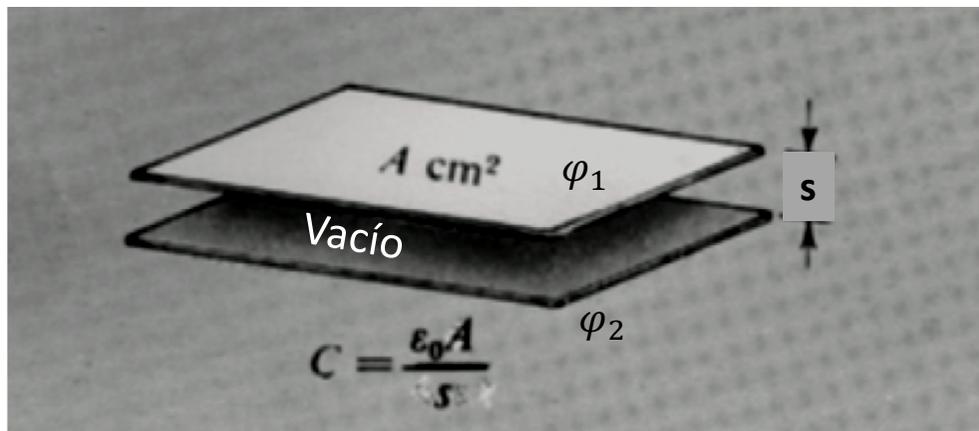
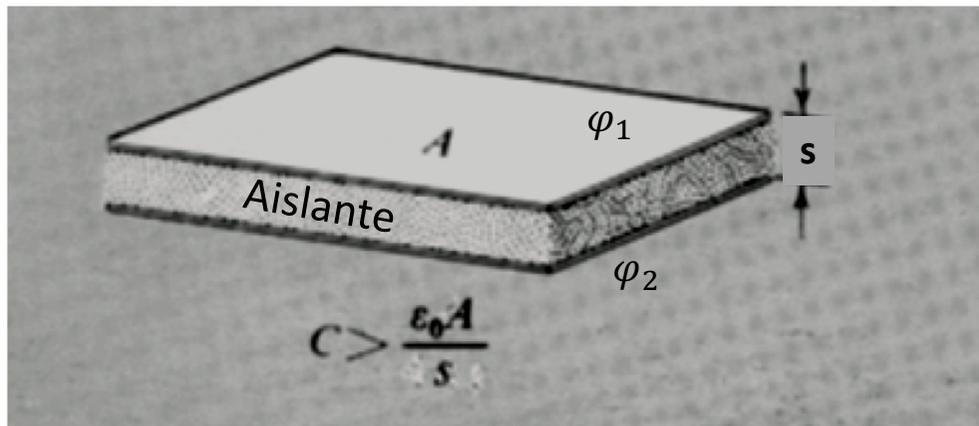


Experiencia con condensadores en vacío y con dieléctricos

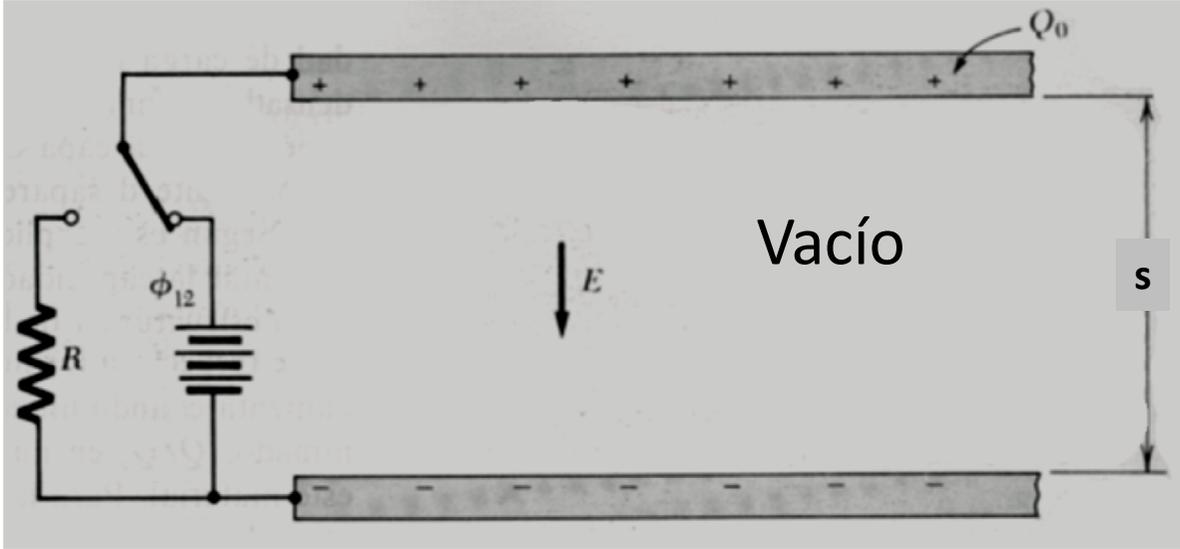


- En el vacío: dos conductores aislados uno del otro. Para uno plano:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon_0 A}{s}$$



- Cuando metemos un material aislante entre las placas, manteniendo la diferencia de potencial, tenemos una capacidad mayor.
- **Esto se debe a una mayor cantidad de carga en las placas.**

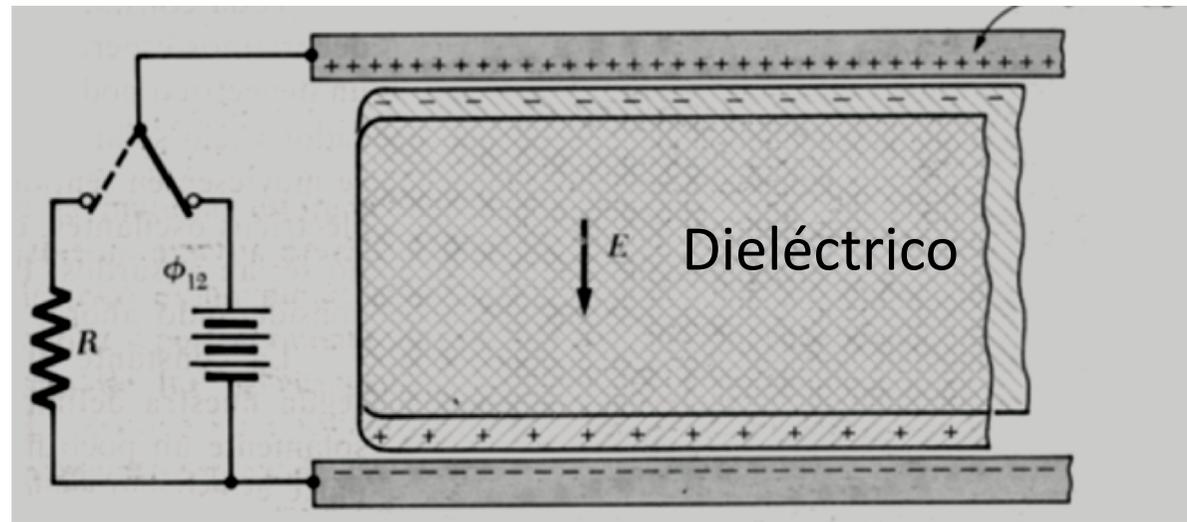


La batería mantiene la diferencia de potencial ϕ_{12} . Con una carga Q_0 , tenemos:

$$Q_0 = C_0 \phi_{12}$$

El campo eléctrico desplaza en el aislante las cargas positivas hacia abajo y las negativas hacia arriba. Capas no compensadas se ubican junto a las placas. En las placas hay ahora una carga mayor

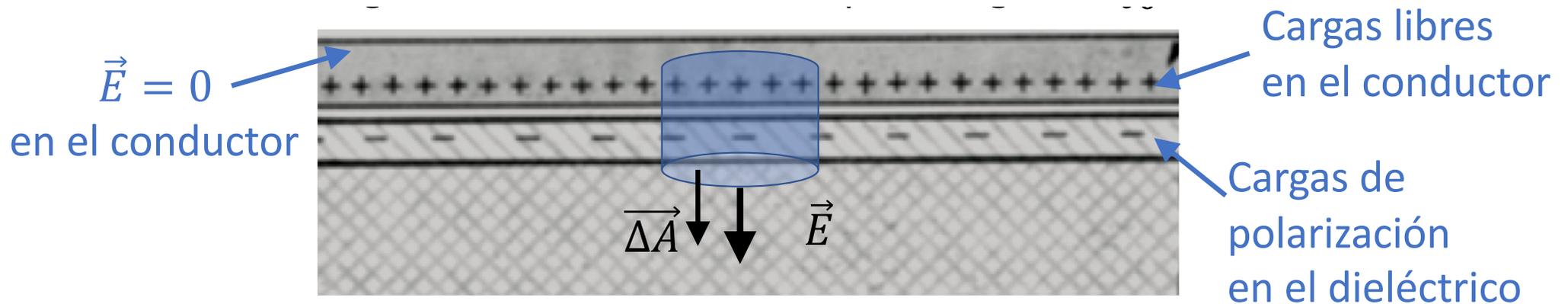
$$Q = \kappa Q_0 \quad \kappa > 1$$



$$Q = \kappa Q_0$$

Cargas libres y de polarización

- En el vacío, el campo es $E = \frac{\varphi_{12}}{s}$
- Cuando metemos el dieléctrico, en todo el espacio, la diferencia de potencial es la misma (por acción de la batería) y la distancia es la misma con lo cual E no cambia.
- Esto quiere decir que la carga en el conductor Q , más la carga en el borde contiguo del dieléctrico tiene que ser igual a Q_0 .



Cargas libres y de polarización

- Entonces definiendo $\kappa > 1$ tal que $Q = \kappa Q_0$, la carga en el borde contíguo del dieléctrico es

$$Q' = -(\kappa Q_0 - Q_0) = (1 - \kappa)Q_0$$

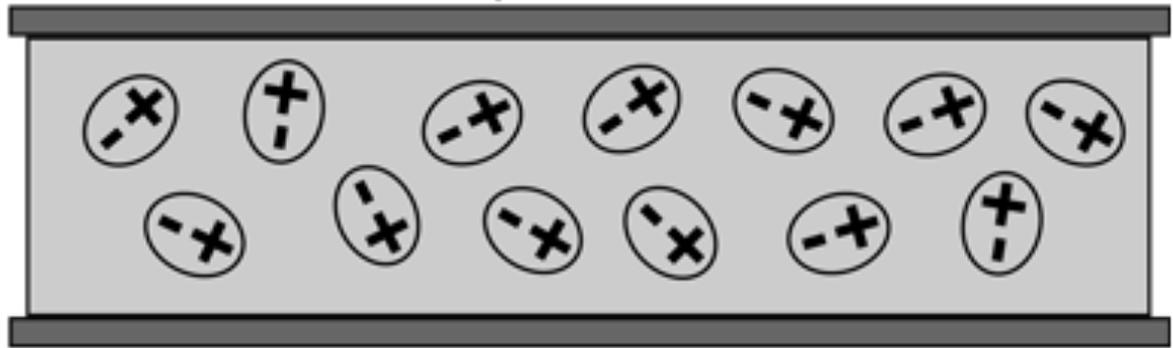
- κ es la **constante dieléctrica**

Tabla 10.1 Constantes dieléctricas de varias sustancias κ

<i>Substancia</i>	<i>Condiciones</i>	<i>Constante dieléctrica</i>
Aire	Gas, 0° C, 1 atm	1,00059
Metano	Gas, 0° C, 1 atm	1,00088
Ácido clorhídrico, HCl	Gas, 0° C, 1 atm	1,0046
Agua H ₂ O	Gas, 110° C, 1 atm	1,0126
	Líquido, 20° C	80
Benceno, C ₆ H ₆	Líquido, 20° C	2,28
Metanol CH ₃ OH	Líquido, 20° C	33,6
Amoníaco, NH ₃	Líquido, — 34° C	22
Aceite de transformador	Líquido, 20° C	2,24
Cloruro sódico, NaCl	Cristal, 20° C	6,12
Azufre, S	Sólido, 20° C	4,0
Silicio, Si	Sólido, 20° C	11,7
Polietileno	Sólido, 20° C	2,25-2,3
Porcelana	Sólido, 20° C	6,0-8,0
Cera de parafina	Sólido, 20° C	2,1-2,5
Vidrio pyrex 7070	Sólido, 20° C	4,00

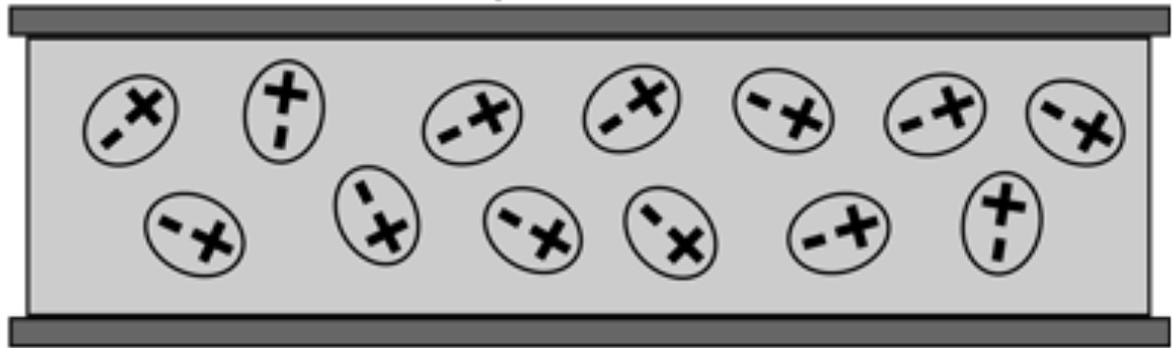
Origen de la respuesta dieléctrica

Moléculas
dipolares permanentes o
inducidas orientadas
desordenadamente

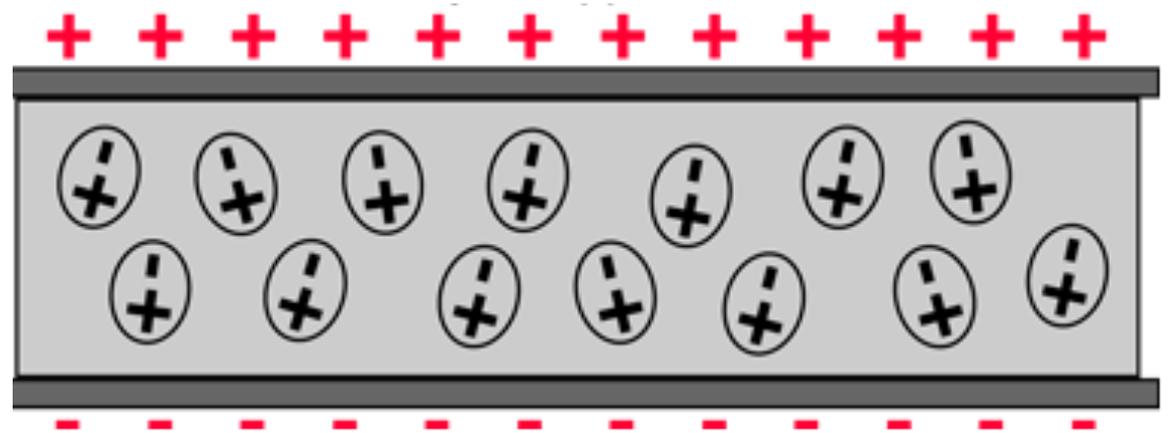


Origen de la respuesta dieléctrica

Moléculas
dipolares permanentes o
inducidas orientadas
desordenadamente



La presencia de un
campo externo
orienta los dipolos



Polarización

- Definamos la **polarización** \vec{P} como la densidad volumétrica de momentos dipolares eléctricos en un dieléctrico. Si N es el número de dipolos por unidad de volumen dentro de un dieléctrico y \vec{p} es el momento dipolar promedio:

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

- Para dieléctricos lineales \vec{P} es proporcional al campo externo \vec{E} :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

- Donde χ_e es la susceptibilidad eléctrica (cuan fácilmente un dieléctrico se polariza en presencia de un campo externo).

$$\frac{P}{\epsilon_0 E} = \chi_e$$

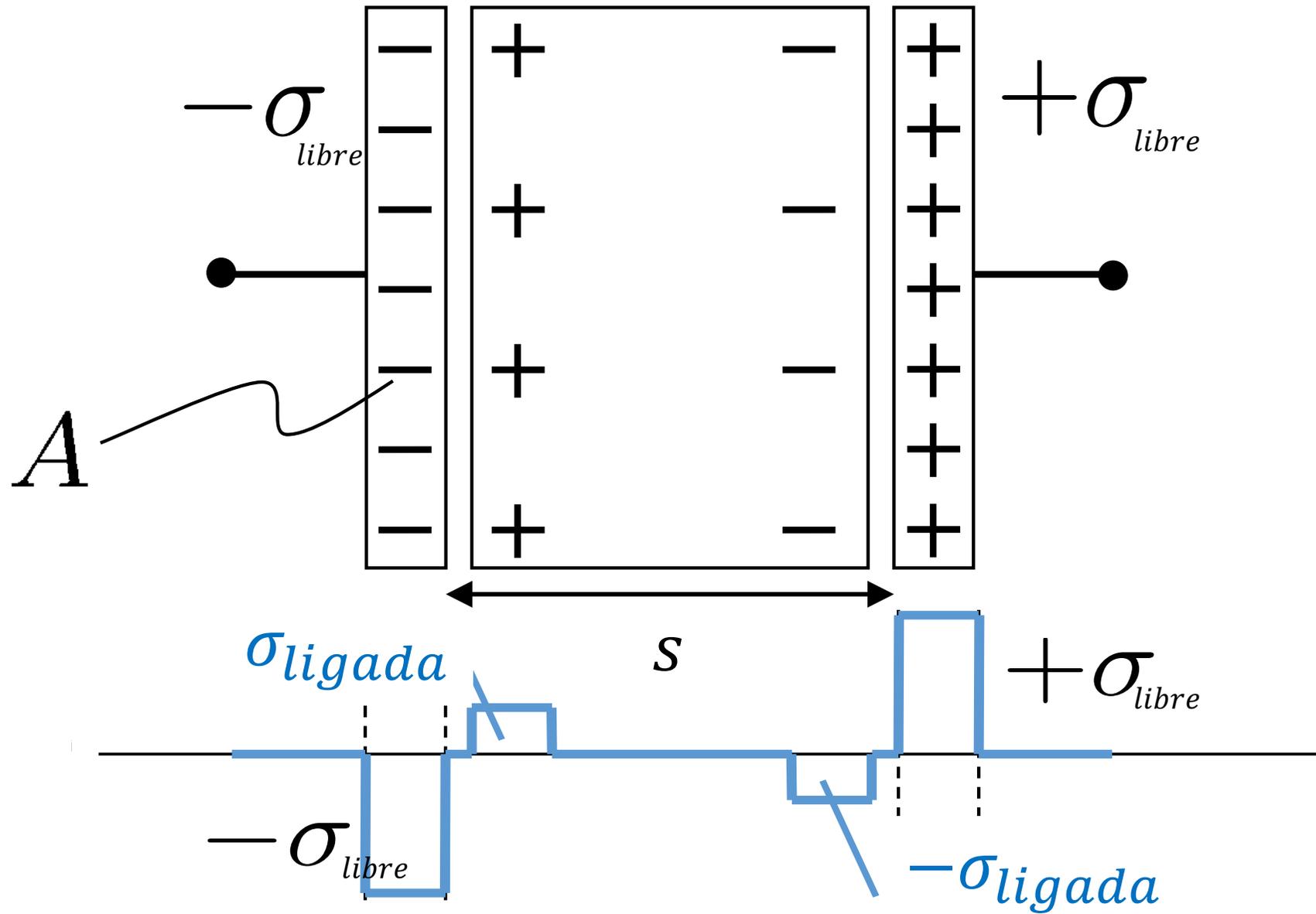
Cargas ligadas

- Por oposición a la carga libre en los conductores, se denomina carga ligada a la carga asociada a la polarización.

- Su distribución volumétrica ρ_{ligada} se define como:

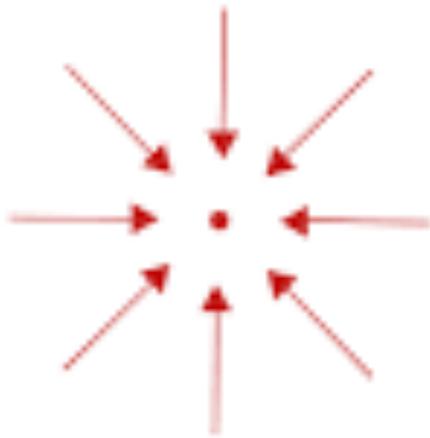
$$\rho_{ligada} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

- Definida así, en el caso del capacitor plano tenemos, σ_{ligada} es un exceso de carga superficial negativa de polarización frente a la placa conductora cargada positivamente y viceversa.



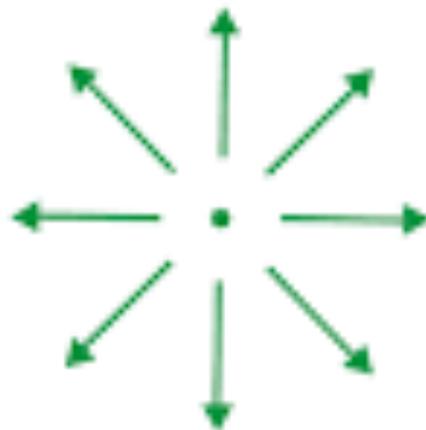
Repaso de divergencia de un campo

$$\nabla \cdot \vec{v} < 0$$



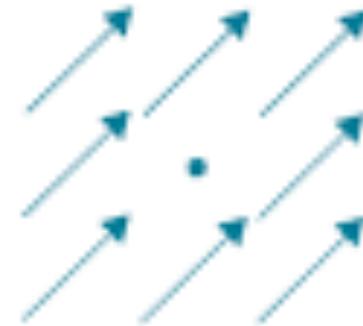
Sumidero de campo

$$\nabla \cdot \vec{v} > 0$$

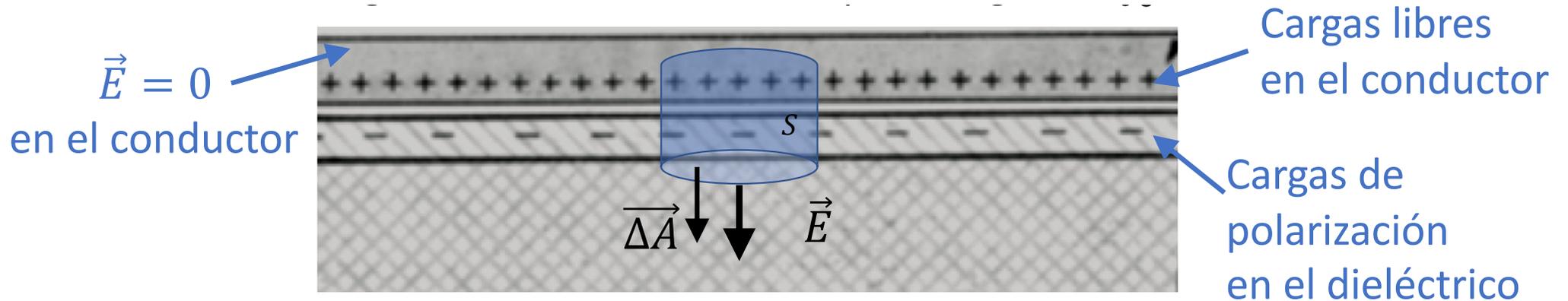


Manantial de campo

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$



Ley de Gauss para Dieléctricos



- Volviendo a nuestra superficie cerrada de Gauss:

$$\oiint \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{d}\vec{a} = \iiint (\rho_{libre} + \rho_{ligada}) dV$$

- Como $\rho_{ligada} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$$\oiint_s \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{d}\vec{a} = \iiint (\rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dV$$

Ley de Gauss para Dieléctricos

- Por teorema de Gauss:

$$\oiint_S \vec{P} \cdot \vec{d\vec{a}} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV$$

- Entonces

$$\oiint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \vec{d\vec{a}} = \iiint \rho_{libre} dV$$

- El campo $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ se llama corriente de desplazamiento.
Entonces:

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{d\vec{a}} = \iiint \rho_{libre} dV$$

Ley de Gauss
para Dieléctricos

Ley de Gauss para Dieléctricos

- Para dieléctricos lineales $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \kappa \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

- Donde $\epsilon = \epsilon_0 \kappa \geq \epsilon_0$
- Entonces la **Ley de Gauss para dieléctricos lineales** dada una superficie cerrada S que encierra un volumen V :

$$\oiint_S \epsilon \vec{E} \cdot \vec{da} = \iiint_V \rho_{libre} dV$$

Ley de Gauss para Dieléctricos

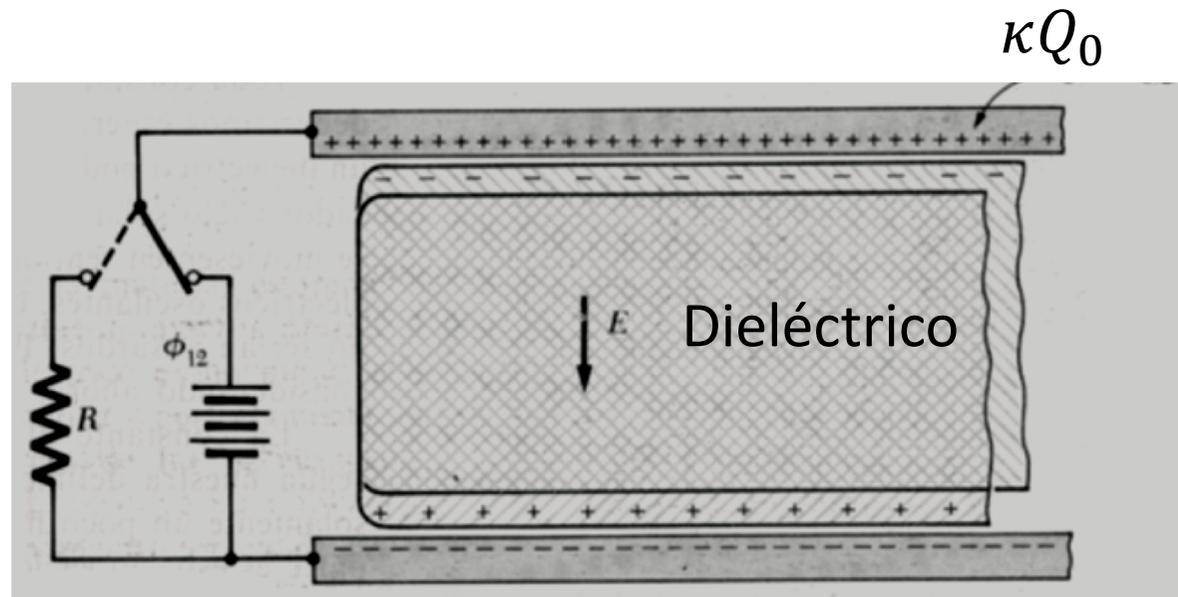
- Recordando el teorema de la divergencia, otra forma de escribir la ley de Gauss es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$

Esta es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, nos dice que las cargas son manantiales o sumideros de campo eléctrico

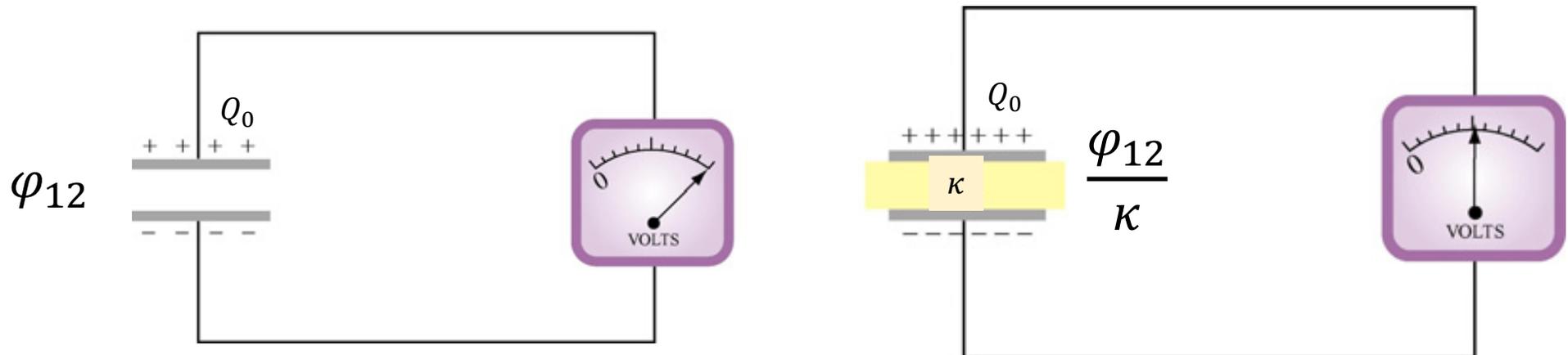
Dieléctrico en capacitor a potencial constante

- Colocamos un dieléctrico de constante κ llenando el espacio entre placas a potencial constante φ_{12}
- La carga en el conductor aumenta un factor κ .
- Al mantenerse el potencial en φ_{12} , la capacidad aumenta a κC .
- El campo total $E = \varphi_{12}/s$ en el dieléctrico no cambia

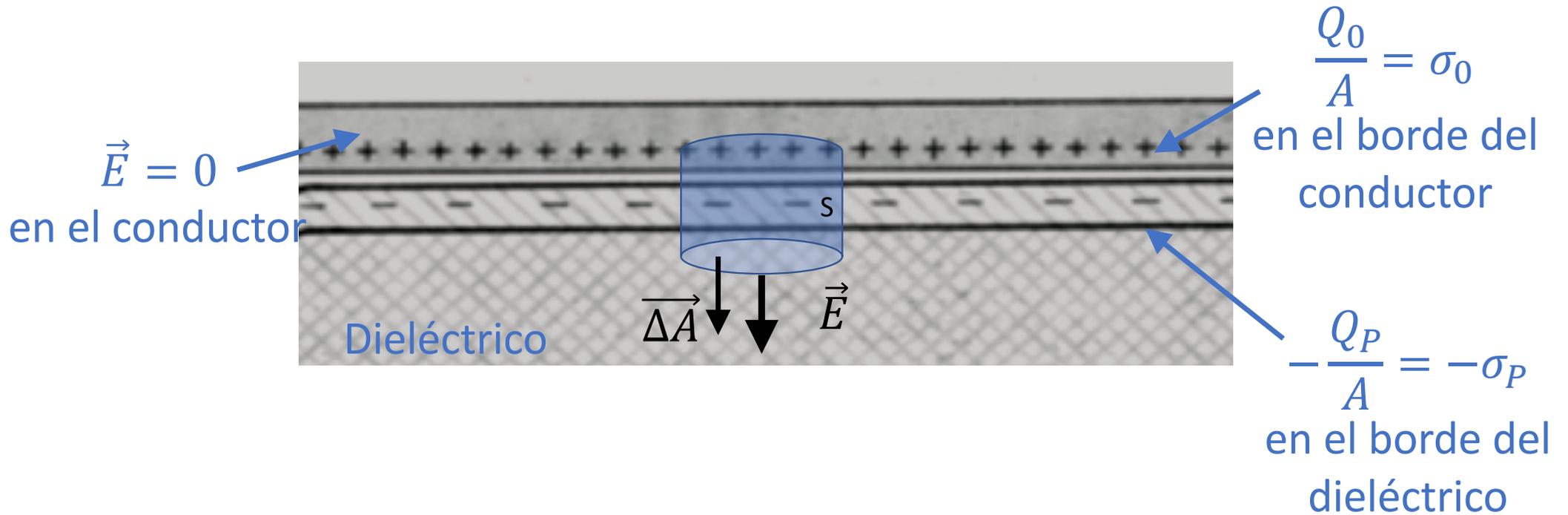


Dieléctricos en capacitor a carga constante

- Colocamos un dieléctrico de constante κ manteniendo la carga Q_0 .
- Experimentalmente se ve que el potencial cae a $\frac{\varphi_{12}}{\kappa}$, con lo cual, el campo cae a $\frac{\varphi_{12}}{s\kappa}$.
- La capacidad aumenta a κC .



Dieléctricos en capacitor a carga constante (sin batería)



$$\oiint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{a} = \epsilon \vec{E} \cdot \overline{\Delta A} = \epsilon E \Delta A = \iiint \rho_{libre} dV = Q_0 \frac{1}{A} \Delta A$$

Dieléctricos en capacitor a carga constante (sin batería)

- Simplificando, tenemos $E = \frac{Q_0}{\epsilon A} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 \kappa A}$
- Para el caso sin dieléctrico el campo vale $E \kappa = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}$
- Entonces, juntando las dos últimas expresiones para E :

$$\frac{Q_0}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{Q_0 - Q_P}{\epsilon_0 A} \Rightarrow \frac{Q_0}{\kappa} = Q_0 - Q_P$$

- con lo cual la carga de polarización es

$$Q_P = \left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] Q_0, \text{ ó } \sigma_P = \left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] \sigma_0$$

Energía en capacitores con dielectricos

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico

- La energía almacenada en un capacitor venía dada por:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

- Al colocar un dieléctrico, se espera que esta cantidad cambie:
 - A potencial constante
 - A carga constante

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico (con batería)

- Supongamos un capacitor de capacidad inicial C_i que llenamos completamente con un dieléctrico de constante $\kappa > 1$, manteniendo el potencial constante.

- La energía pasa de un valor inicial

$$U_i = \frac{1}{2} C_i \Delta V_i^2$$

- A un valor final

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \Delta V_i^2 = \frac{1}{2} \kappa C_i \Delta V_i^2 > U_i$$

Pregunta

- ¿De donde sale la energía que ingresa al sistema al colocar el dieléctrico a voltaje constante?

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico (sin batería)

- Sea un capacitor de capacidad inicial C_i y diferencia de potencial ΔV_i que llenamos completamente con un dieléctrico de constante $\kappa > 1$, manteniendo la carga constante.

- La energía pasa de un valor inicial

$$U_i = \frac{1}{2} C_i \Delta V_i^2$$

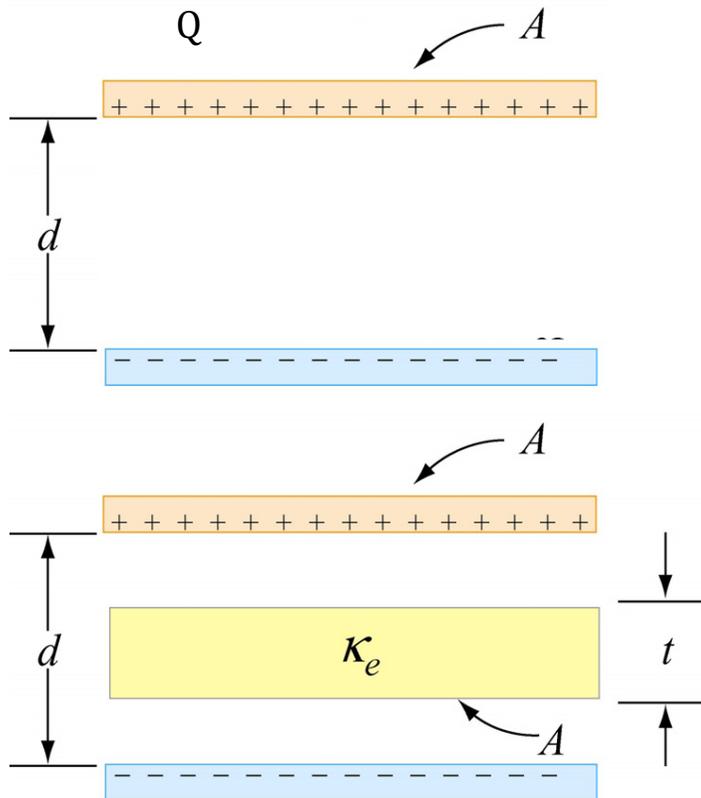
- A un valor final donde $C_f = \kappa C_i$ y $\Delta V_f = \frac{\Delta V_i}{\kappa}$

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \Delta V_f^2 = \frac{1}{2} \kappa C_i \left[\frac{\Delta V_i}{\kappa} \right]^2 = \frac{U_i}{\kappa} < U_i$$

Pregunta

- ¿A dónde va la energía que ya no está en el estado final?

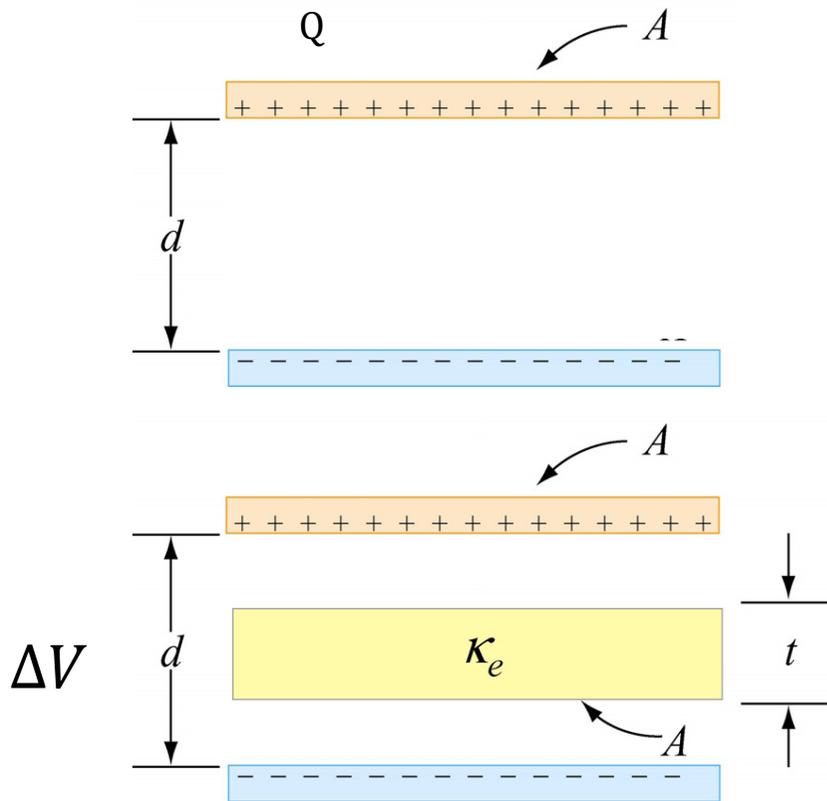
Capacitores con dieléctricos (1)



- Dado un capacitor plano de área A y espesor d , metemos un dieléctrico de constante κ_e y espesor $t < d$.
- La carga Q en el conductor permanece constante.
- Queremos ver cómo cambia la capacidad.
- Inicialmente, la capacidad es:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



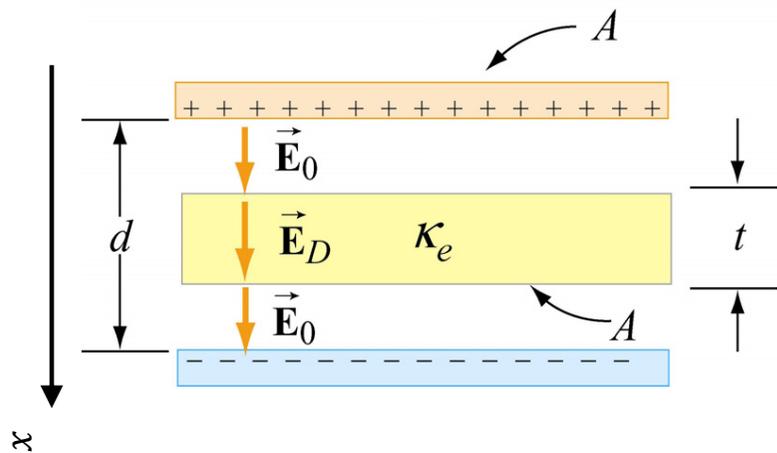
- La capacidad del capacitor con el dieléctrico vendrá dada por

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

donde ΔV es la diferencia de potencial entre las placas una vez que metimos el dieléctrico.

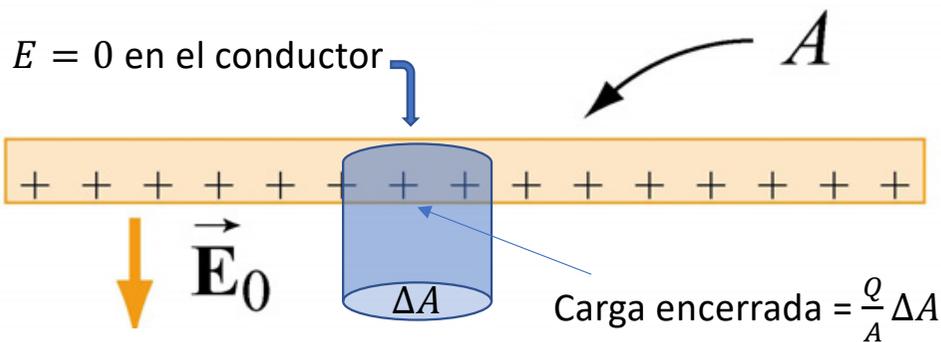
- Como Q no varía, sólo tenemos que calcular ΔV .

Capacitores con dieléctricos (1)



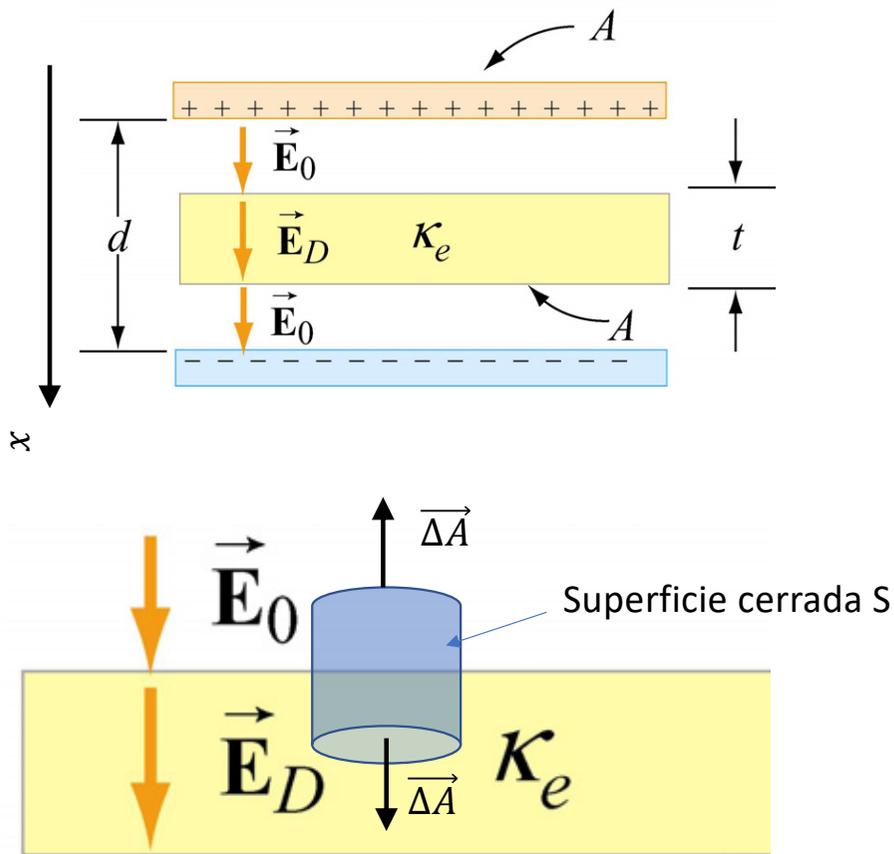
- Calculemos entonces el campo en el espacio entre las placas.
- Por ley de Gauss, En la capa de vacío de arriba el campo es simplemente

$$E_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0} \text{ o } \vec{E}_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0} \hat{x}$$



- En la capa de vacío de abajo, el valor del campo es el mismo.

Capacitores con dieléctricos (1)



- Para el campo \vec{E}_D en el dieléctrico usemos la ley de Gauss para dieléctricos:

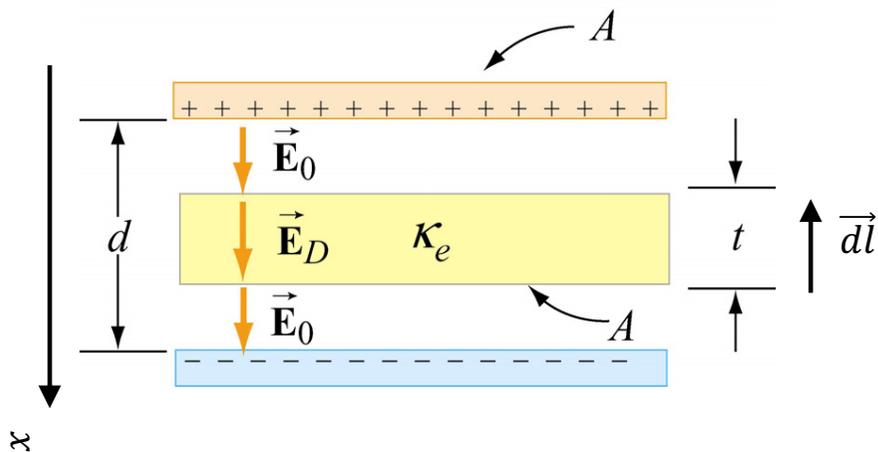
$$\int_S \vec{D} \cdot \vec{da} = 0 \quad (\text{no hay cargas libres})$$

$$\epsilon E_D \Delta A - \epsilon_0 E_0 \Delta A = 0$$

entonces como $\epsilon = \kappa_e \epsilon_0$

$$\vec{E}_D = \frac{\vec{E}_0}{\kappa_e}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



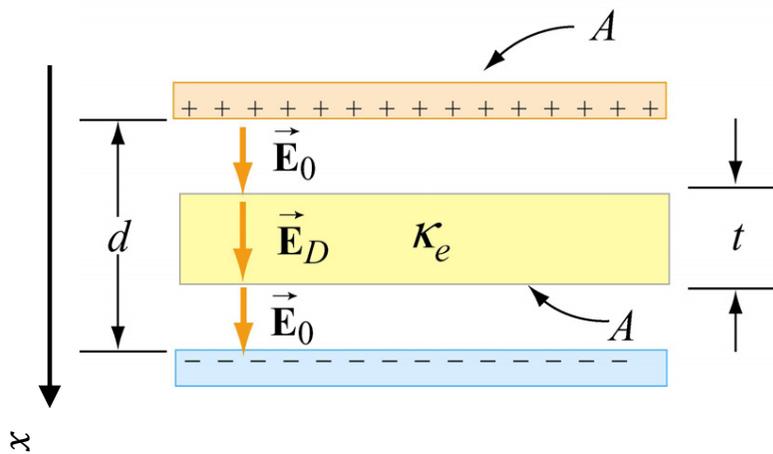
- La diferencia de potencial entre las placas es

$$\Delta V = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- la integral de camino da:

$$\begin{aligned} \Delta V &= E_0(d - t) + E_D t \\ &= \frac{Q}{A\epsilon_0} (d - t) + \frac{Q}{A\kappa_e\epsilon_0} t \end{aligned}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



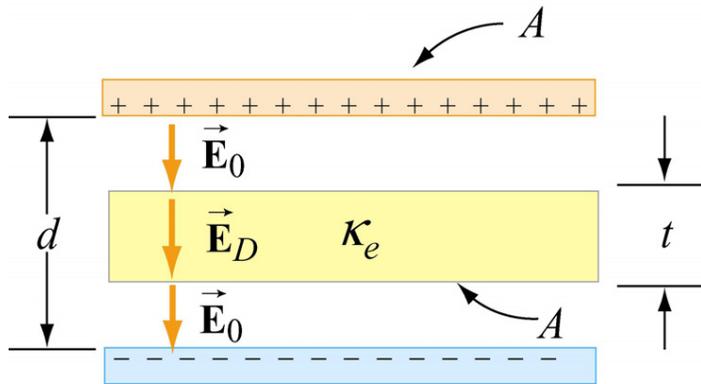
- Calculemos ahora la capacidad del capacitor con el dieléctrico:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{A\epsilon_0}(d-t) + \frac{Q}{A\kappa_e\epsilon_0}t}$$

- simplificamos y reacomodamos el denominador

$$C = \frac{1}{\frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}}$$

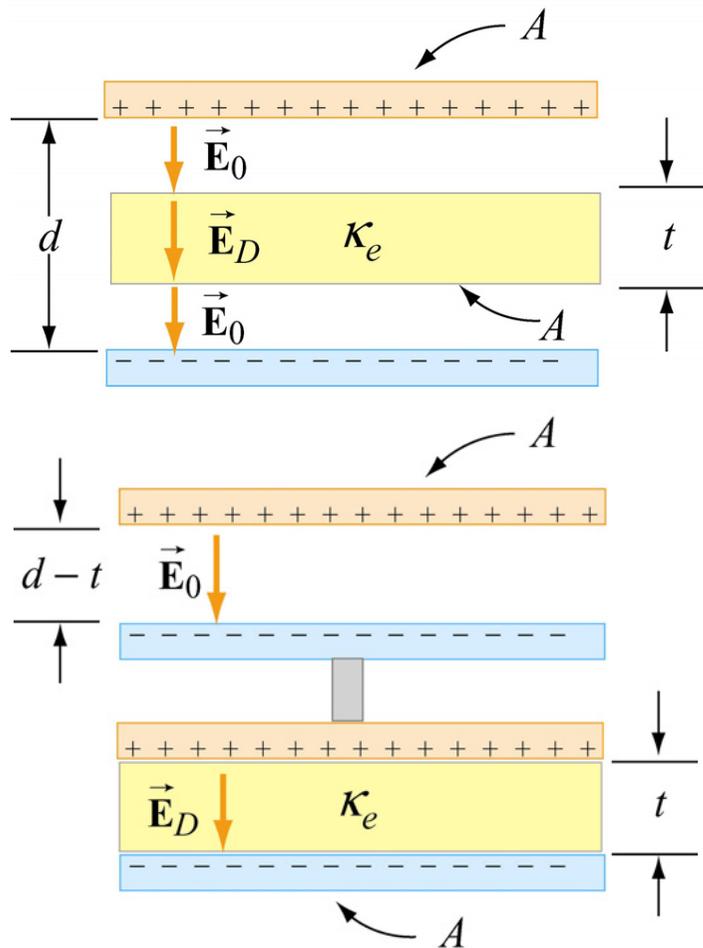
Capacitores con dieléctricos (1)



- Invertiendo C tenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (1)

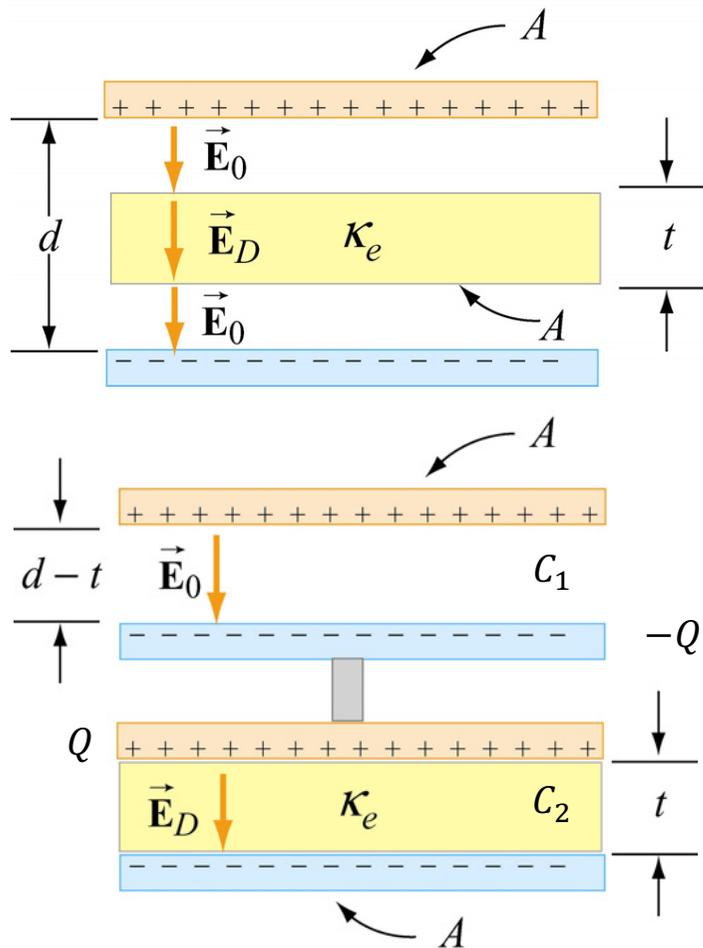


- Invertiendo C tenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}$$

- Esto es la suma de las inversas de las capacidades de un capacitor en el vacío de espesor $d-t$ y de otro con dieléctrico de espesor t , ambos con carga Q .

Capacitores con dieléctricos (1)



- En otras palabras:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Los capacitores tienen un conductor en común que es un equipotencial, de un lado tiene carga Q del otro $-Q$.
- Esta configuración se denomina '*en serie*'

Capacitores en serie

- El resultado anterior:

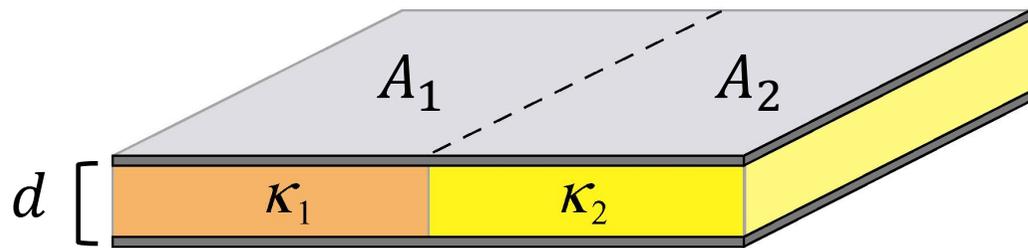
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Puede extenderse a los capacitores en el vacío trivialmente ($\kappa_e = 1$) y a un número arbitrario de capacitores en serie.



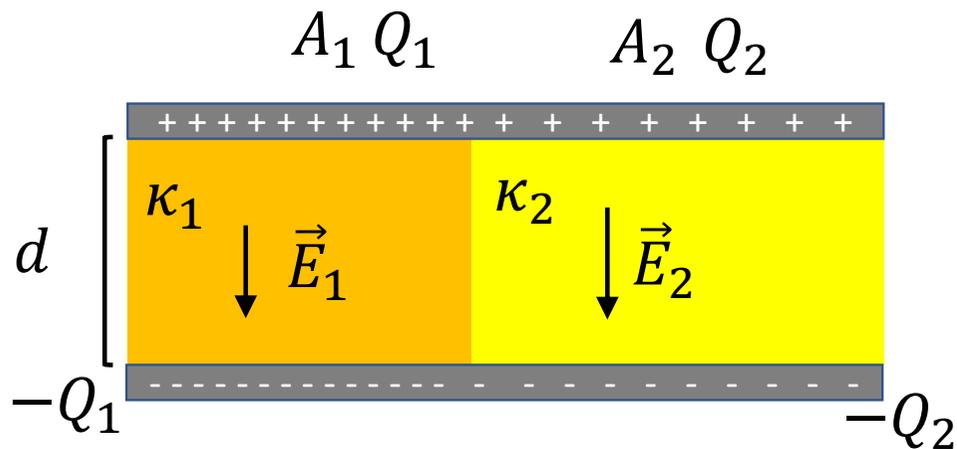
$$\frac{1}{C_{Tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_{N-1}} + \frac{1}{C_N}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



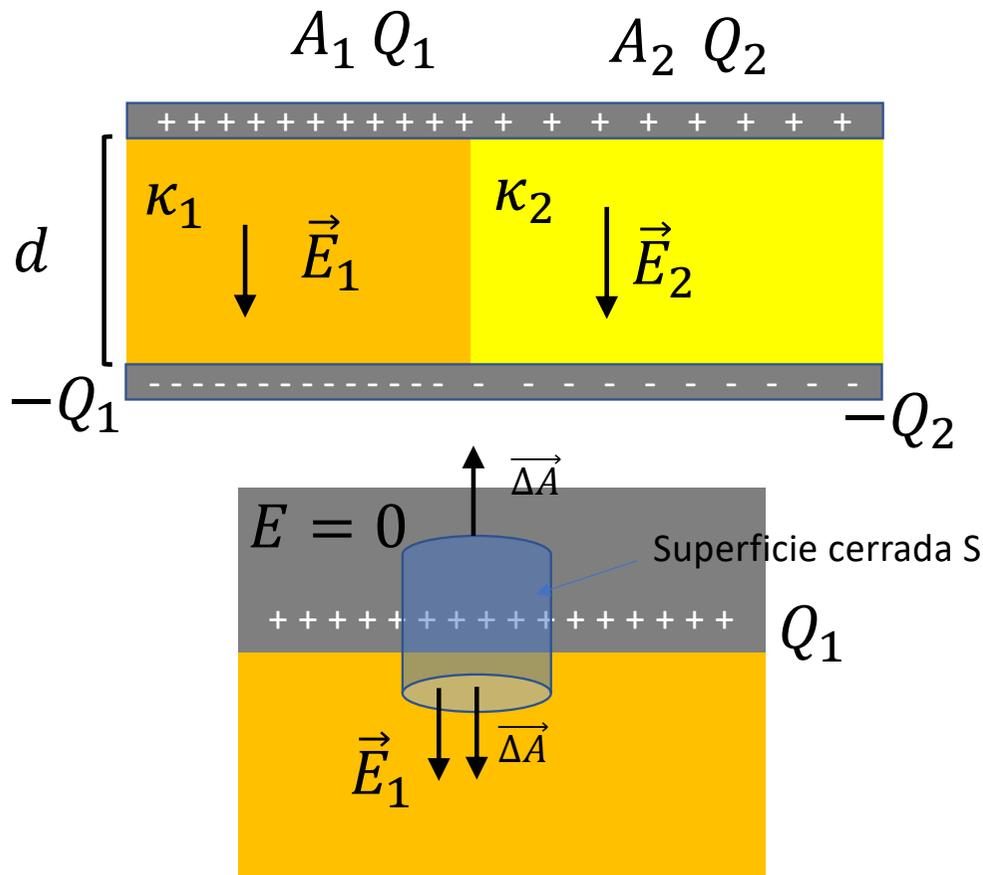
- Supongamos ahora un capacitor de área A y espesor d pequeño con carga Q , y diferencia de potencial ΔV .
- Se llena todo el espacio entre placas con dos dieléctricos de constantes κ_1 y κ_2 de áreas $A_1 + A_2 = A$.

Capacitores con dieléctricos (2)



- La superficie de cada conductor es una equipotencial.
- Por lo tanto la diferencia de potencial para cada dieléctrico es la misma
- Vamos a permitir que la carga total en cada placa se redistribuya sobre cada dieléctrico $Q = Q_1 + Q_2$.

Capacitores con dieléctricos (2)



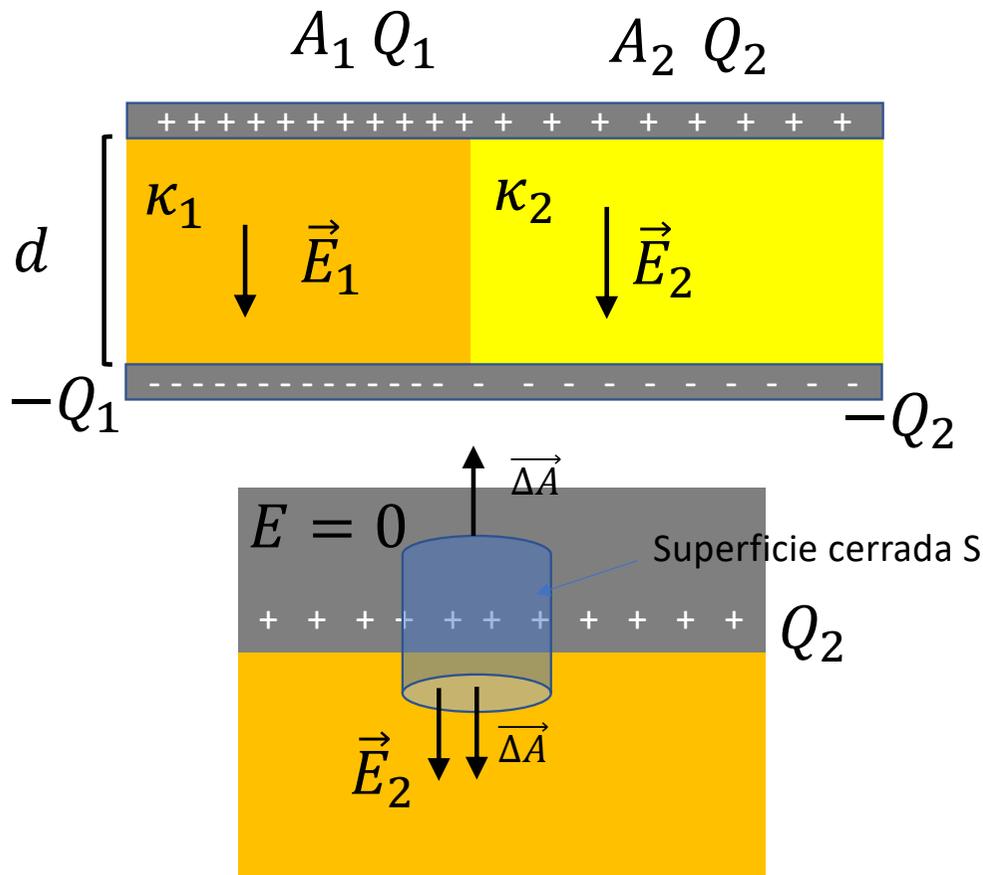
- Por Ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot \vec{d}\vec{a} = \text{carga libre encerrada}$$

$$\kappa_1 \epsilon_0 E_1 \Delta A = \frac{Q_1}{A_1} \Delta A$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



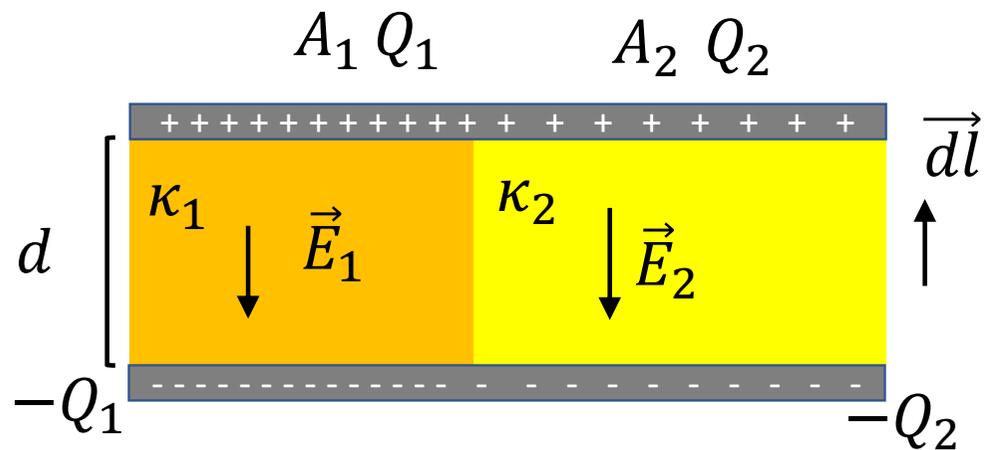
- Por Ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot \vec{d\vec{a}} = \text{carga libre encerrada}$$

$$\kappa_2 \epsilon_0 E_2 \Delta A = \frac{Q_2}{A_2} \Delta A$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



- Como la diferencia de potencial es la misma para ambos dieléctricos

$$-\int_{-}^{+} \vec{E}_1 \cdot \vec{dl} = -\int_{-}^{+} \vec{E}_2 \cdot \vec{dl}$$

$$\Delta V = E_1 d = E_2 d$$

$$\frac{Q_1 d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0} = \frac{Q_2 d}{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)

- De la cuenta anterior:

$$Q_2 = A_2 \kappa_2 \frac{Q_1}{A_1 \kappa_1}$$

- Entonces, la capacidad total es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\frac{Q_1 d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}}$$

- Reemplazando Q_2 tenemos

Capacitores con dieléctricos (2)

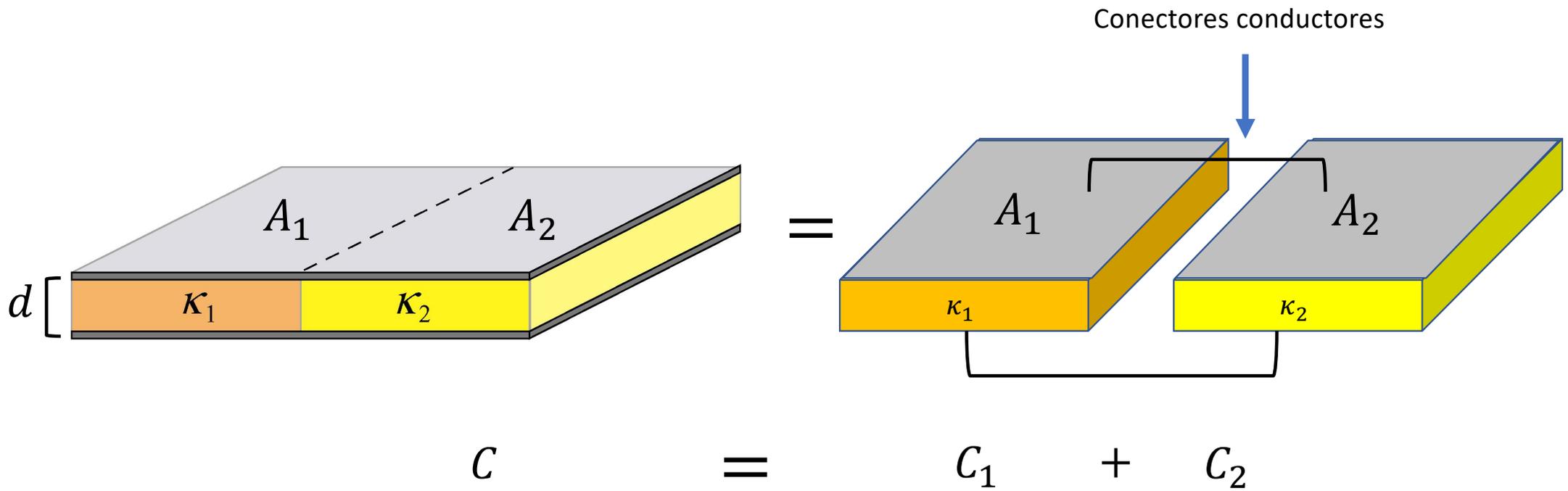
- Reemplazando Q_2 tenemos

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + A_2 \kappa_2 \frac{Q_1}{A_1 \kappa_1}}{\frac{Q_1 d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}}$$

- Entonces

$$C = \frac{1 + A_2 \kappa_2 \frac{1}{A_1 \kappa_1}}{\frac{d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}} = \frac{A_1 \kappa_1 \epsilon_0 + A_2 \kappa_2 \frac{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}{A_1 \kappa_1}}{d} = \frac{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}{d} + \frac{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}{d}$$

Capacitores en paralelo



Capacitores en paralelo

- Entonces, en general, la capacidad equivalente C de dos capacitores 'en paralelo' (C_1 y C_2) tenemos:

$$C = C_1 + C_2$$

- Extendido a N capacitores

