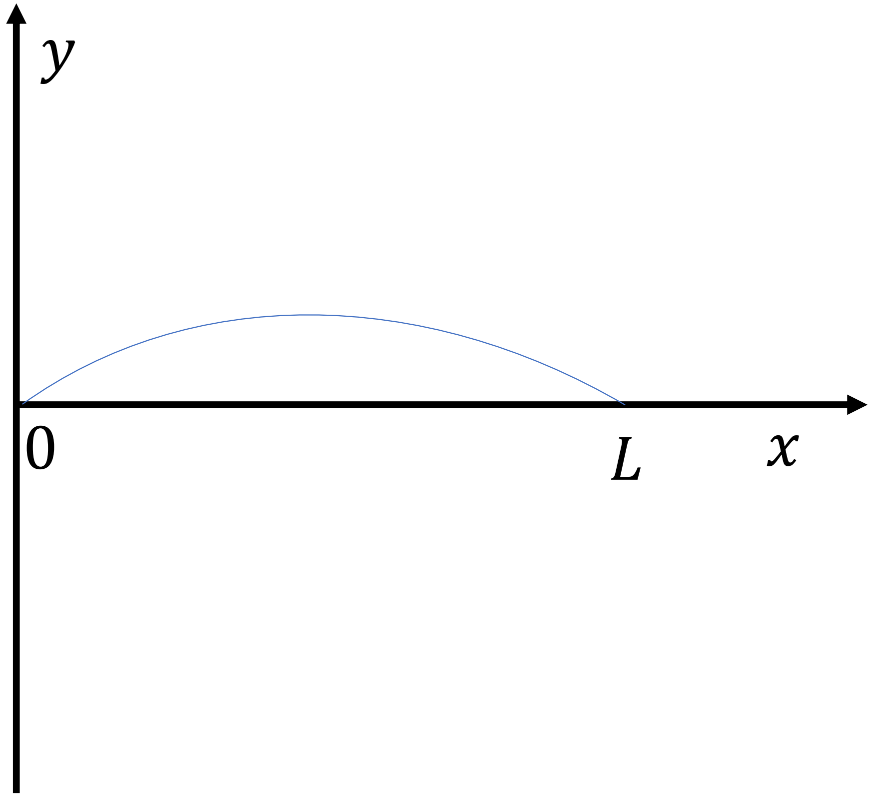
Modos normales con 2 extremos fijos

- Tomemos una solución de tipo estacionaria:

$$y_n(x,t) = A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

- La condición 1 se satisface automáticamente pues:

$$y_n(0,t) = A_n \sin k_n 0 \cos \omega_n t = 0$$



Modos normales con 2 extremos fijos

- La condición 2 pide que:

$$\sin k_n L = 0$$

- Esto implica que, para n natural

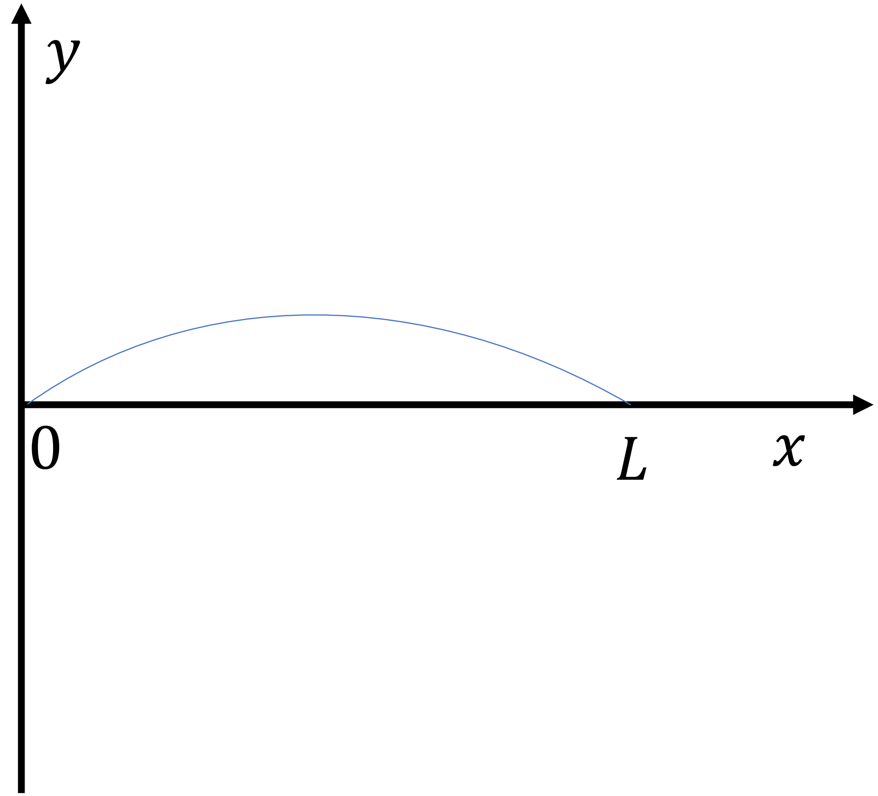
$$k_n L = n\pi$$

luego

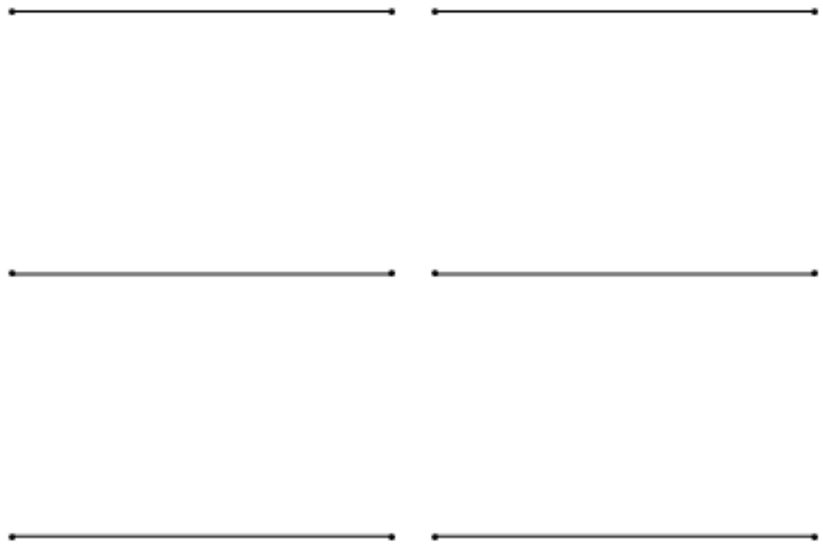
$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

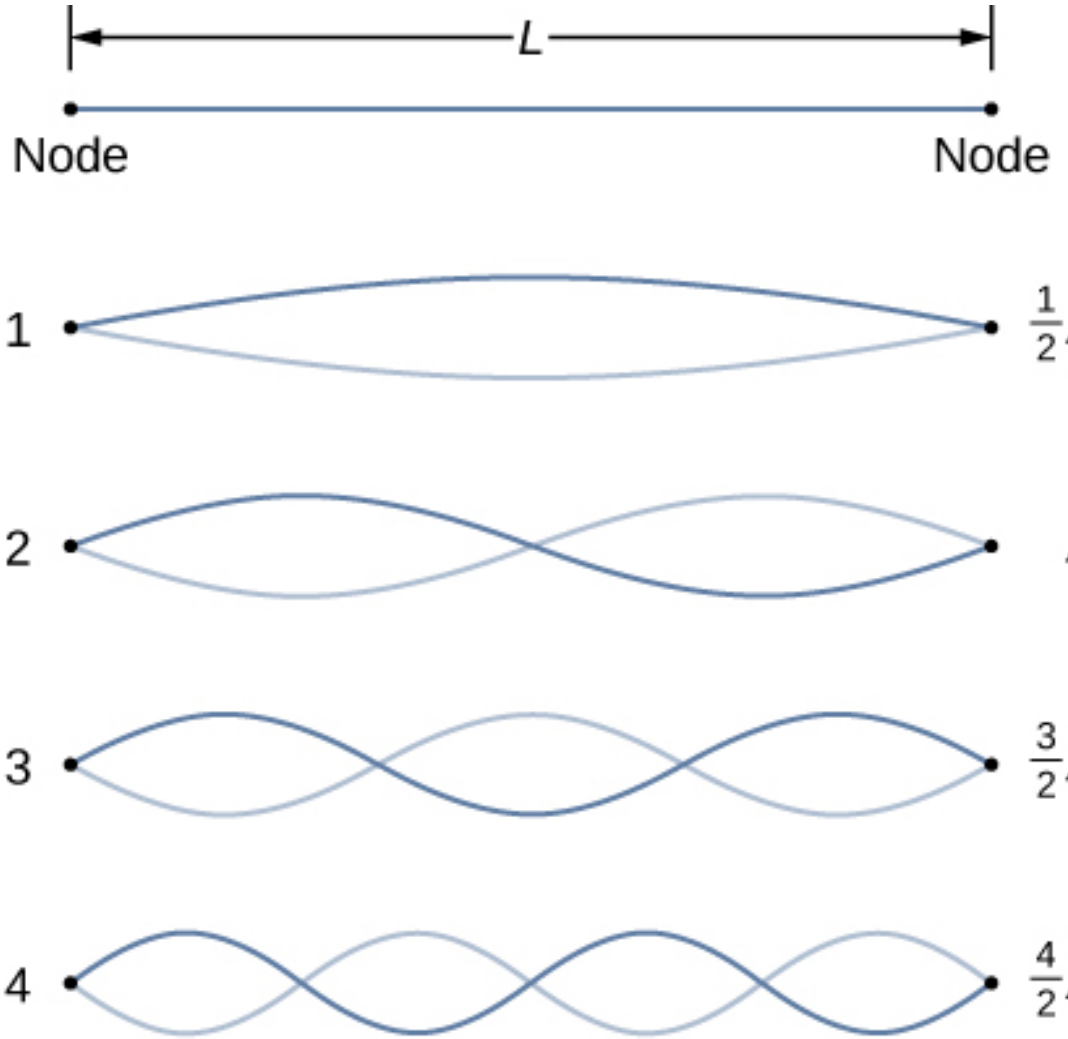
o

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$



Primeros modos normales





Modo fundamental o primer armónico $\quad n = 1 \quad \frac{1}{2}\lambda_1 = L \quad \lambda_1 = \frac{2}{1}L$

segundo armónico $\quad n = 2 \quad \lambda_2 = L \quad \lambda_2 = \frac{2}{2}L$

tercer armónico $\quad n = 3 \quad \frac{3}{2}\lambda_3 = L \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}L$

cuarto armónico $\quad n = 4 \quad \frac{4}{2}\lambda_4 = L \quad \lambda_4 = \frac{2}{4}L$

Estos son los modos naturales de oscilación de una cuerda de largo L $\quad \lambda_n = \frac{2}{n}L \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

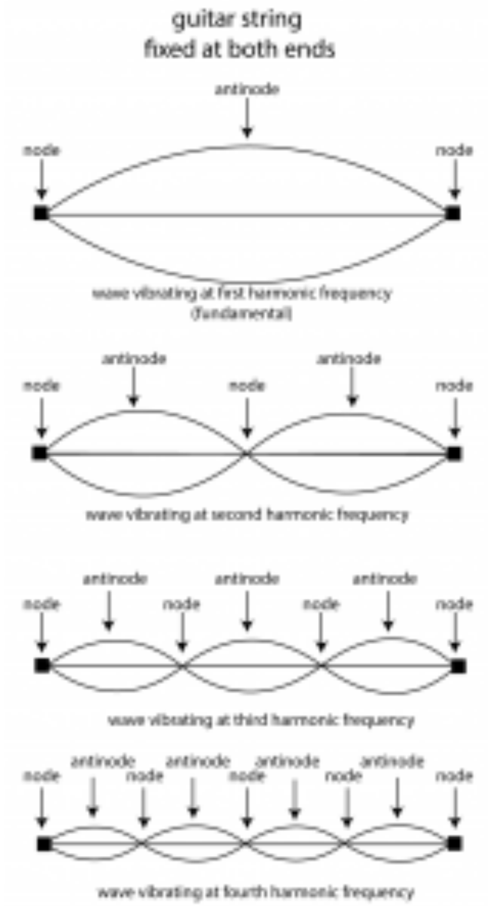
Modos normales con 2 extremos fijos

- Todas son soluciones, por lo tanto **la solución definitiva es la suma de las soluciones para cada valor de $\boldsymbol{n}$**:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

donde $k_n = \frac{n\pi}{L}$ y $\omega_n = v k_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{n\pi}{L}$

Instrumentos de cuerda



John Williams, guitarrista

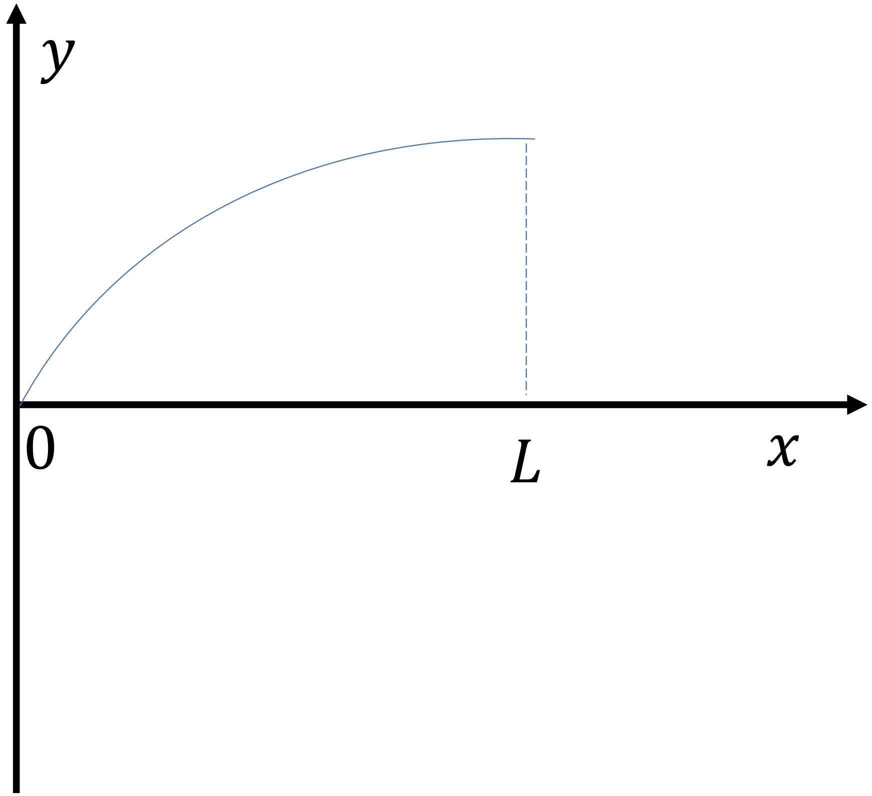
Modos normales condición fijo/libre

- Veamos una cuerda de largo L con condición **fijo / libre**

- Las condiciones de contorno son:

Condición 1: $y(0,t) = 0$

Condición 2: $\dfrac{dy}{dx}(L,t) = 0$



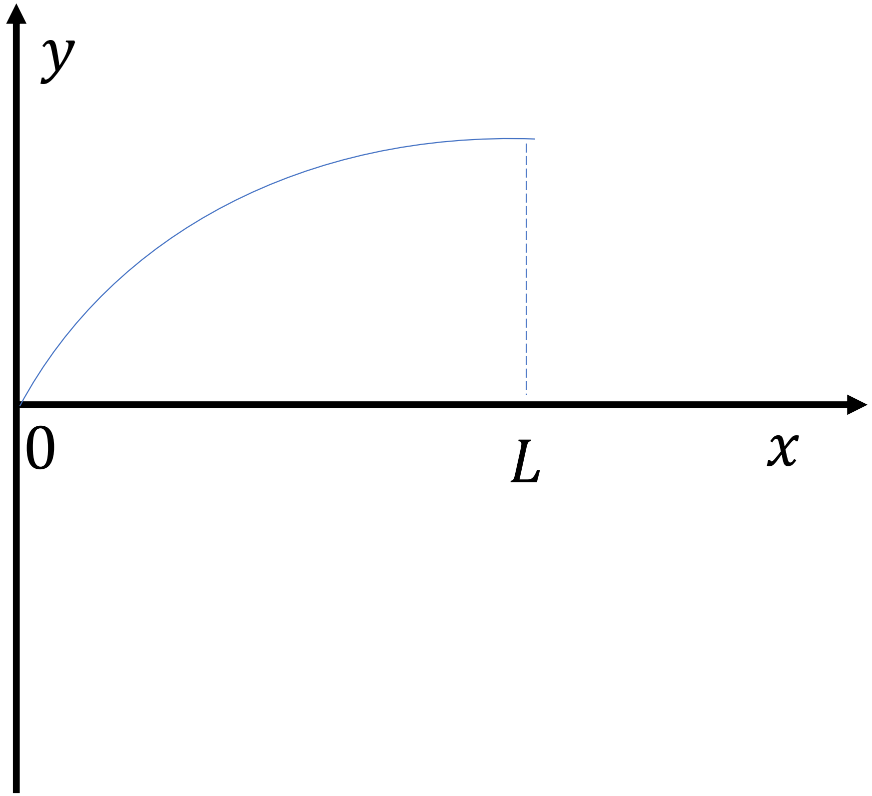
Modos normales condición fijo/libre

- Tomemos una nuevamente una solución de tipo estacionaria:

$$y_n(x,t) = A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

- La condición 1 se satisface automáticamente pues:

$$y_n(0,t) = A_n \sin k_n 0 \cos \omega_n t = 0$$



Modos normales condición fijo/libre

- La condición 2 pide que:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(L,t) = k_n A_n \cos k_n L \cos \omega_n t = 0$$

- Es decir

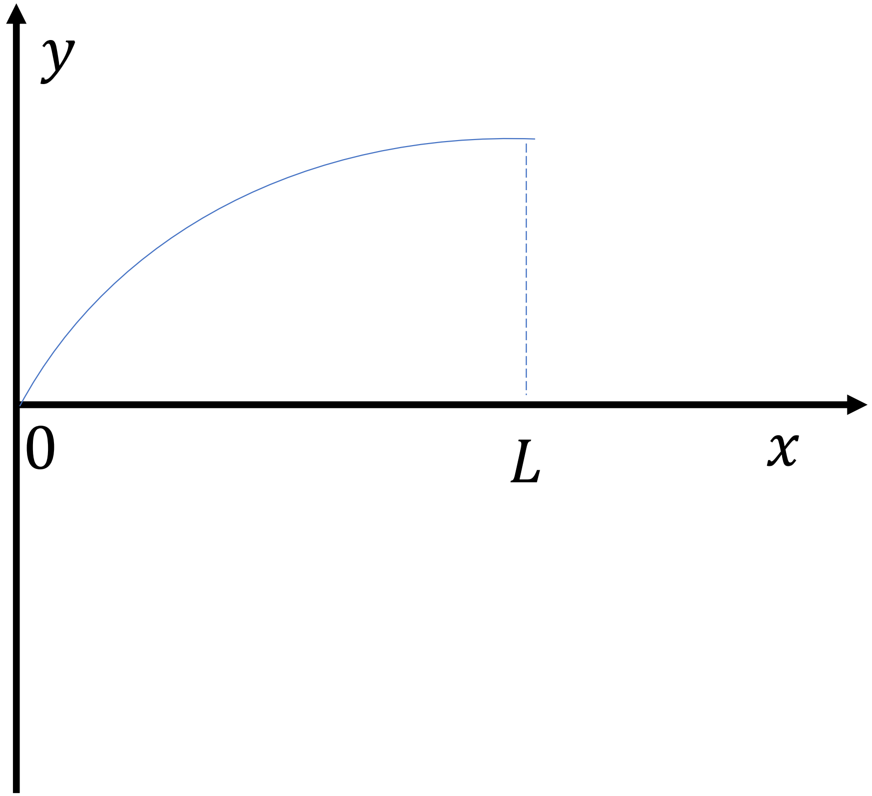
$$\cos k_n L = 0$$

- Esto implica que, para $n = 0, 1, 2, 3\ \ldots$

$$k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi(2n+1)}{2}$$

luego

$$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L}$$



Modos normales condición fijo/libre

- La condición 2 pide que:

$$\frac{dy}{dx}(L,t) = k_n A_n \cos k_n L \cos \omega_n t = 0$$

- Es decir

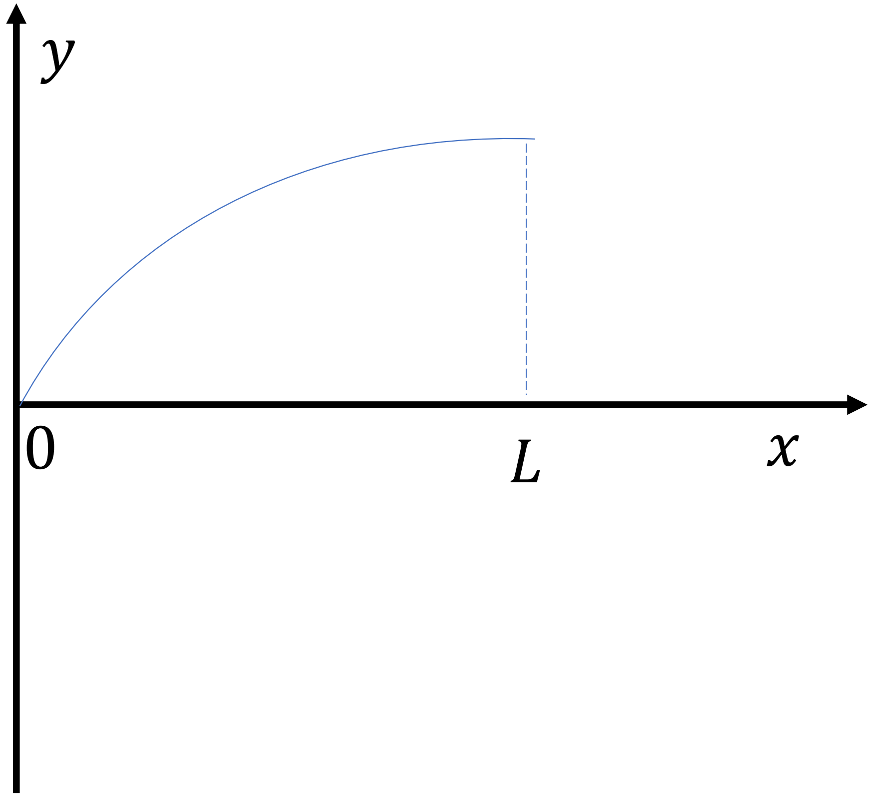
$$\cos k_n L = 0$$

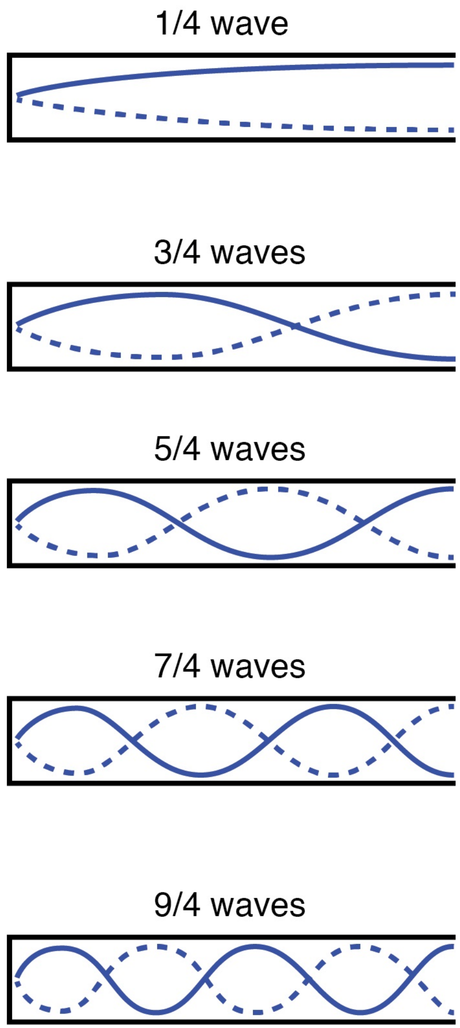
- Esto implica que, para $n = 0, 1, 2, 3$ ...

$$k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi(2n+1)}{2}$$

luego

$$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L}$$





n	$\lambda_n = \frac{4L}{(2n+1)}$
0	$\lambda_0 = 4L$
1	$\lambda_1 = \frac{4L}{3}$
2	$\lambda_2 = \frac{4L}{5}$
3	$\lambda_3 = \frac{4L}{7}$
4	$\lambda_4 = \frac{4L}{9}$

Modos normales con condición fijo/libre

- Todas son soluciones, por lo tanto **la solución definitiva es la suma de las soluciones para cada valor de $\boldsymbol{n}$**:

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

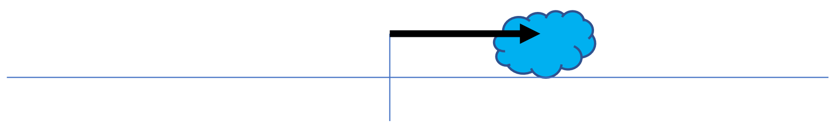
donde $k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L}$ y $\omega_n = v k_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{\pi(2n+1)}{2L}$

Ondas longitudinales

Ondas longitudinales: sonido

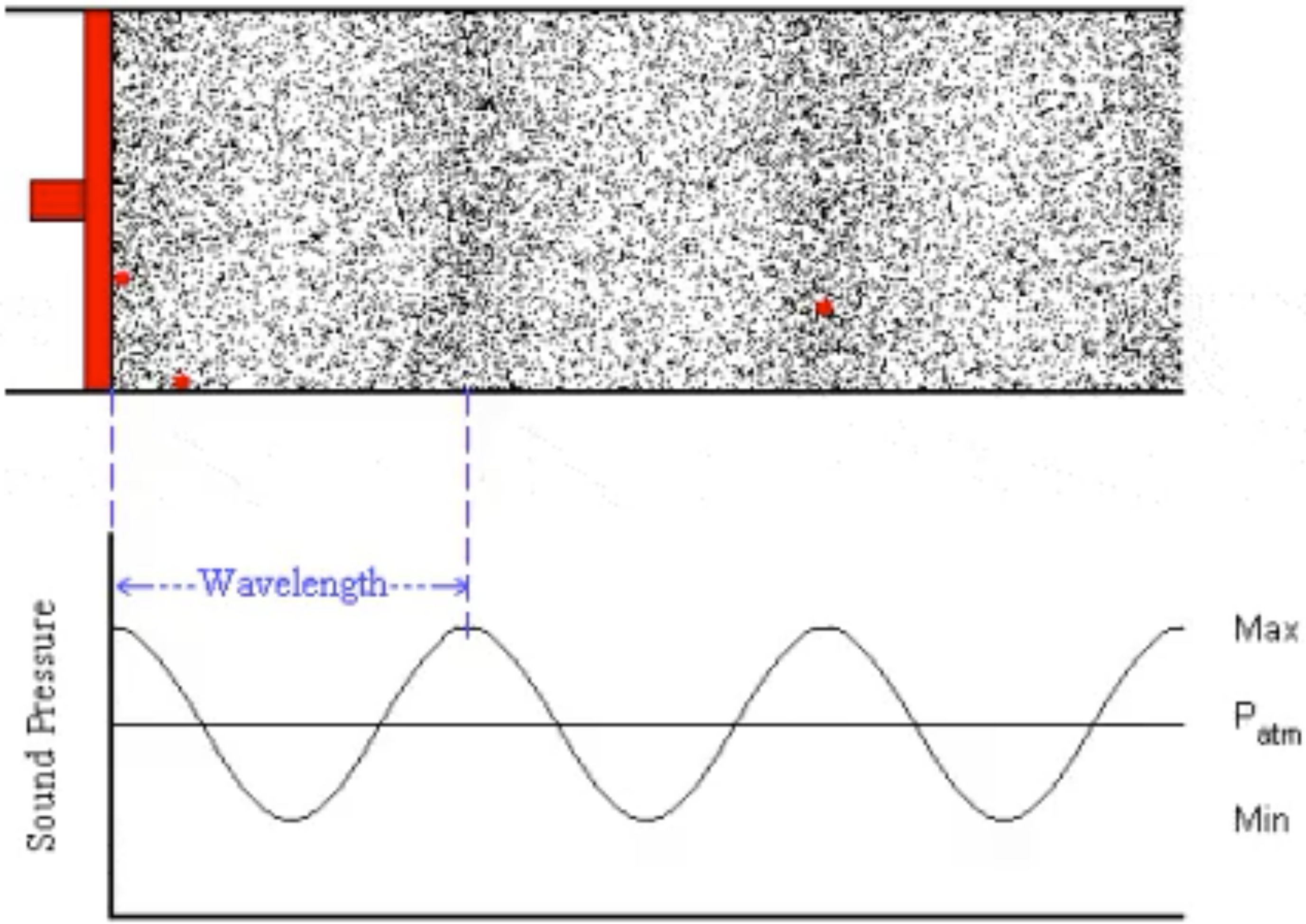
- Las ondas en el aire son como las en un sólido.
- Las moléculas de aire son como pequeñas masas y las fuerzas actúan como pequeños resortes.
- Ya derivamos la ecuación de onda
- En el caso de las ondas sonoras, la cantidad que oscila es el desplazamiento de un pedacito de aire desde su posición de equilibrio $\xi(x,t)$

$\xi(x,t)$



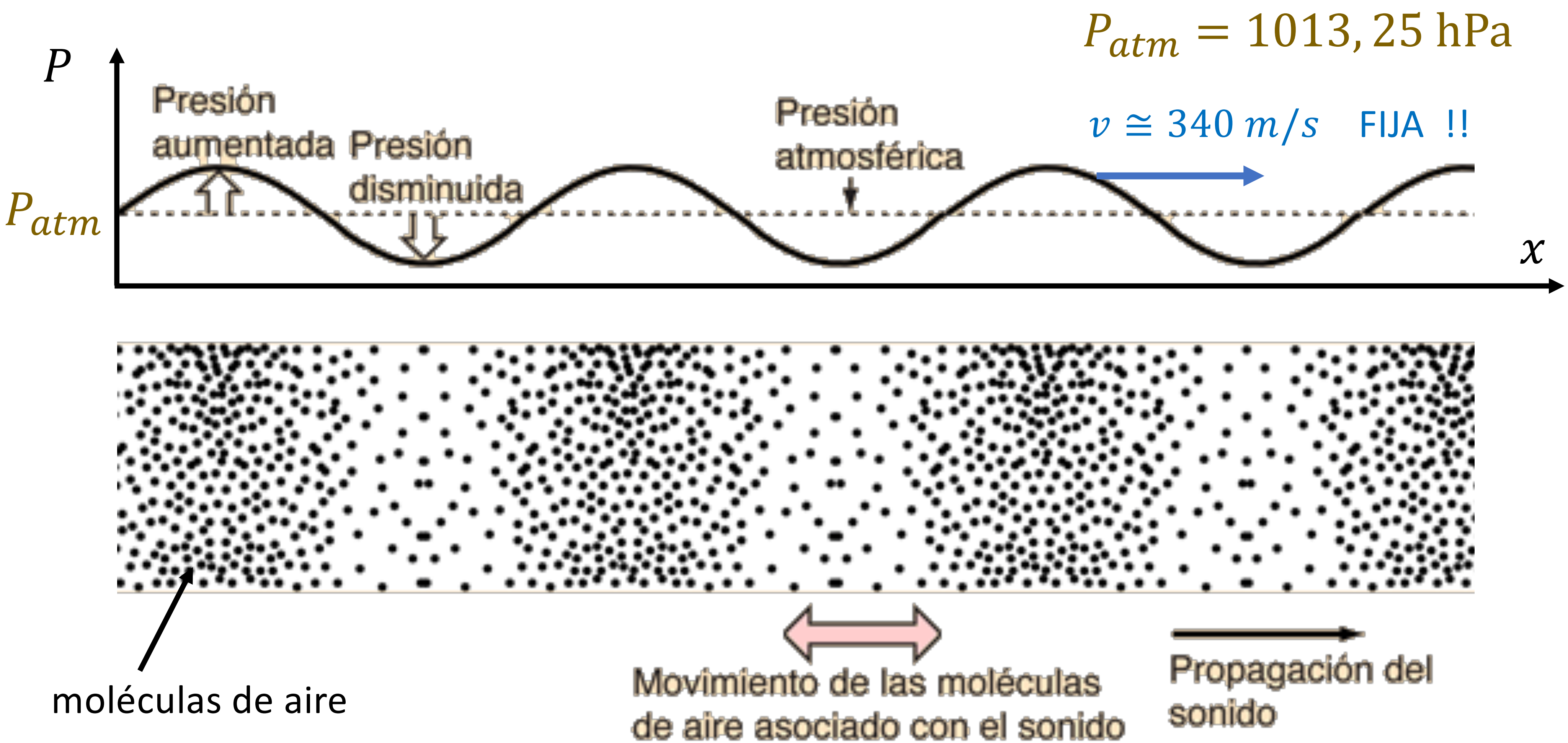
Equilibrio en x

Acoustic Longitudinal Wave



isvr

Ondas longitudinales: sonido

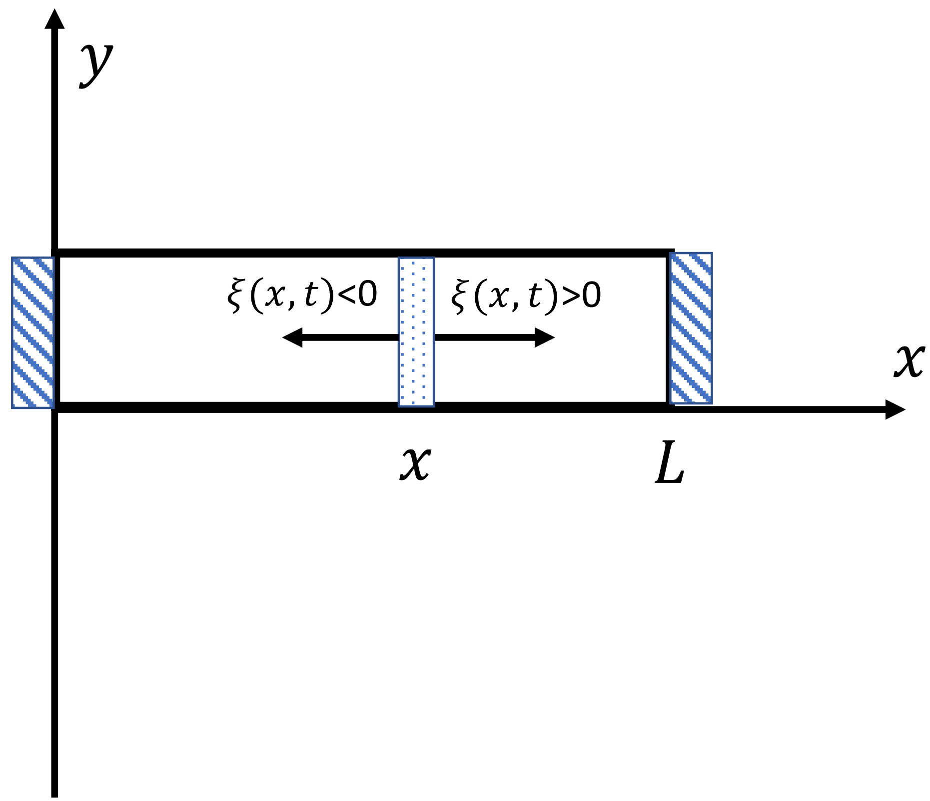


Ondas sonoras: condición cerrado/cerrado

- Tomamos un recipiente con aire cerrado en ambos extremos.

- Se generan ondas sonoras viajeras a lo largo de x.

- El choque con las paredes va a generar ondas en sentido contrario generando ondas estacionarias.



Pregunta

- ¿Cómo se expresarán las condiciones de contorno para $\xi(x,t)$ en el caso cerrado cerrado?