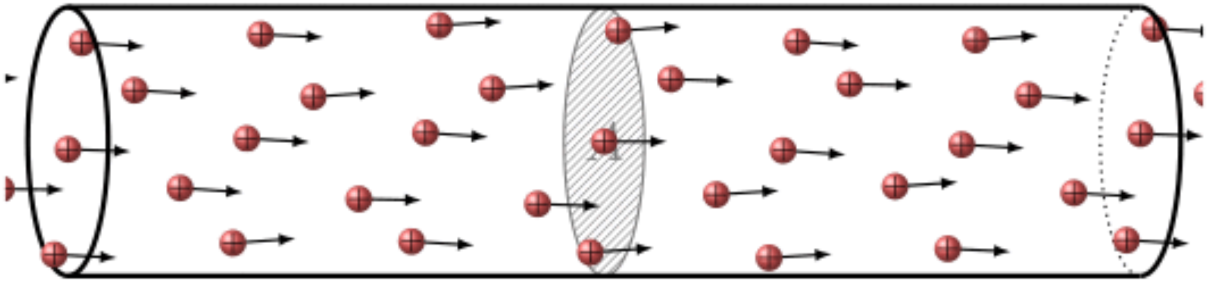
Corrientes estacionarias y circuitos

Corriente eléctrica

- Carga en movimiento



- La corriente I por un cable es la cantidad de carga que atraviesa la sección transversal en un punto fijo por unidad de tiempo.
- Se expresa en Ampères: A = C/s
- J es la densidad superficial de corriente $J = \frac{I}{A}$ y se expresa en A/m^2

Densidad de corriente y corriente

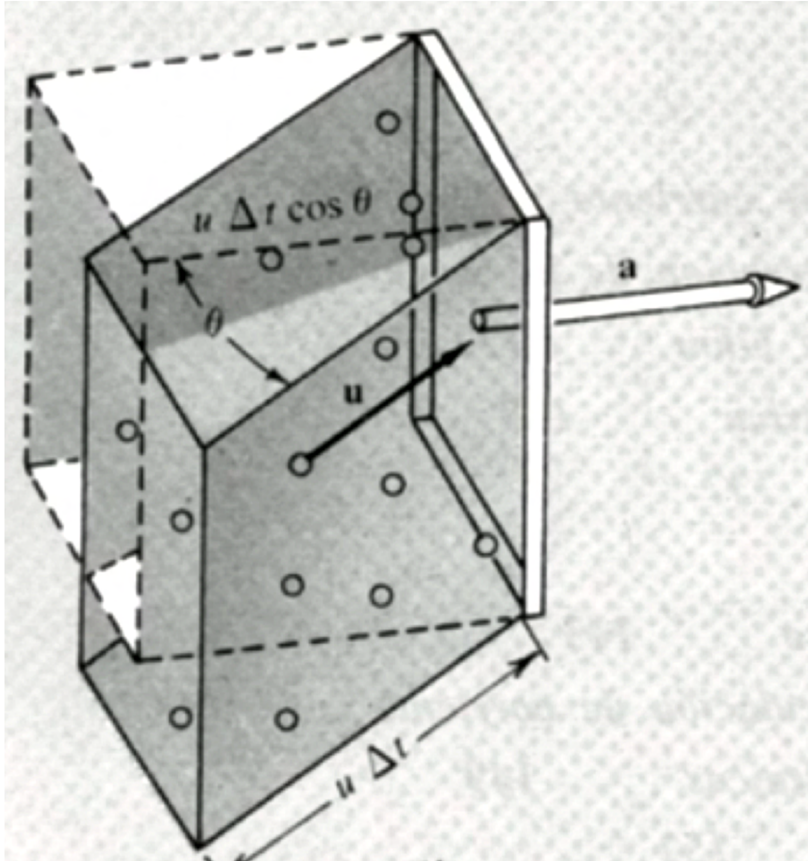
- En realidad importan las velocidades medias en una porción del espacio
- Para un portador de carga k, n_k cantidad de portadores por unidad de volumen

$$\vec{J}_k = n_k q_k \langle \vec{v}_k \rangle$$

- Entonces, si tengo muchas especies 'k'

$$\vec{J} = \sum_k \vec{J}_k$$

$$I = \int_A \vec{J} \cdot \overrightarrow{da}$$



(b)

Corriente estacionaria y conservación de la carga

- Una corriente estacionaria es aquella cuyo campo $\vec{J}$ no depende del tiempo en cada punto del espacio donde ocurre.
- Como vimos hoy, la divergencia de un campo permitía ver si había manantiales o sumideros de campo.
- El campo de densidad de corriente debe cumplir la conservación de la carga. Esta se escribe

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Esto quiere decir que el flujo saliente de cargas va a ir vaciando el diferencial de volumen de ellas, mientras que el flujo entrante contribuye a la acumulación de carga en el lugar.

Corrientes estacionarias

- En esta parte del curso nos centraremos en corrientes que no varían en el tiempo.

- Para la conservación de la carga, esto implica:

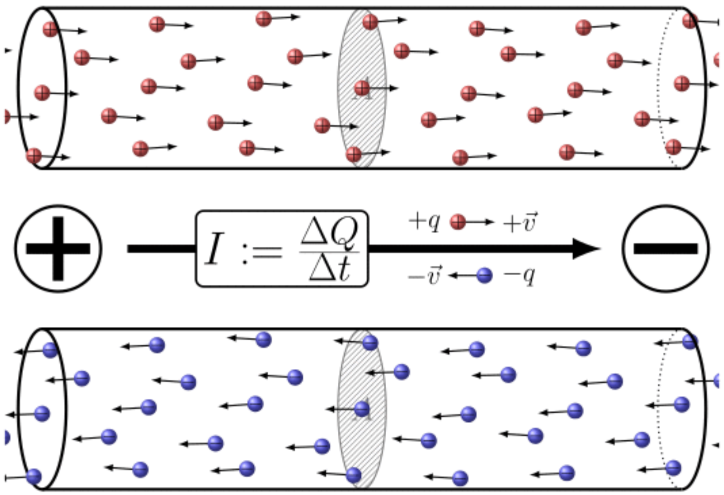
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

En todo punto del espacio

En otras palabras, toda carga que llega a un punto, continúa hacia otro lado

Transporte de carga

- El agente más común para producir y mantener el transporte de carga es el campo eléctrico.
- El campo eléctrico mueve a los portadores de signos distintos en distintos sentidos



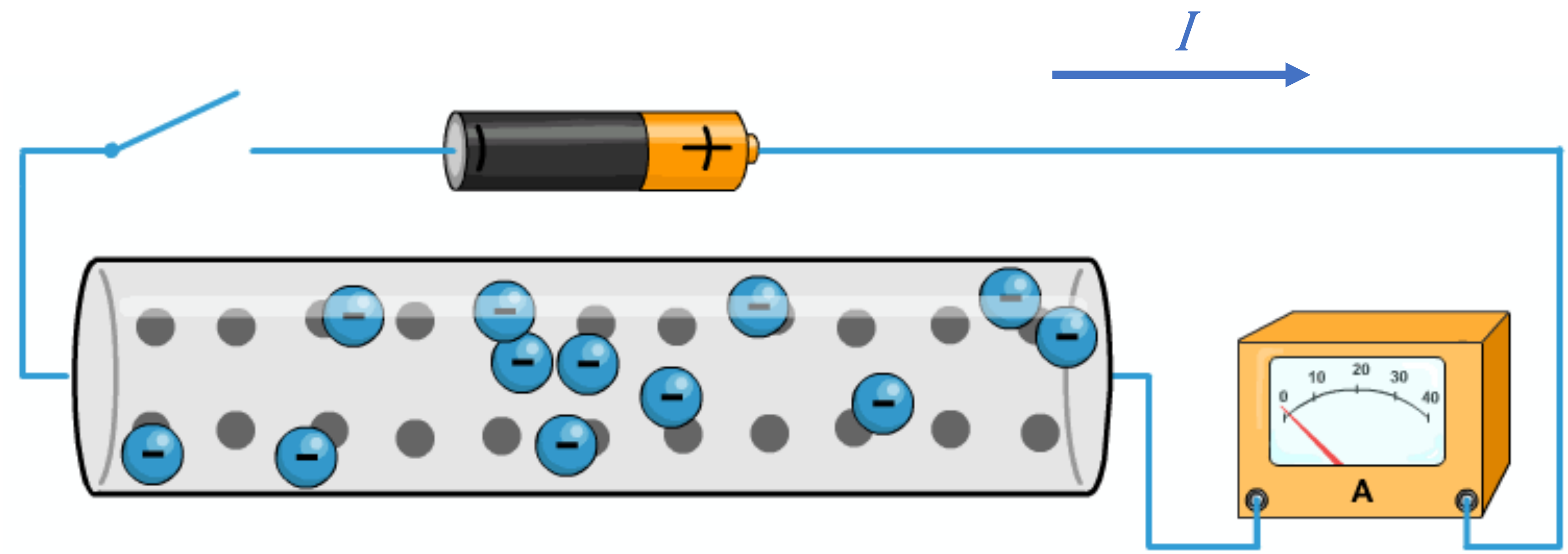
Ley de Ohm

- Es una relación lineal empírica entre el $\vec{E}$ y $\vec{J}$ que se cumple para muchos materiales en un rango muy amplio de intensidades de campo.

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

- σ es la conductividad del material
  - Constante en un rango determinado de condiciones
  - Es un escalar cuando el medio es isotrópico (no tiene en su estructura ninguna dirección privilegiada)

Corriente en un conductor



Los electrones libres en la banda de conducción circulan en respuesta a la diferencia de potencial entre los extremos del circuito mantenida por la batería, mientras que los núcleos del material conductor se mantienen quietos. Fijarse en el sentido de I !!

Ley de Ohm

- Vamos a usar otra versión de la misma Ley de Ohm que relaciona a *I* y la diferencia de potencial V

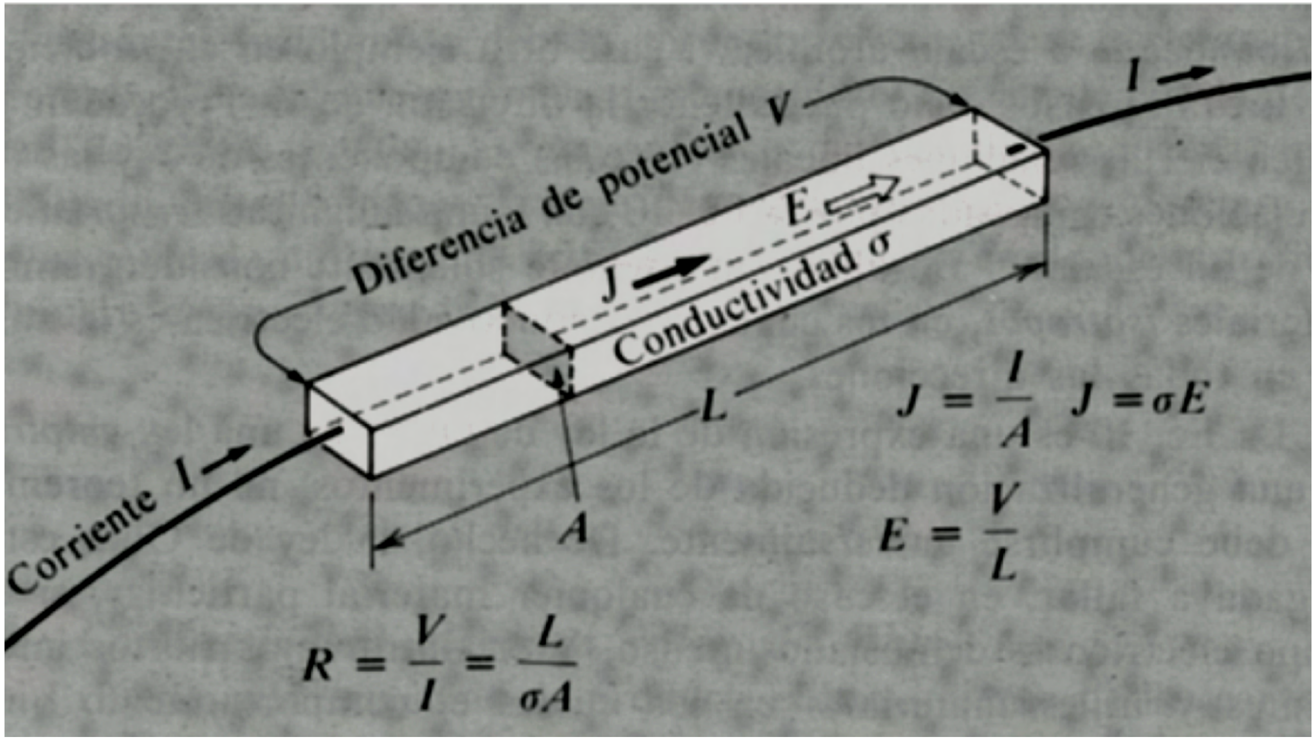
$$V = IR$$

- R es la resistencia del conductor entre los dos terminales que están a una diferencia de potencial V.

- La unidad SI de R es el Ohm ($\Omega = \frac{V}{A}$)

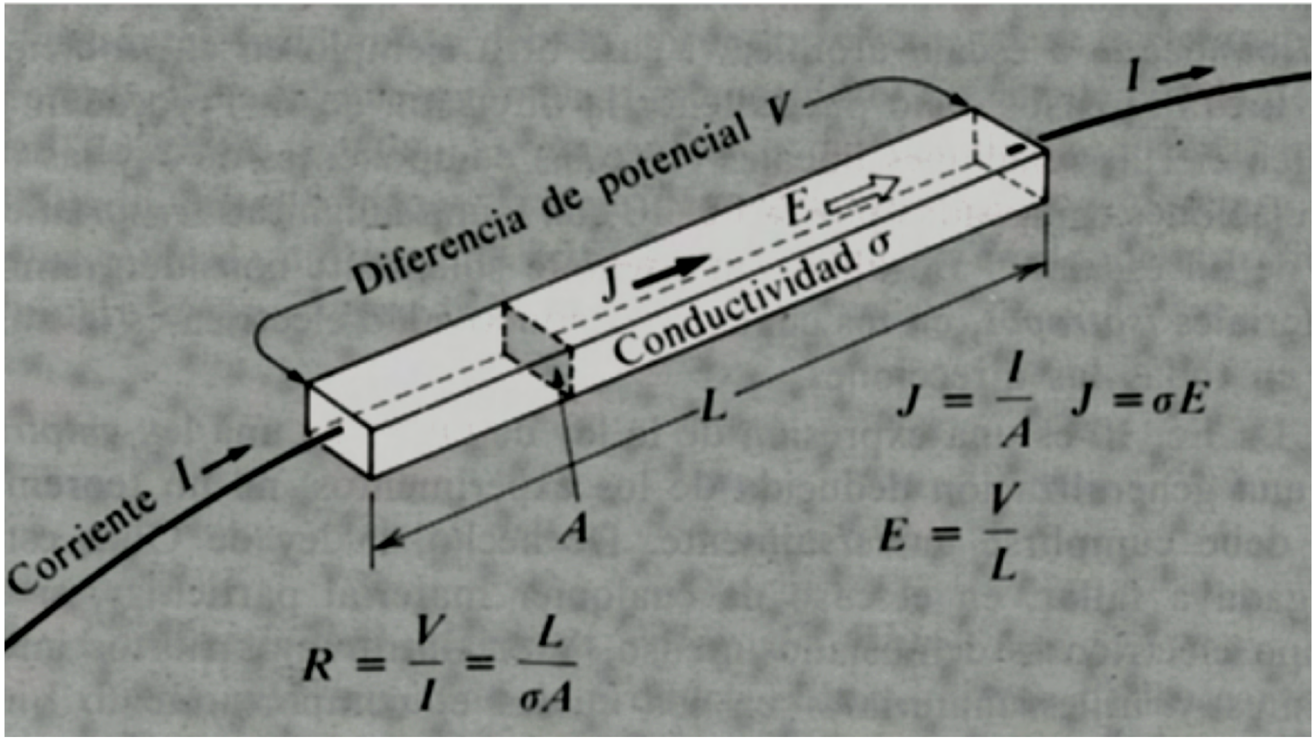
Conductividad de una varilla conductora

- Sea una varilla de maciza de sección recta de área A y longitud L entre sus extremos.
- Una corriente estacionaria I circula a lo largo de la varilla.
- Entre los extremos hay una diferencia de potencial V.



Conductividad de una varilla conductora

- Dentro de la varilla, la densidad de corriente es
$$J = \frac{I}{A}$$
- El campo eléctrico es
$$E = \frac{V}{L}$$
- Entonces
$$R = \frac{V}{I} = \frac{LE}{AJ} = \frac{L}{A\sigma}$$



Conductividad y resistividad

- La conductividad σ tiene unidades de corriente por unidad de área dividido unidad de campo eléctrico. En el sistema SI:

$$[\sigma] = \frac{\frac{A}{m^2}}{\frac{V}{m}} = \frac{A}{Vm} = \frac{1}{\Omega m}$$

Conductividad y resistividad

- Entonces,

$$R = \frac{V}{I} = \frac{L\rho}{A}$$

- La inversa de la conductividad es la resistividad $\rho = \frac{1}{\sigma}$

$$[\rho] = \frac{\frac{V}{m}}{\frac{A}{m^2}} = \frac{Vm}{A} = \Omega m$$

TABLA 4.1

Resistividad y su recíproco, conductividad, para ciertos materiales

Material	Resistividad ρ	Conductividad σ
Cobre puro, 273 K	$1{,}56 \times 10^{-6}$ ohm-cm $1{,}56 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$	$6{,}4 \times 10^{5}$ (ohm-cm)$^{-1}$ $6{,}4 \times 10^{7}\ (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
Cobre puro, 373 K	$2{,}24 \times 10^{-6}$ ohm-cm $2{,}24 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$	$4{,}5 \times 10^{5}$ (ohm-cm)$^{-1}$ $4{,}5 \times 10^{7}\ (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
Germanio puro, 273 K	200 ohm-cm $2\ \Omega \cdot \text{m}$	0,005 (ohm-cm)$^{-1}$ $0{,}5\ (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
Germanio puro, 500 K	0,12 ohm-cm $1{,}2 \times 10^{-3}\ \Omega \cdot \text{m}$	$8{,}3\ (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ $830\ (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
Agua pura, 291 K	$2{,}5 \times 10^{7}$ ohm-cm $2{,}5 \times 10^{5}\ \Omega \cdot \text{m}$	$4{,}0 \times 10^{-8}$ (ohm-cm)$^{-1}$ $4 \times 10^{-6}\ (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
Agua del mar (varía con la salinidad)	25 ohm-cm $0{,}25\ \Omega \cdot \text{m}$	0,04 (ohm-cm)$^{-1}$ $4\ (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$

Nota: 1 ohm-metro = 100 ohm-cm.

Disipación de la energía en una resistencia

- Sea $\vec{F}$ una fuerza para mover un portador de carga q en un campo $\vec{E}$
$$\vec{F} = q\vec{E}$$

- El trabajo de $\vec{F}$ por unidad de tiempo es (suponiendola estacionaria)
$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

- La energía potencial es transformada de este modo en calor y $P = \frac{dW}{dt}$ es la potencia disipada.

Disipación de la energía en una resistencia

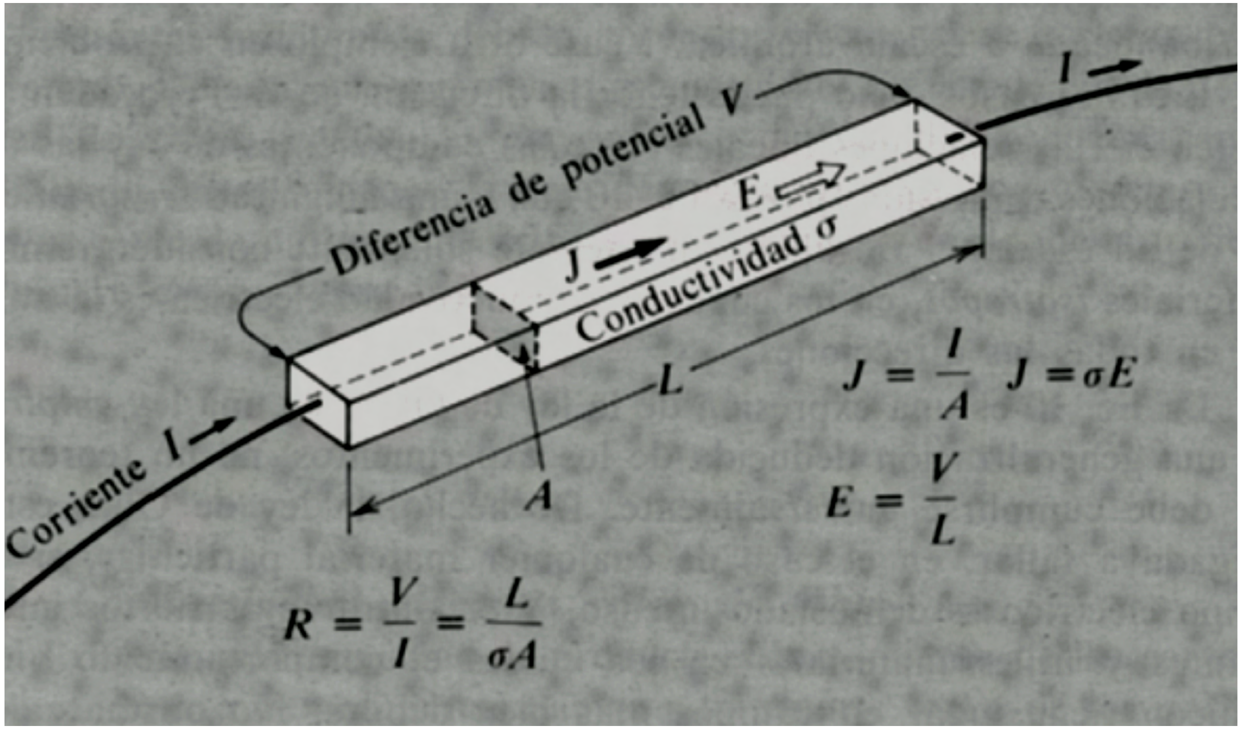
- Entonces en una dimensión y suponiendo que en Δt pasan N portadores de carga q por el área A

$$P = NqEv$$

donde $\Delta L = v\,\Delta t$

- Entonces por ley de Ohm

$$P = \frac{Nq\rho J\Delta L}{\Delta t}$$



Disipación de la energía en una resistencia

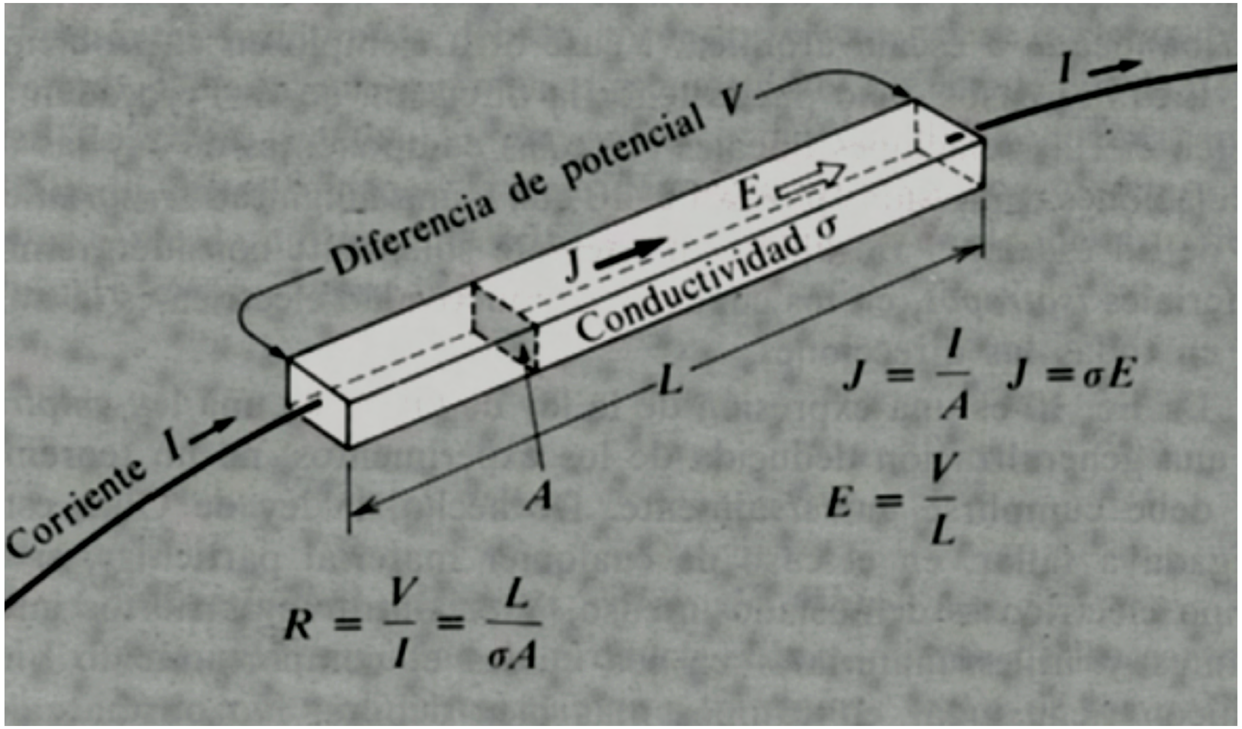
- Entonces como

$$I = \frac{Nq}{\Delta t} \;\; y \;\; J = \frac{I}{A}$$

$$P = \frac{I^2 \rho \Delta L}{A}$$

- Lo que equivale a

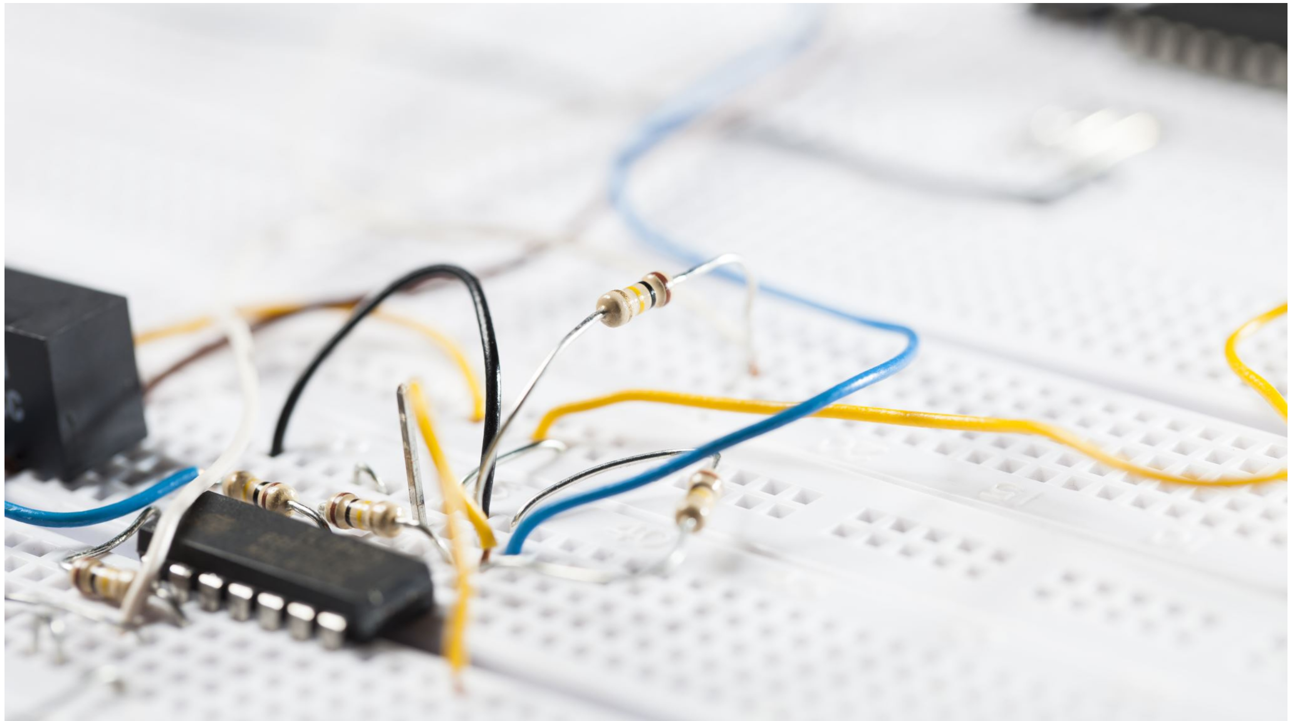
$$P = I^2 R$$



La potencia *P* o energía disipada por unidad de tiempo en SI se mide en Watts

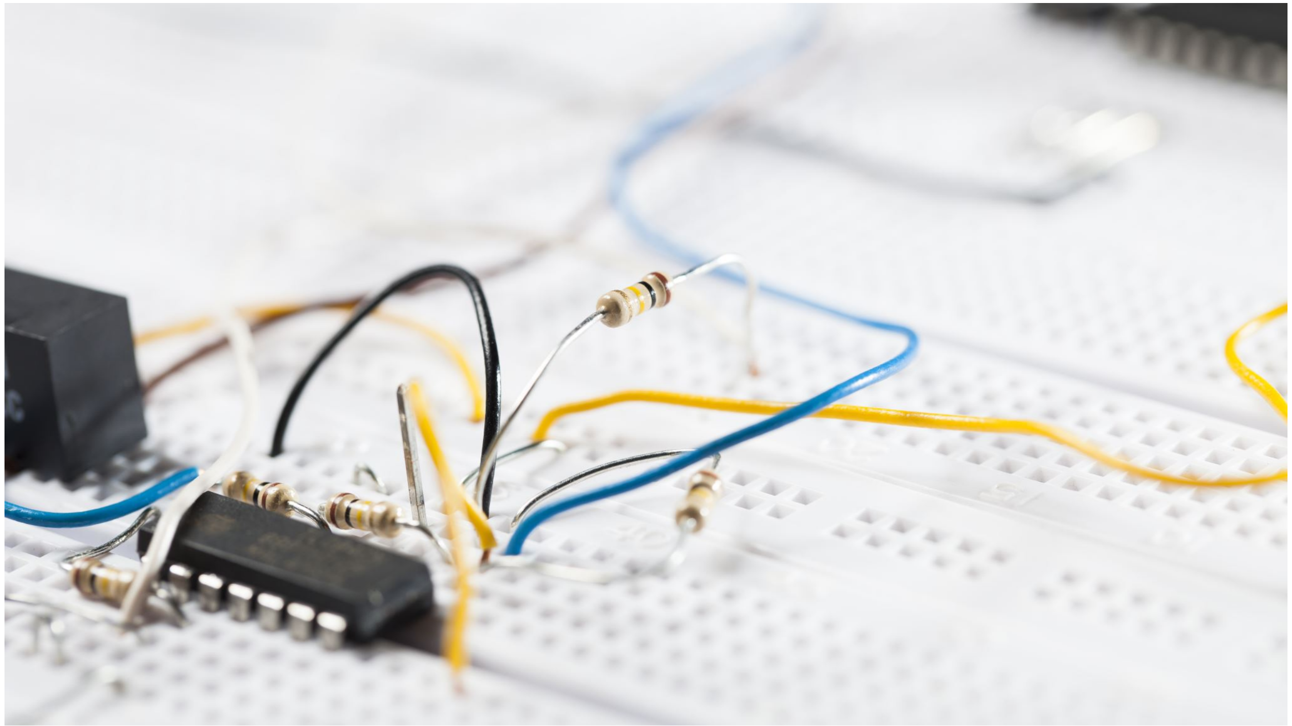
Circuitos

- Un circuito o red eléctrica es una agrupación de elementos unidos unos a otros por conductores de resistencia despreciable (cables).
- La corriente circula por el movida por una fuerza electromotriz.



Elementos de un Circuito

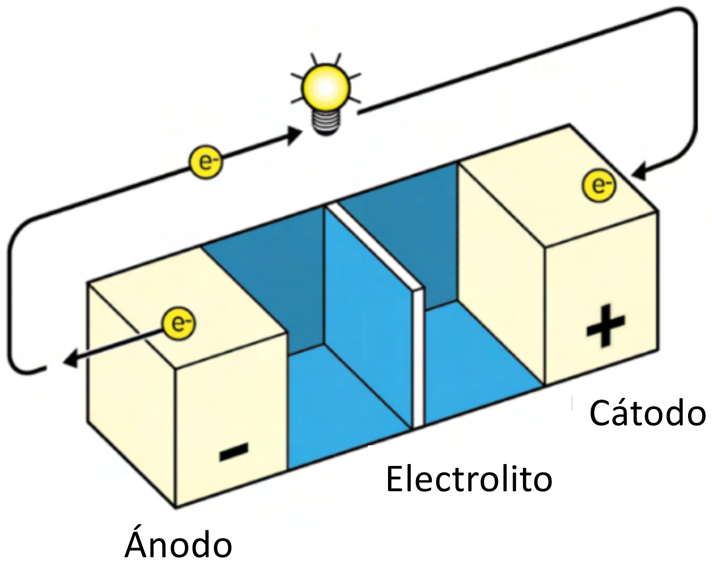
- Cables: Conductores perfectos, conducen corrientes sin resistencia.
- Fuerza electromotriz (FEM): diferencia de potencial que obliga a la corriente circular por el circuito.
- Elementos: Resistores, capacitores, diodos, LED, bobinas



Fuerza electromotriz (FEM) y baterías

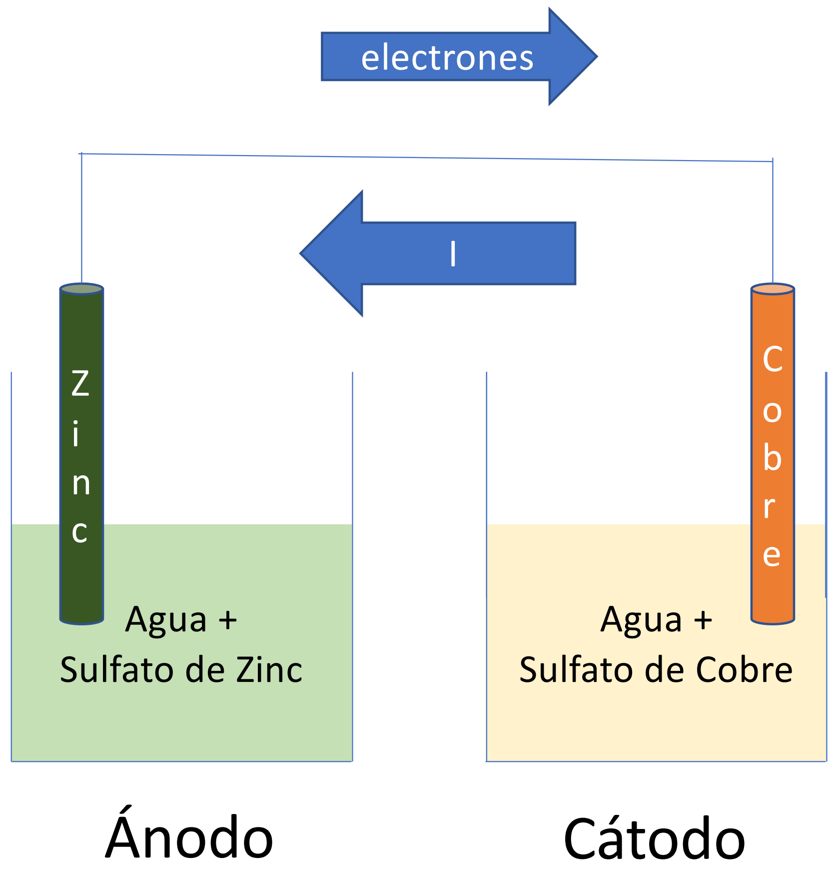
- La FEM es la diferencia de potencial generada por una fuente no eléctrica (o inducción)
- Las baterías producen FEM a partir de procesos químicos que ocurren en unidades llamadas celdas.

Principio de funcionamiento de una batería

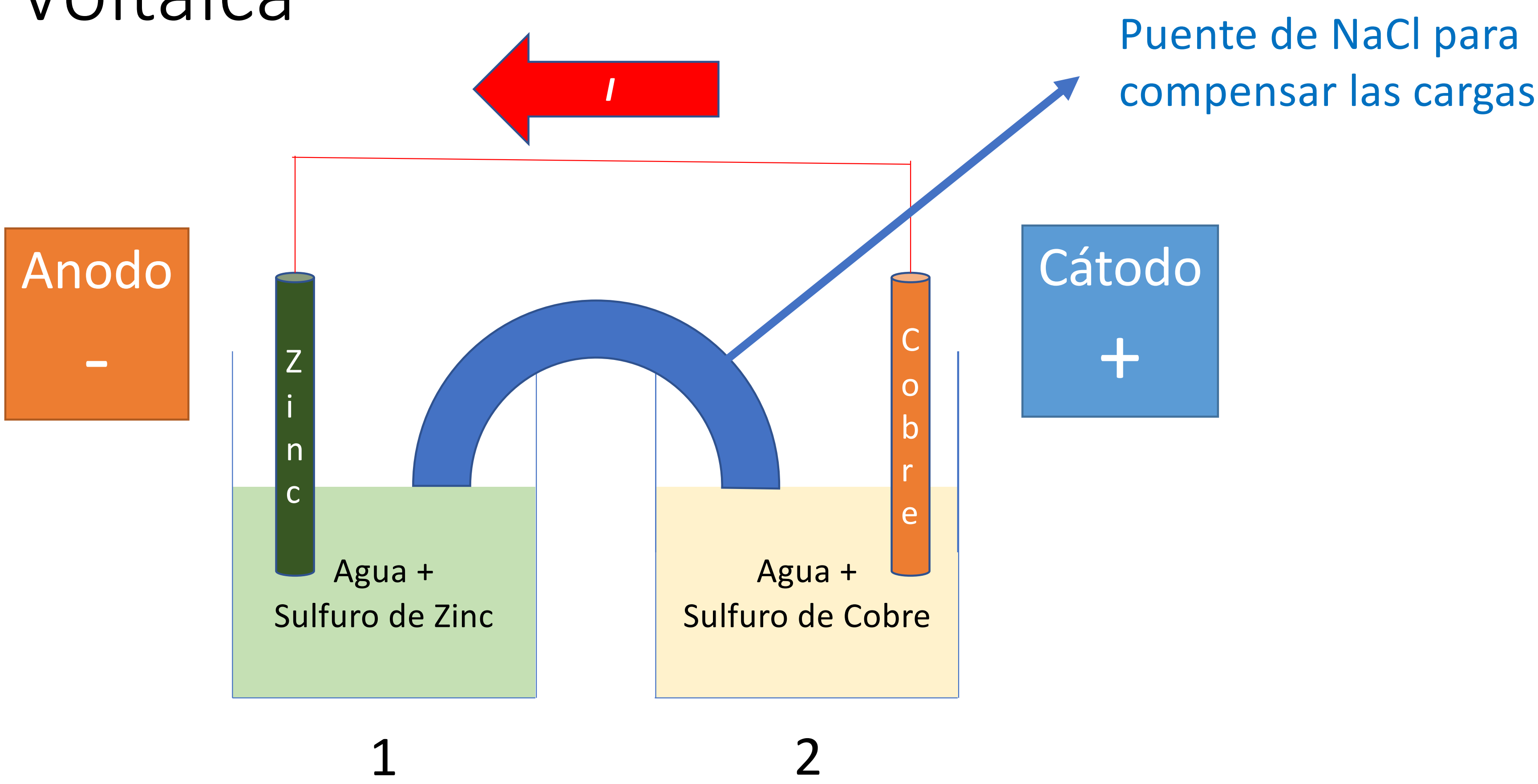


La pila Voltaica

- Basado en oxidación/reducción
- Los iones Cu^{++} en el recipiente 2 van a ser más fuertes en 'reclamar' electrones que los iones Zn^{++}.
- Electrones provenientes de la barra de Zn neutro (oxidación) van a viajar hacia la barra de cobre, creando una corriente I desde el cobre al zinc.
- Los electrones van a neutralizar los iones Cu^{++} que pasan a engrosar la barra del recipiente 2 (reducción).



La pila Voltaica

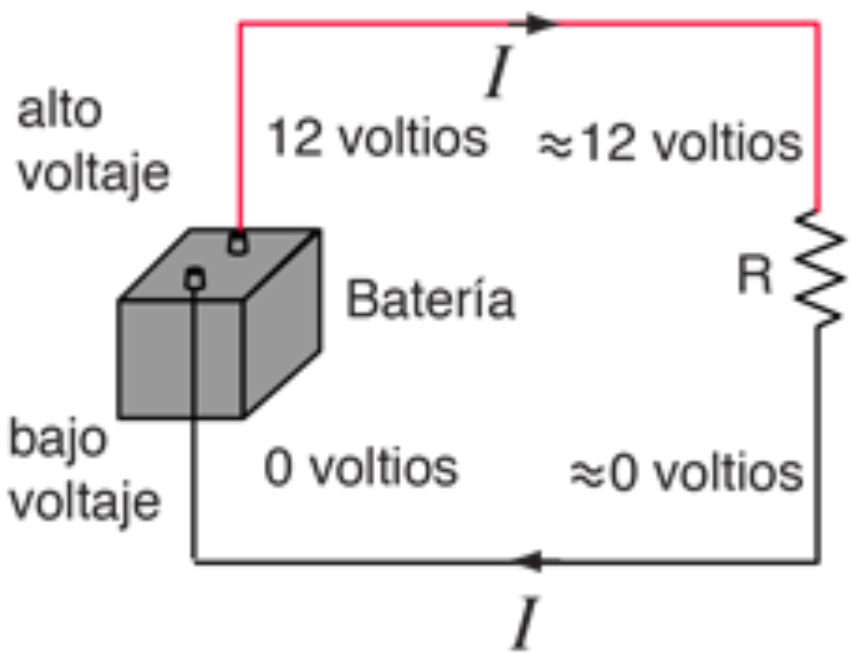


EMF máxima = 1.1V por celda

Leyes de Kirchhoff para circuitos estacionarios

- Conservación de la carga
- Conservación de la energía

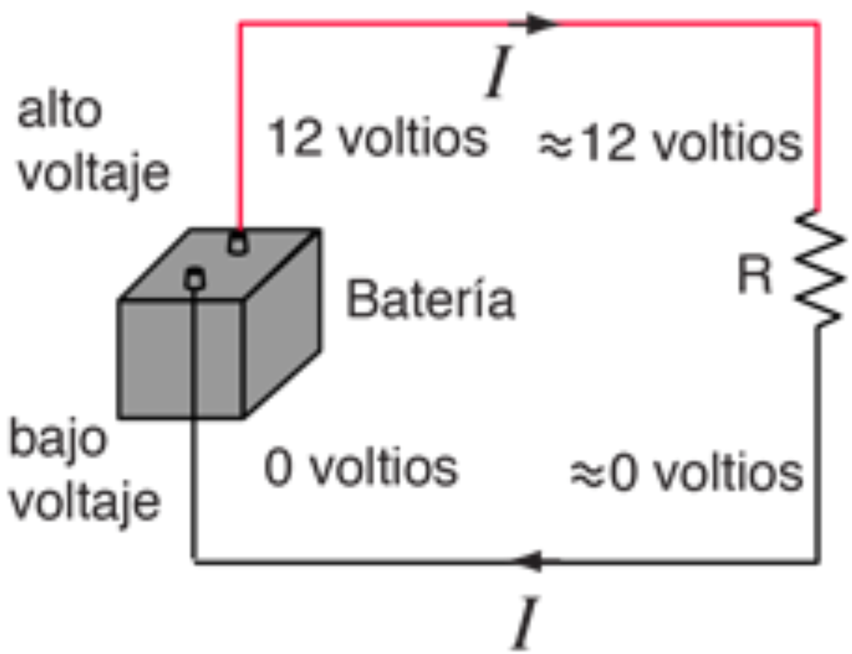
Ley de Kirchhoff de los voltajes



- El cambio neto de diferencia de potencial alrededor de cualquier bucle cerrado debe ser cero.

- Cualquier aumento de voltaje producido por la bateria debe ser seguido por una caida de voltaje para traerlo de vuelta al voltaje original

Ley de Kirchhoff de los voltajes

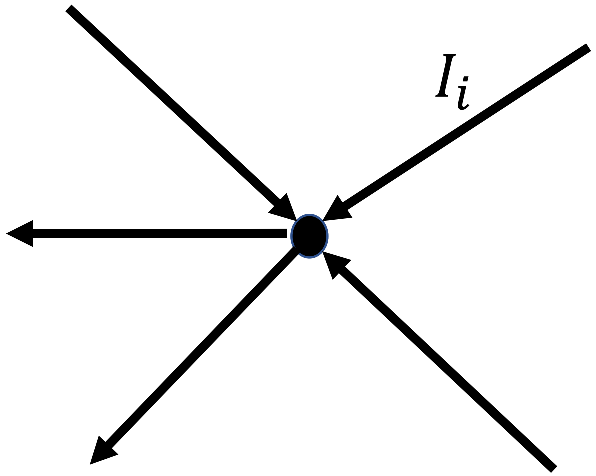


- La suma de variaciones de potencial en un lazo cerrado de un circuito es cero.

$$\sum_i V_i = 0$$

- Reglas y signos
  - Batería:
    - V > 0 al pasar del borne negativo al positivo.
    - V < 0 al pasar del borne positivo al negativo.
  - Resistencia
    - V > 0 al ir en contra de la corriente.
    - V < 0 al ir a favor de la corriente.

Ley de Kirchhoff de las corrientes



- En el circuito no se crea ni destruye carga

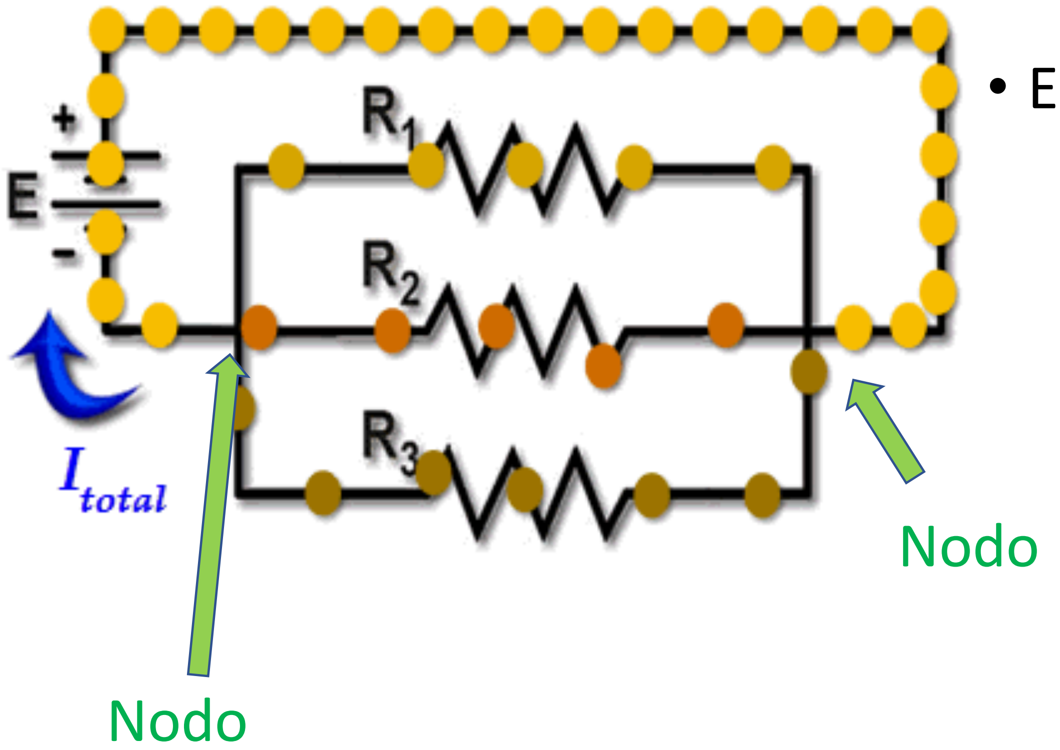
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

- En un nodo, la suma de todas las corrientes que llegan o salen de él debe ser igual a cero

$$\sum_i I_i = 0$$

- Equivalentemente, toda la corriente que llega, debe ser igual a la que sale

Ley de Kirchhoff de las corrientes



- En el ejemplo hay dos nodos

- En cada nodo se puede escribir:

$$I_{total} = I_1 + I_2 + I_3$$

o equivalentemente

$$I_{total} - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Resistencias en serie

- Entre los bornes hay una diferencia de potencial

$$V = V_1 + V_2$$

- Donde

$$V_1 = IR_1$$
$$V_2 = IR_2$$

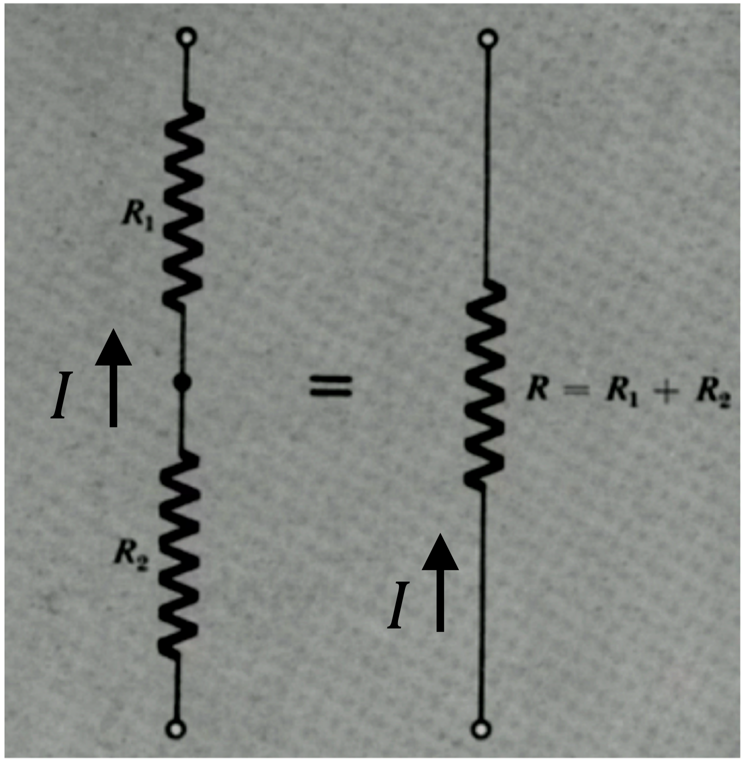
- Entonces

$$V = V_1 + V_2 = I(R_1 + R_2)$$

La caída de potencial equivale a la que ocurre a través de una resistencia

$$R = R_1 + R_2$$

Original Equivalente



$$R = R_1 + R_2$$

Resistencias en serie y paralelo

- Entre los bornes hay una diferencia de potencial V.
- Para cada rama tenemos

$$V = I_1 R_1 \qquad V = I_2 R_2$$

- Por conservación de la carga

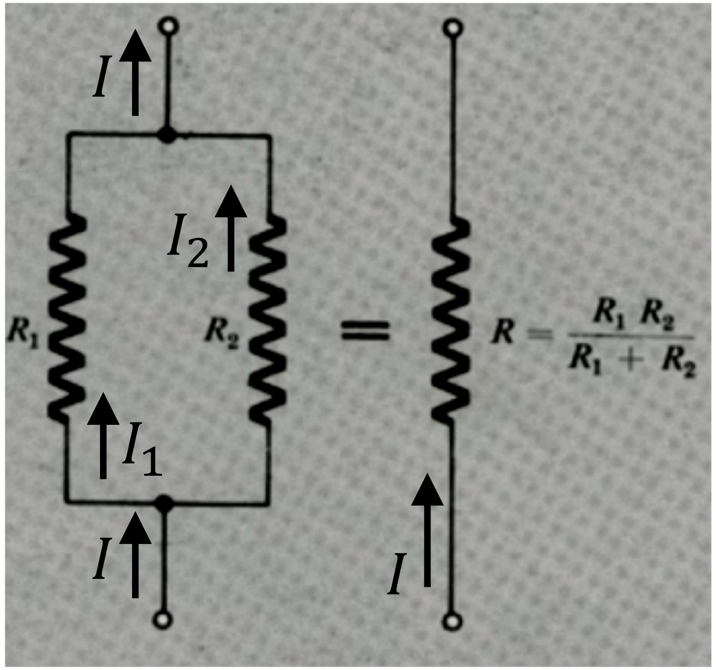
$$I = I_1 + I_2$$

- Entonces

$$\frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] = I$$

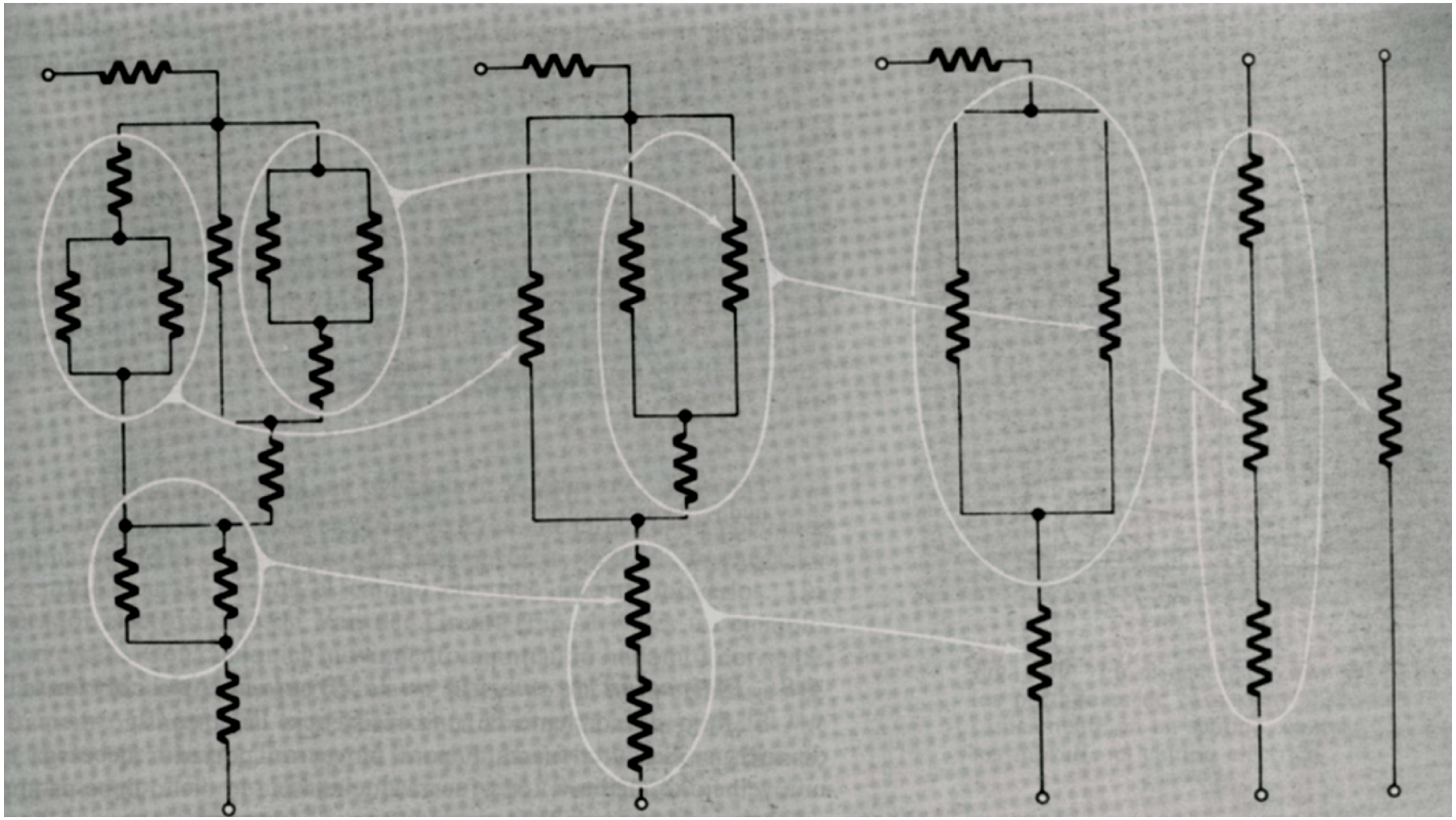
$$\frac{V}{R} = I$$

Original Equivalente



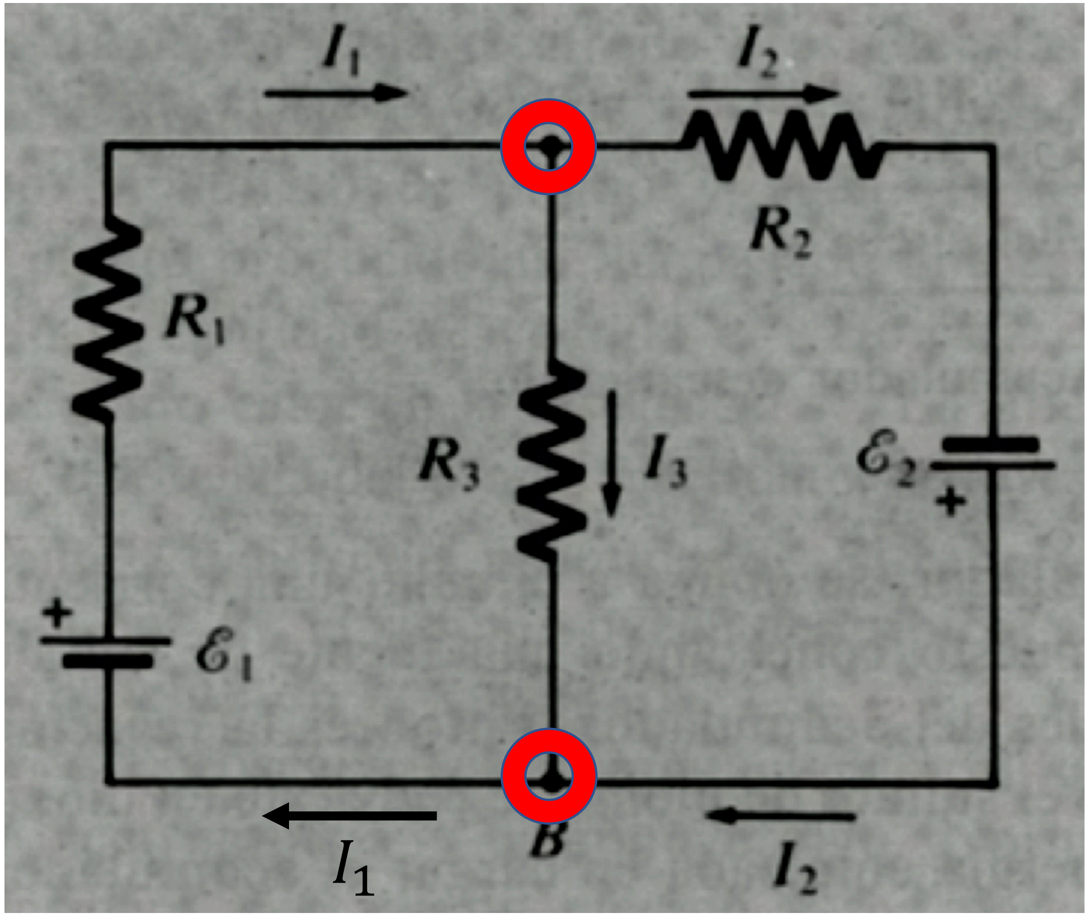
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Reducción de una red de resistencias



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

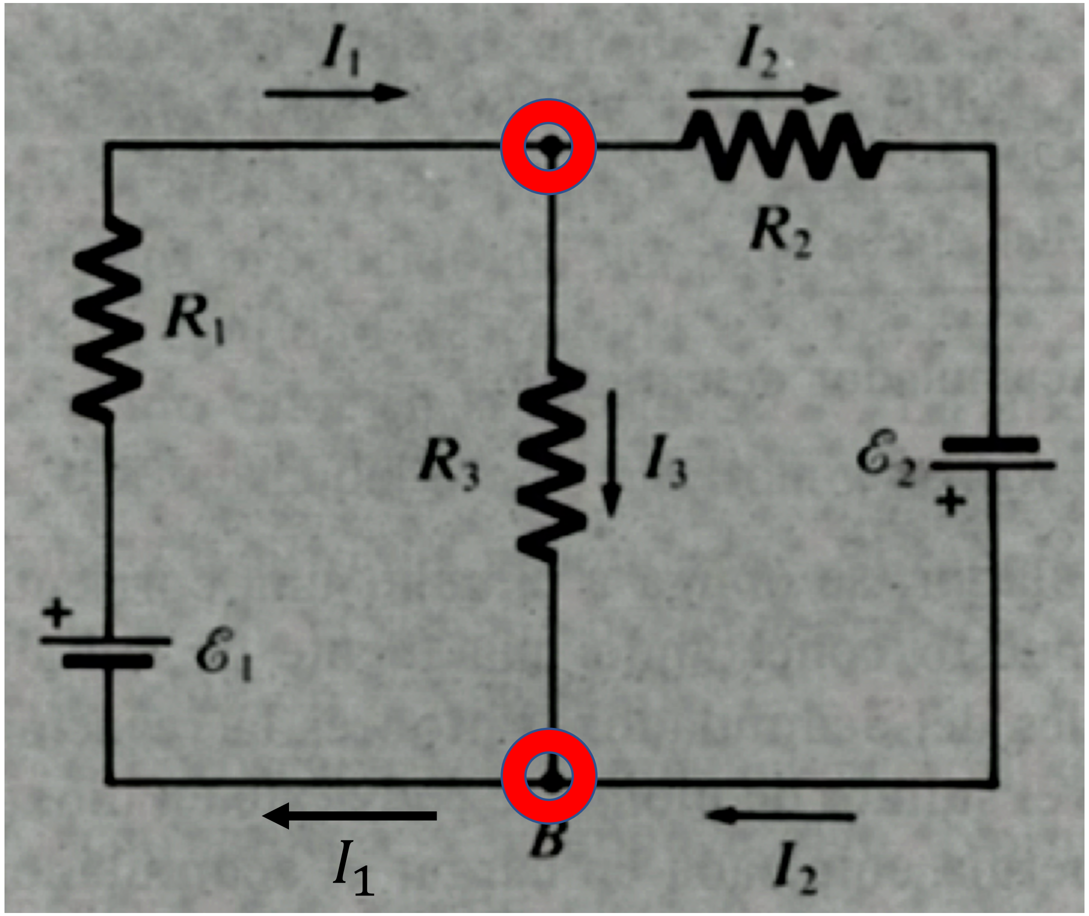
- Datos: las FEM ε_1y ε_2 y las resistencias R_1, R_2 y R_3.



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Datos: las FEM ε_1y ε_2 y las resistencias R_1, R_2 y R_3.

- En cada nodo de corriente, planteamos la ley de Kirchhoff para las corrientes

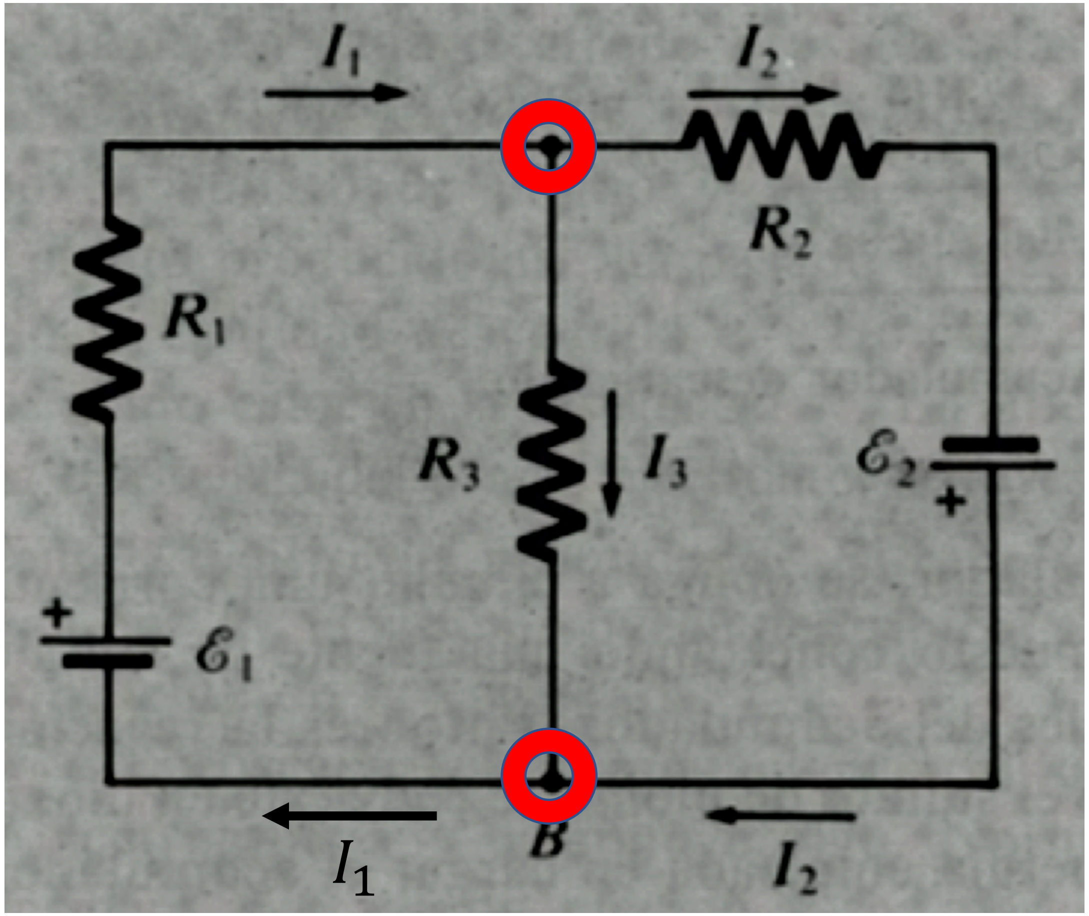


Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Datos: las FEM ε_1y ε_2 y las resistencias R_1, R_2 y R_3.

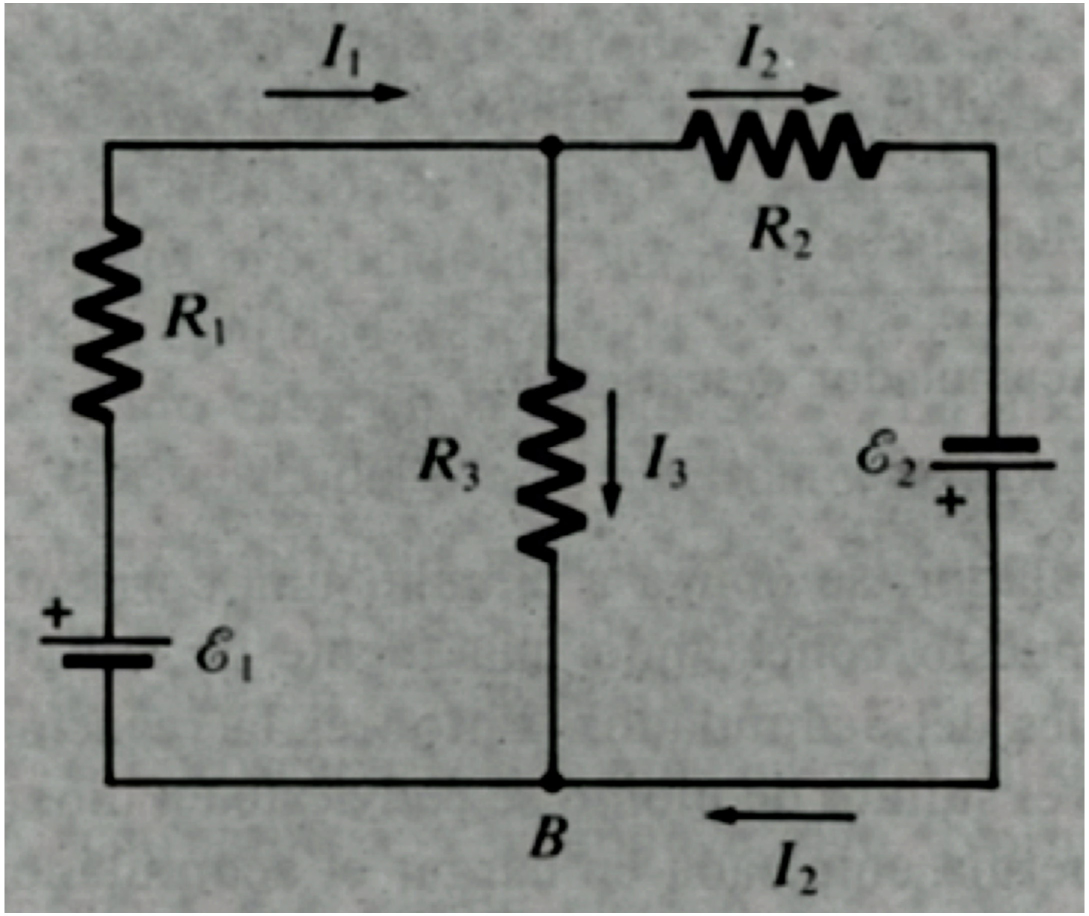
- En cada nodo de corriente, planteamos la ley de Kirchhoff para las corrientes

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

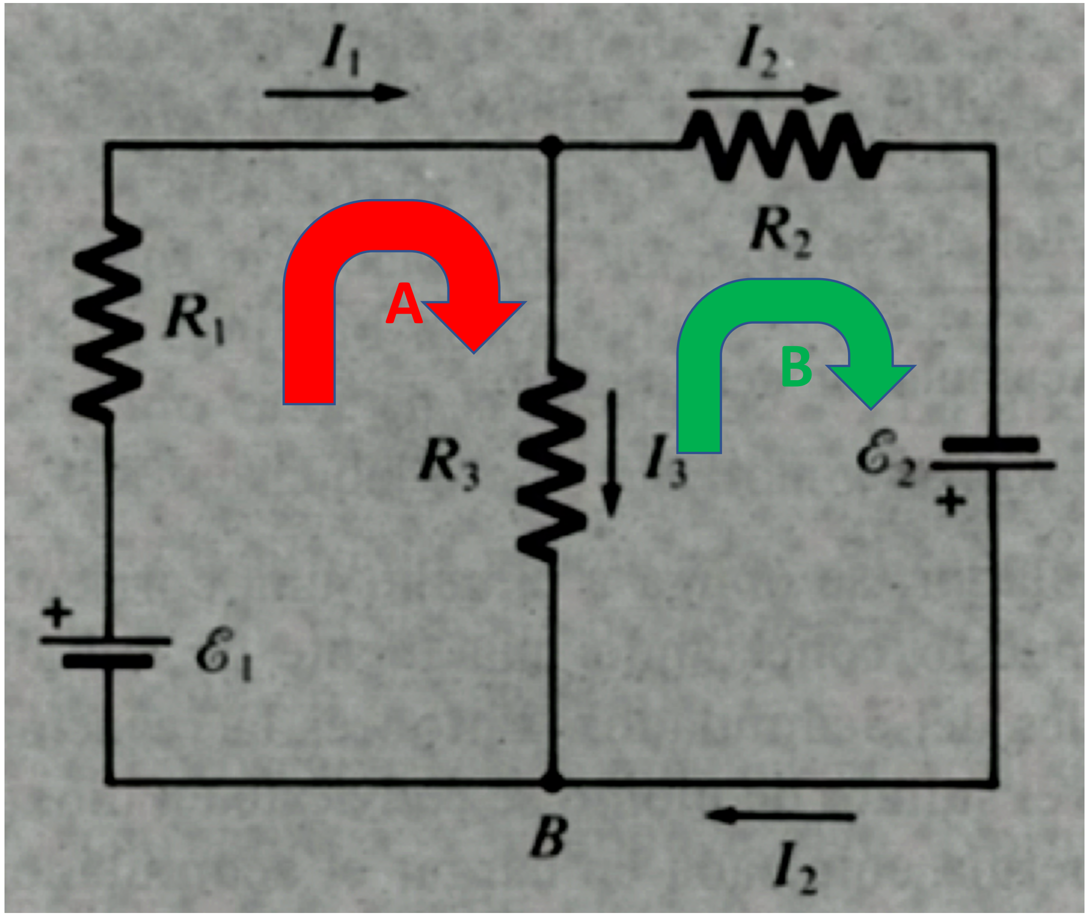
- Para calcular las corrientes, aplicamos la ley de Kirchhoff de los voltajes a dos lazos del circuito.



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Para calcular las corrientes, aplicamos la ley de Kirchhoff de los voltajes a dos lazos del circuito.

- Elegimos los lazos A y B, recorriéndolos en dirección de las flechas



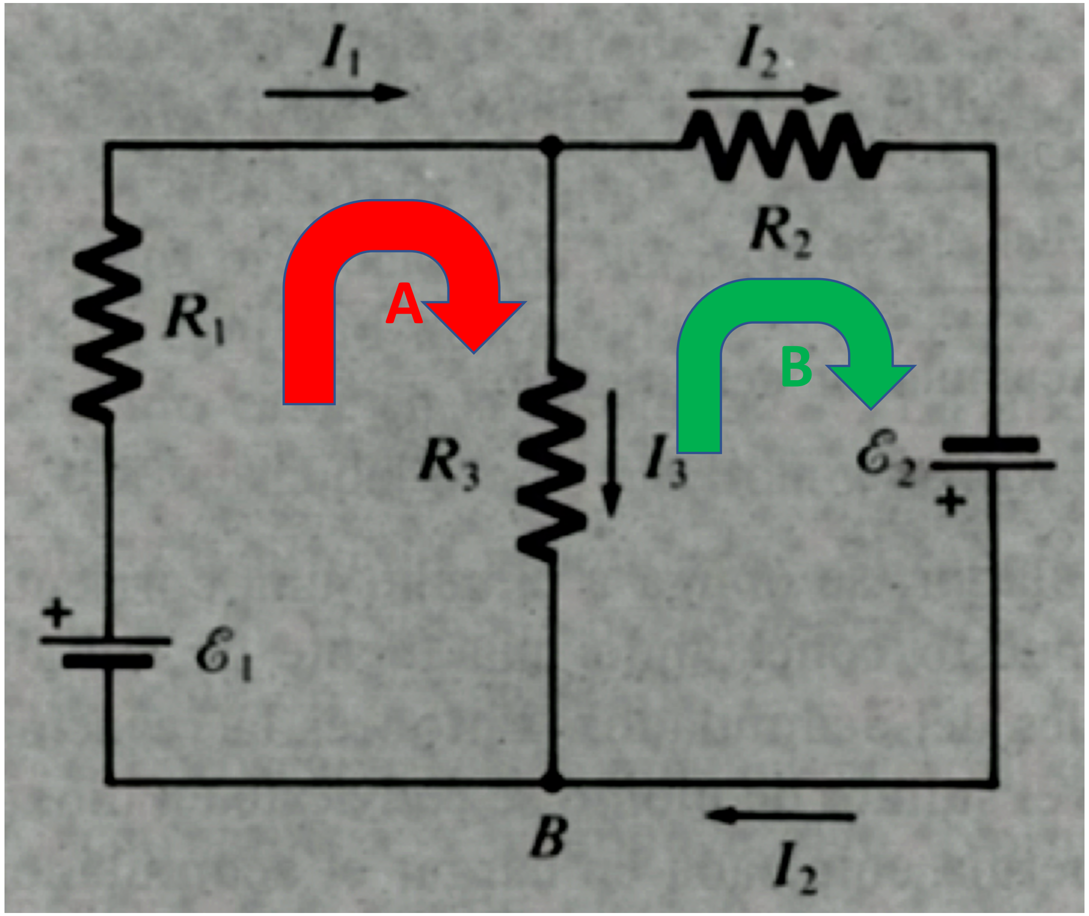
Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Lazo A:

$$\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

- Lazo B:

$$\mathcal{E}_2 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$$



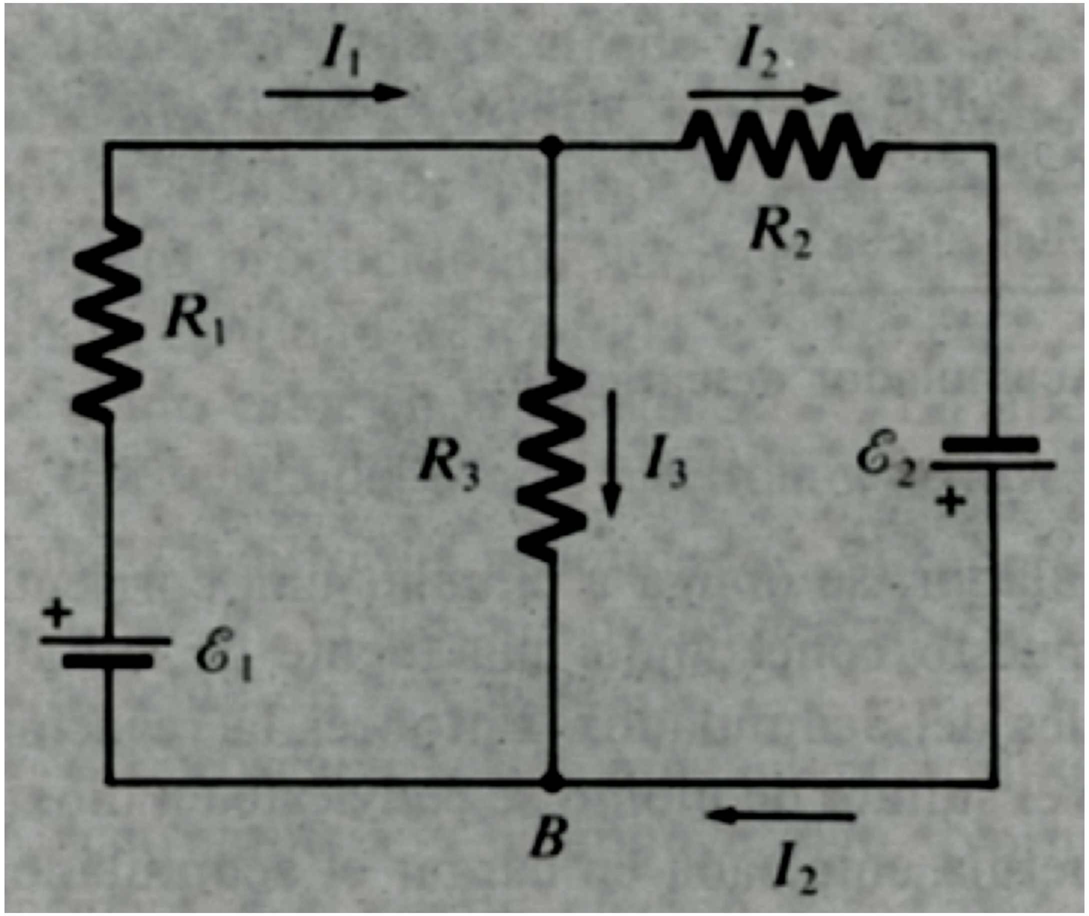
Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

$$\mathcal{E}_2 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$$



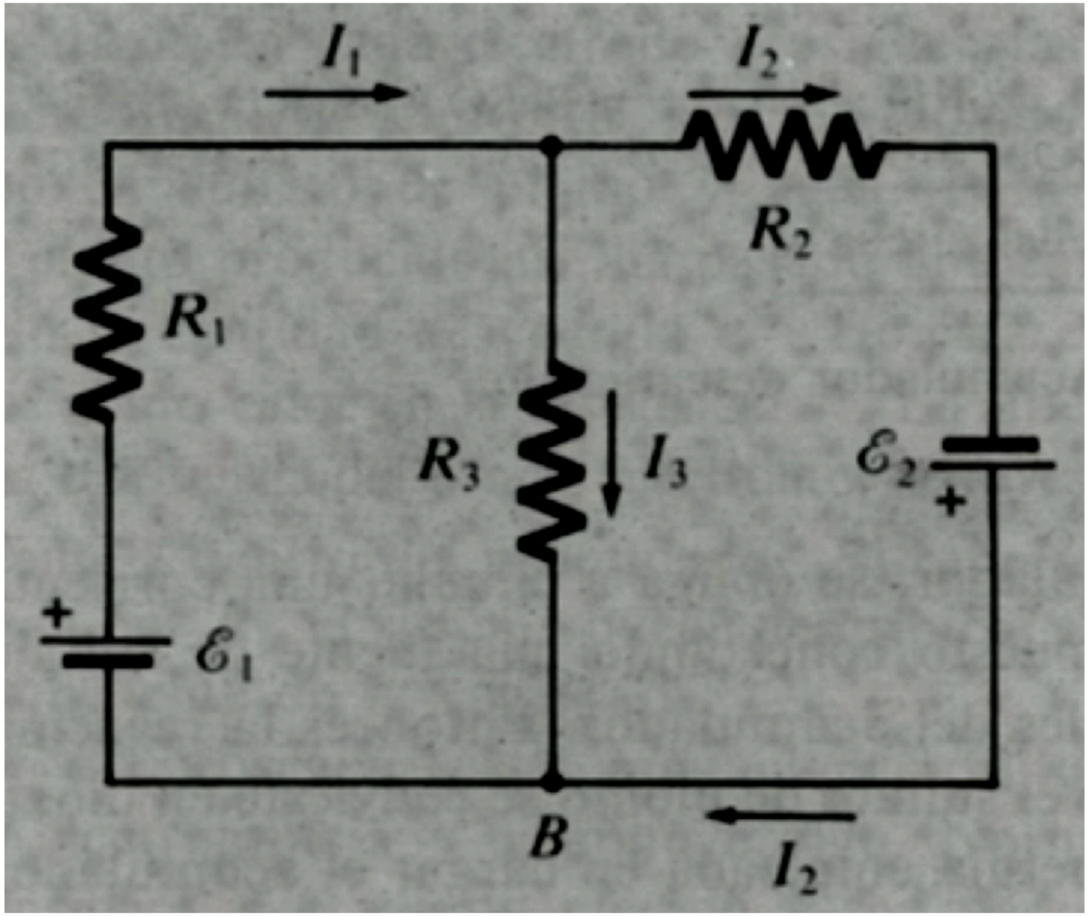
Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas

(1) $$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

(2) $$\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

(3) $$\mathcal{E}_2 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$$



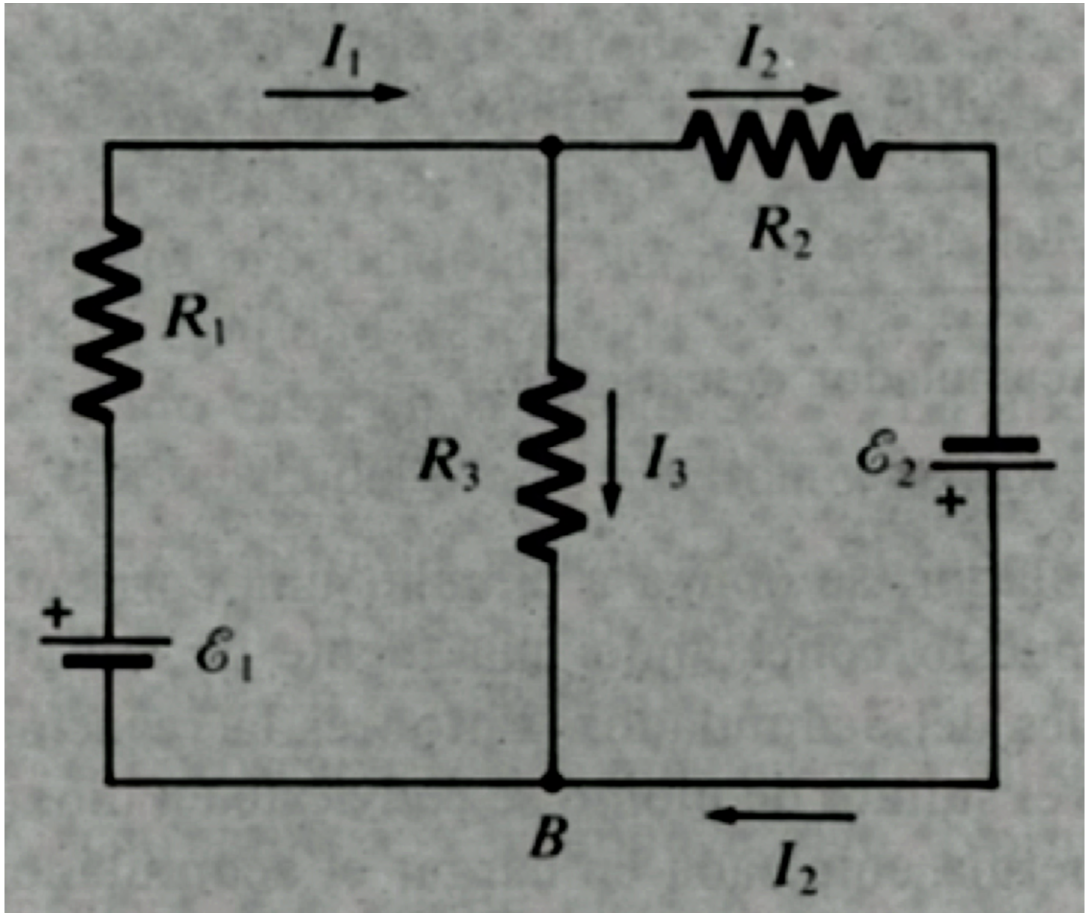
Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Reemplazando I_1 de (1) en (2) tenemos:

$$\varepsilon_1 - R_1 I_2 - R_1 I_3 - R_3 I_3 = 0$$

$$\varepsilon_1 - R_1 I_2 - (R_1 + R_3) I_3 = 0$$

(2')
$$I_2 = \frac{\varepsilon_1 - (R_1 + R_3) I_3}{R_1}$$



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

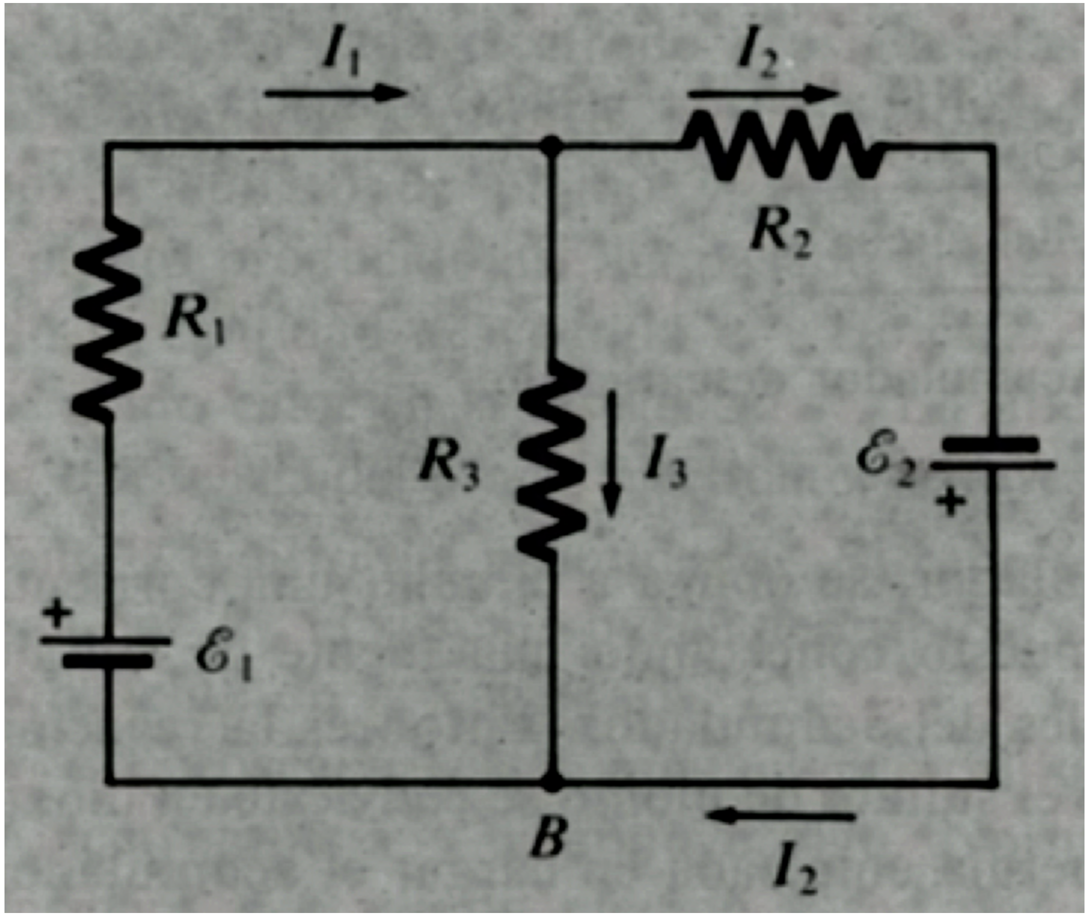
- Reemplazando I_2 de (2') en (3) tenemos:

$$\varepsilon_2 + R_3 I_3 - R_2 \frac{\varepsilon_1 - (R_1 + R_3) I_3}{R_1} = 0$$

$$R_1\varepsilon_2 + R_1R_3I_3 - R_2\varepsilon_1 + R_2(R_1+R_3)I_3 = 0$$

$$I_3(R_1R_3 + R_2R_1 + R_2R_3) = R_2\varepsilon_1 - R_1\varepsilon_2$$

$$I_3 = \frac{R_2\varepsilon_1 - R_1\varepsilon_2}{R_1R_3 + R_2R_1 + R_2R_3}$$



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

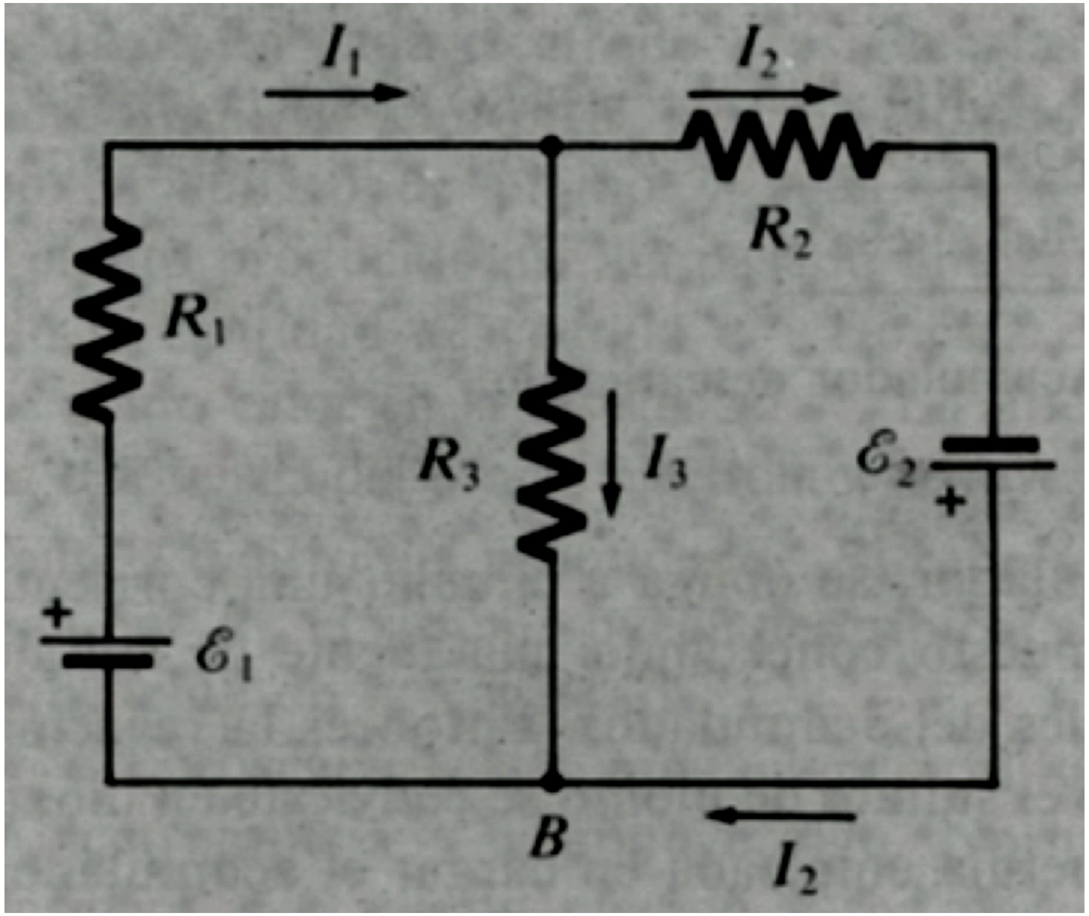
Las otras soluciones son:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_2 R_3 + \mathcal{E}_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

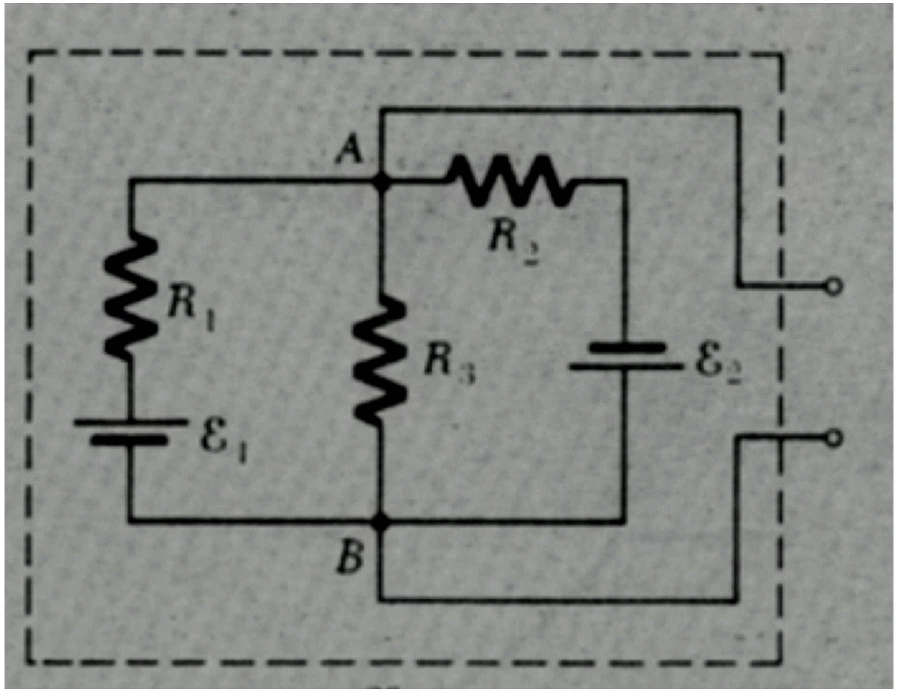
I_3 puede cambiar de dirección dependiendo de la relación entre las FEM, no así I_1 e I_2



Teorema de Thévenin

‘Cajas negras’ y el Teorema de Thévenin

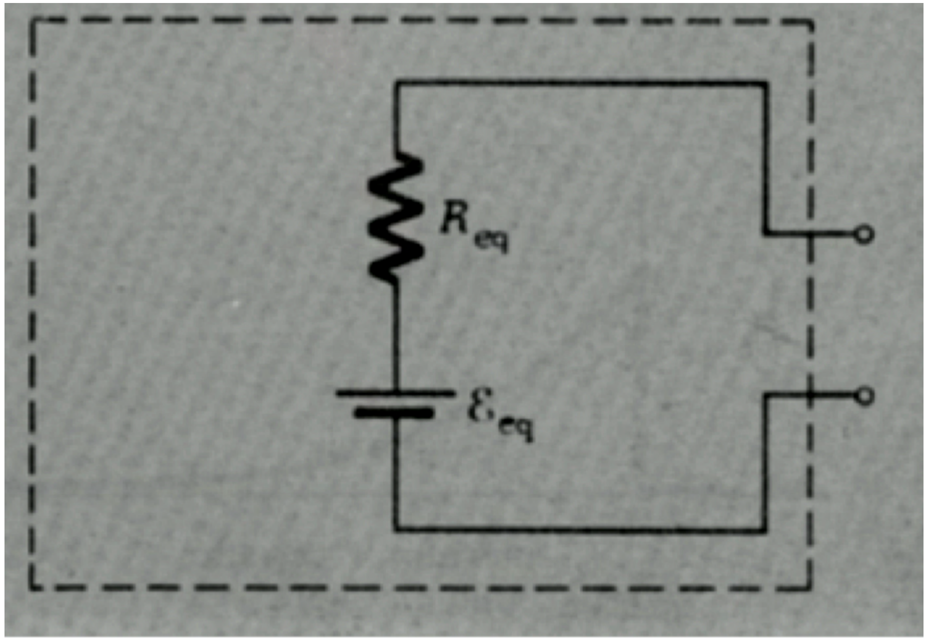
- Supongamos que el circuito que resolvimos se encuentra dentro de una caja negra que no podemos abrir y sólo es accesible a través de dos terminales conectadas a dos puntos del mismo.



‘Cajas negras’ y el Teorema de Thévenin

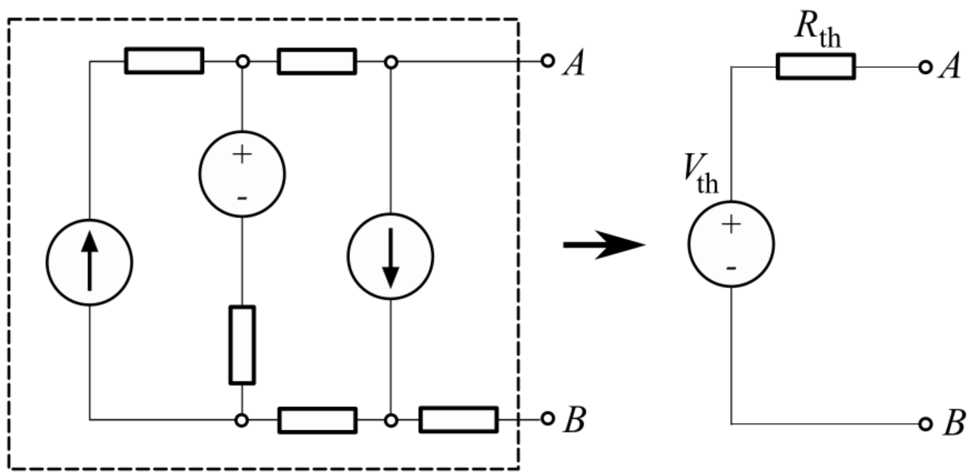
- Supongamos que el circuito que resolvimos se encuentra dentro de una caja negra que no podemos abrir y sólo es accesible a través de dos terminales conectadas a dos puntos del mismo.

- El **Teorema de Thévenin** dice que esta caja con terminales es equivalente a una sola fuente de voltaje ε_{eq} conectada en serie a una resistencia R_{eq}



Teorema de Thévenin

Si una parte de un circuito eléctrico lineal está comprendida entre dos terminales A y B, esta parte en cuestión puede sustituirse por un circuito equivalente que esté constituido únicamente por un generador de tensión en serie con una resistencia, de forma que al conectar un elemento entre los dos terminales A y B, la tensión que queda en él y la intensidad que circula son las mismas tanto en el circuito real como en el equivalente.

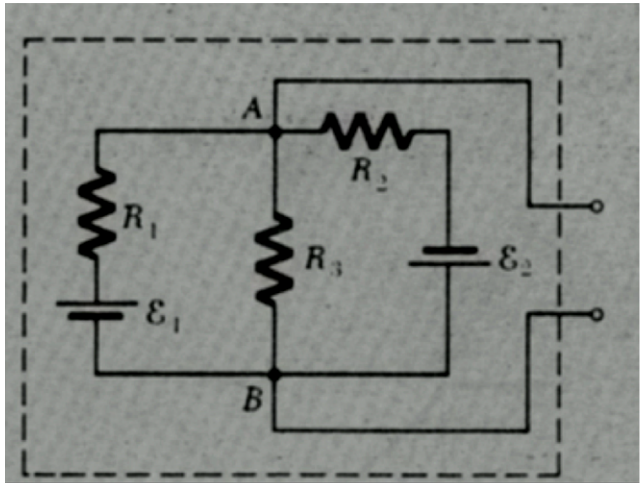


Léon Charles Thévenin
1857-1926

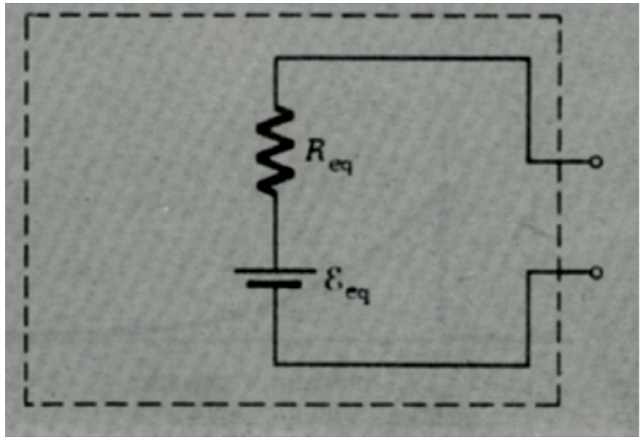
Esto se aplica a cualquier red de fuentes de voltaje y resistencias

‘Cajas negras’ y el Teorema de Thévenin

- Hallar ε_{eq} es simplemente medir la diferencia de potencial entre los terminales que salen de la caja.



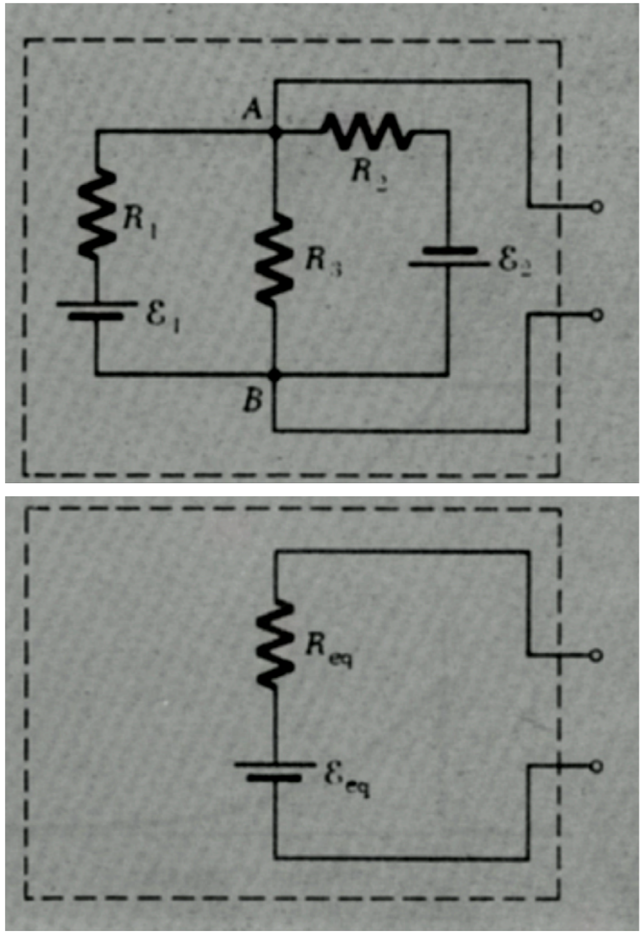
- Hallar R_{eq} es simplemente encontrar la resistencia equivalente de circuito reemplazando las fuentes por cables (cortocircuitando las fuentes)



‘Cajas negras’ y el Teorema de Thévenin

- En este caso $\varepsilon_{eq} = I_3 R_3$ donde

$$I_3 = \frac{R_2\varepsilon_1 - R_1\varepsilon_2}{R_1R_3 + R_2R_1 + R_2R_3}$$



‘Cajas negras’ y el Teorema de Thévenin

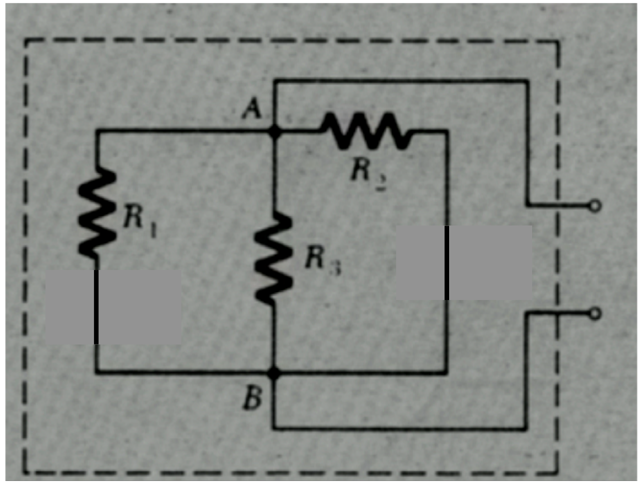
- En este caso $\varepsilon_{eq} = I_3 R_3$ donde

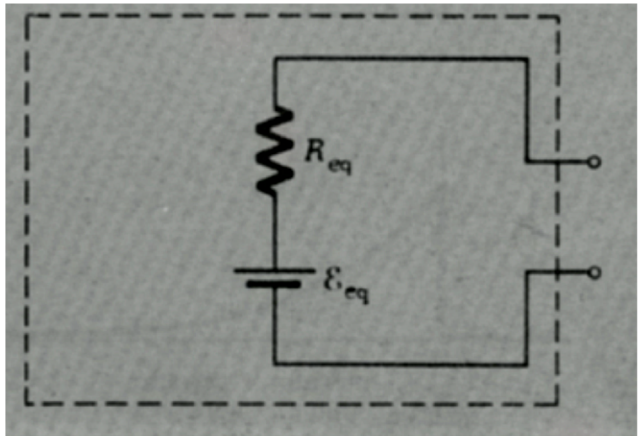
$$I_3 = \frac{R_2\varepsilon_1 - R_1\varepsilon_2}{R_1R_3 + R_2R_1 + R_2R_3}$$

- Al cortocircuitar las fuentes ε_1 y ε_2 quedan R_1 R_2 y R_3 en paralelo. Por lo tanto:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

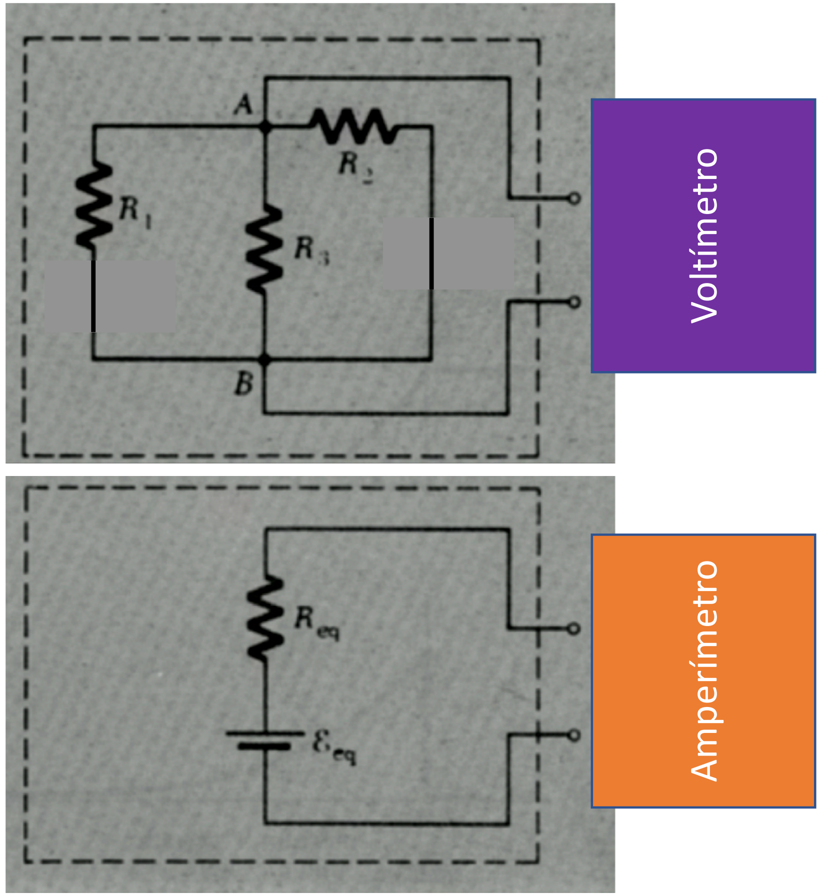




‘Cajas negras’ y el Teorema de Thévenin

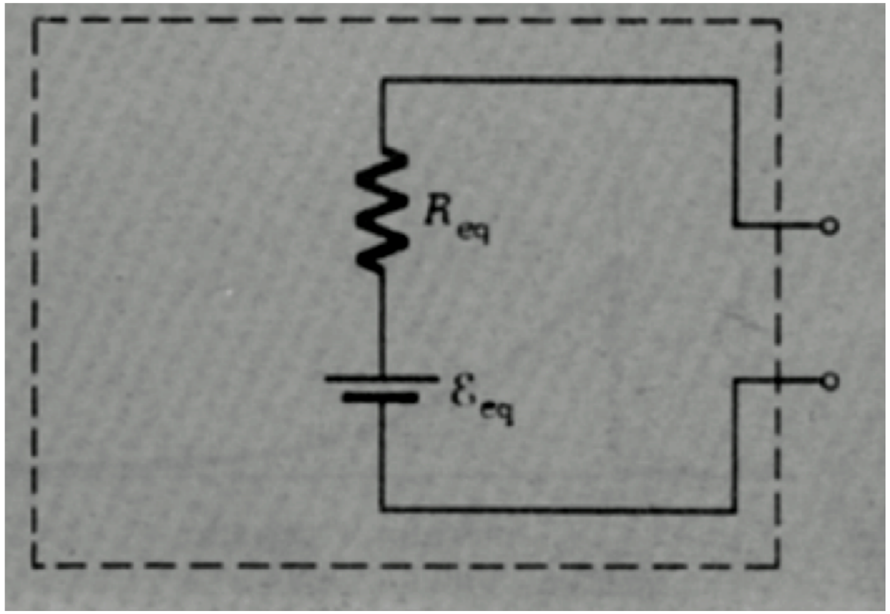
- Si no sé qué hay adentro ε_{eq} se obtiene midiendo la diferencia de potencial entre los dos terminales.
- Como no hay corriente pues el circuito está abierto, la diferencia de potencial es efectivamente ε_{eq}.
- Para obtener R_{eq} habiendo calculado ε_{eq} se coloca un amperímetro entre los terminales y se mide la corriente en cortocircuito I_c, entonces:

$$\varepsilon_{eq} = I_c\, R_{eq}$$



Teorema de Thévenin y fuentes

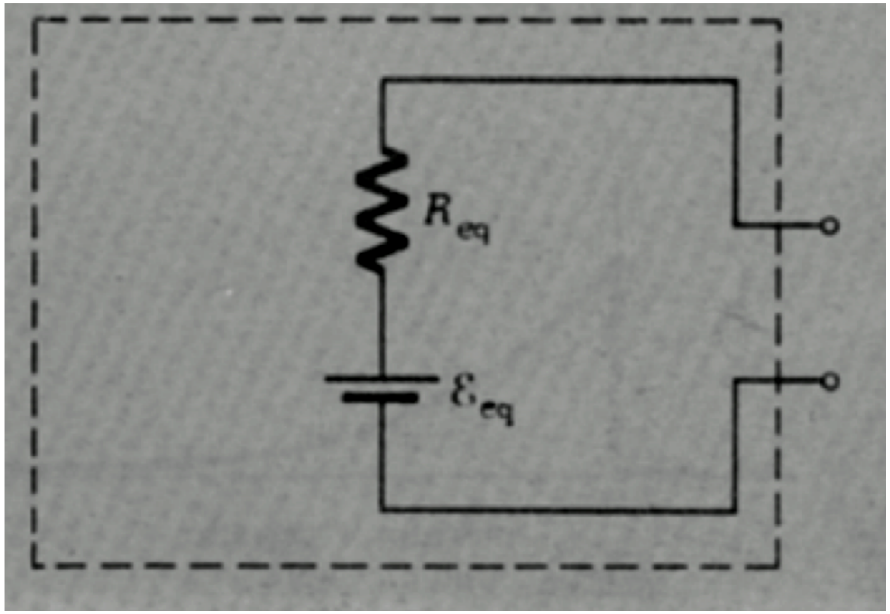
- La simplificación de un circuito a través del Teorema de Thévenin permite aplicarlo a circuitos que trabajan como fuentes



Teorema de Thévenin y fuentes

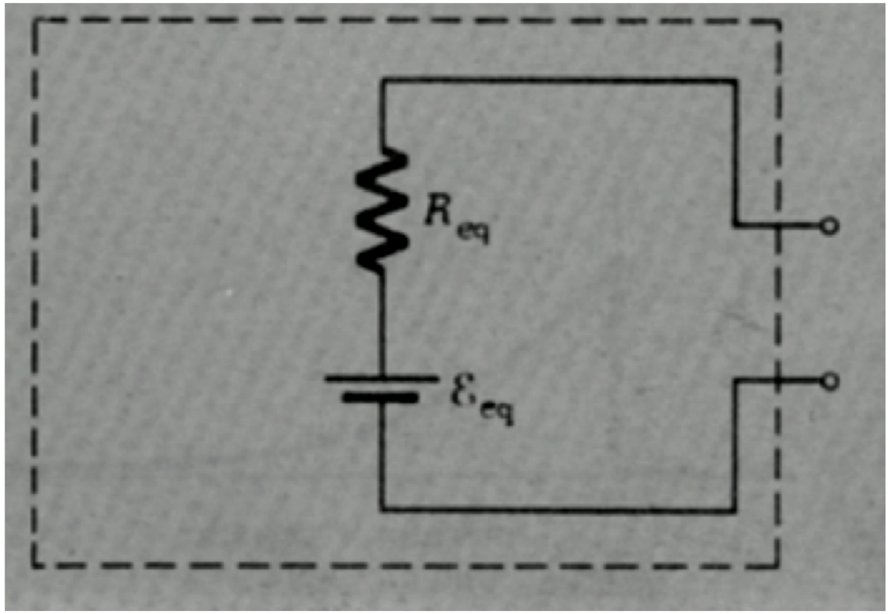
- La simplificación de un circuito a través del Teorema de Thévenin permite aplicarlo a circuitos que trabajan como fuentes

- Las fuentes normalmente traen asociada una resistencia interna



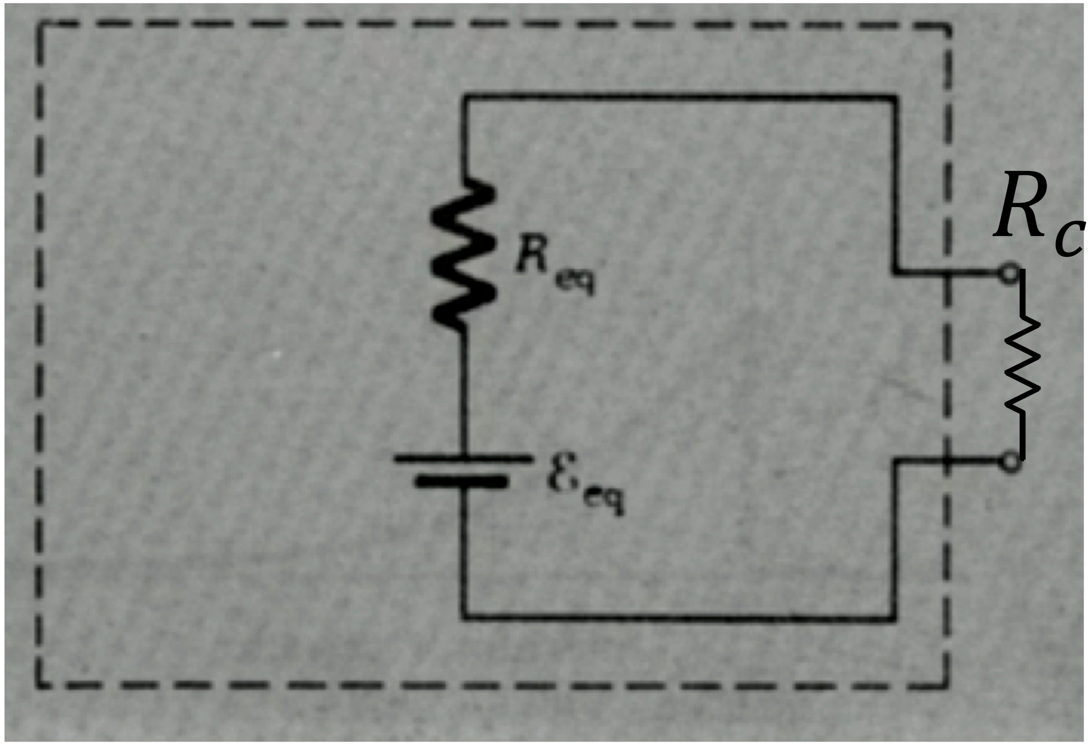
Teorema de Thévenin y fuentes

- La simplificación de un circuito a través del Teorema de Thévenin permite aplicarlo a circuitos que trabajan como fuentes
- Las fuentes normalmente traen asociada una resistencia interna
- Por lo tanto si lo usamos como fuente para alimentar otro circuito, tendremos una FEM de valor ε_{eq} y resistencia interna R_{eq}



Teorema de potencia máxima

- Supongamos que colocamos una resistencia llamada 'de carga' R_c entre los terminales de un circuito / fuente de FEM y resistencia equivalentes ε_{eq} y R_{eq} .
- El **teorema de la potencia máxima** dice que la máxima potencia que puede disipar R_c se da cuando $R_c = R_{eq}$

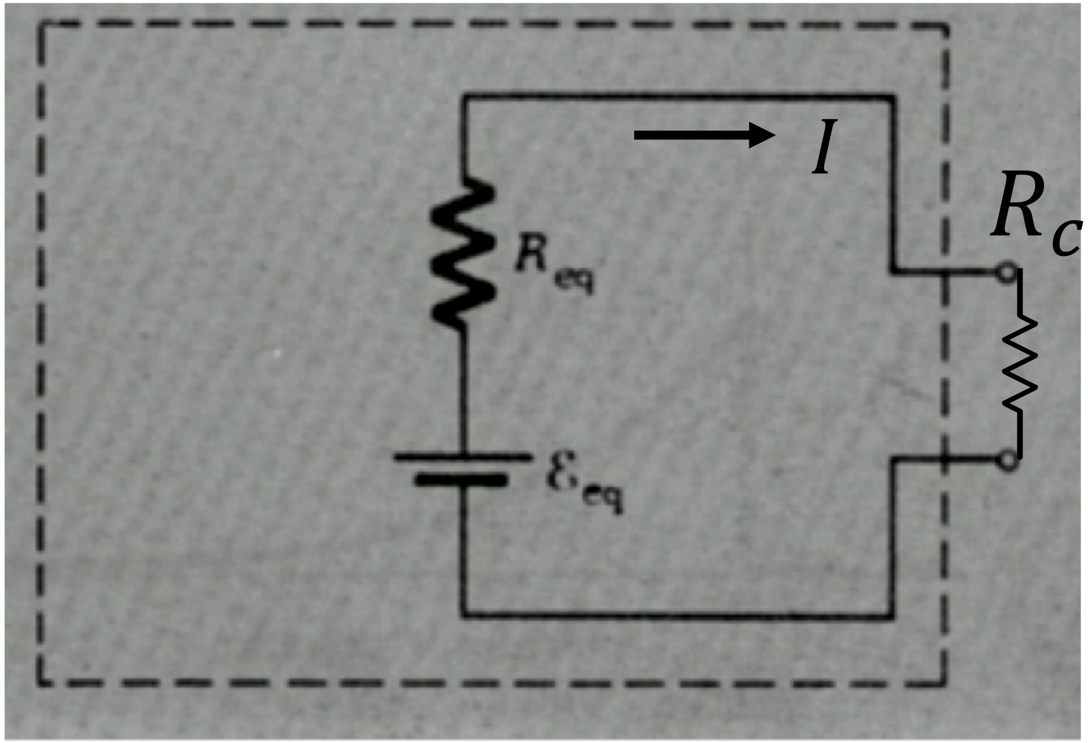


Teorema de potencia máxima

- Esto se demuestra escribiendo la potencia disipada en R_c.

$$P_c = R_c I^2$$

donde I es la corriente que pasa por R_c



Teorema de potencia máxima

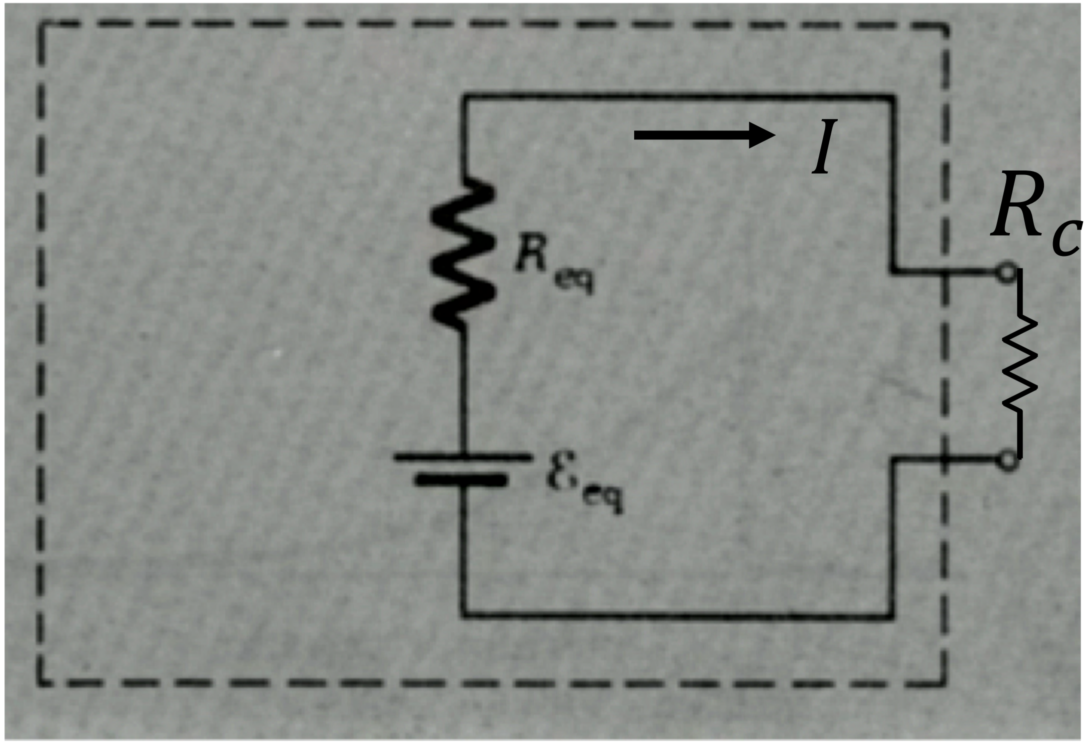
- Esto se demuestra escribiendo la potencia disipada en R_c.

$$P_c = R_c I^2$$

donde I es la corriente que pasa por R_c

- Aplicando Kirchhoff

$$I = \frac{\varepsilon_{eq}}{(R_c + R_{eq})}$$



Teorema de potencia máxima

- Esto se demuestra escribiendo la potencia disipada en R_c.

$$P_c = R_c I^2$$

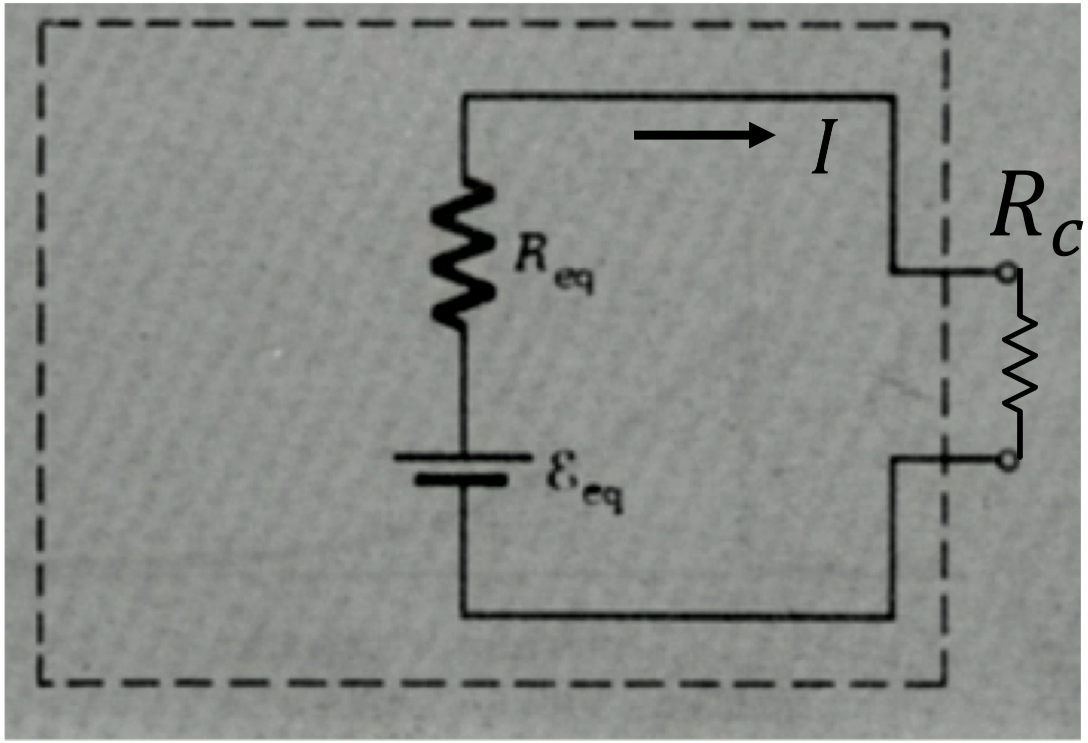
donde I es la corriente que pasa por R_c

- Aplicando Kirchhoff

$$I = \frac{\varepsilon_{eq}}{(R_c + R_{eq})}$$

entonces

$$P_c = R_c \left[\frac{\varepsilon_{eq}}{(R_c + R_{eq})}\right]^2$$



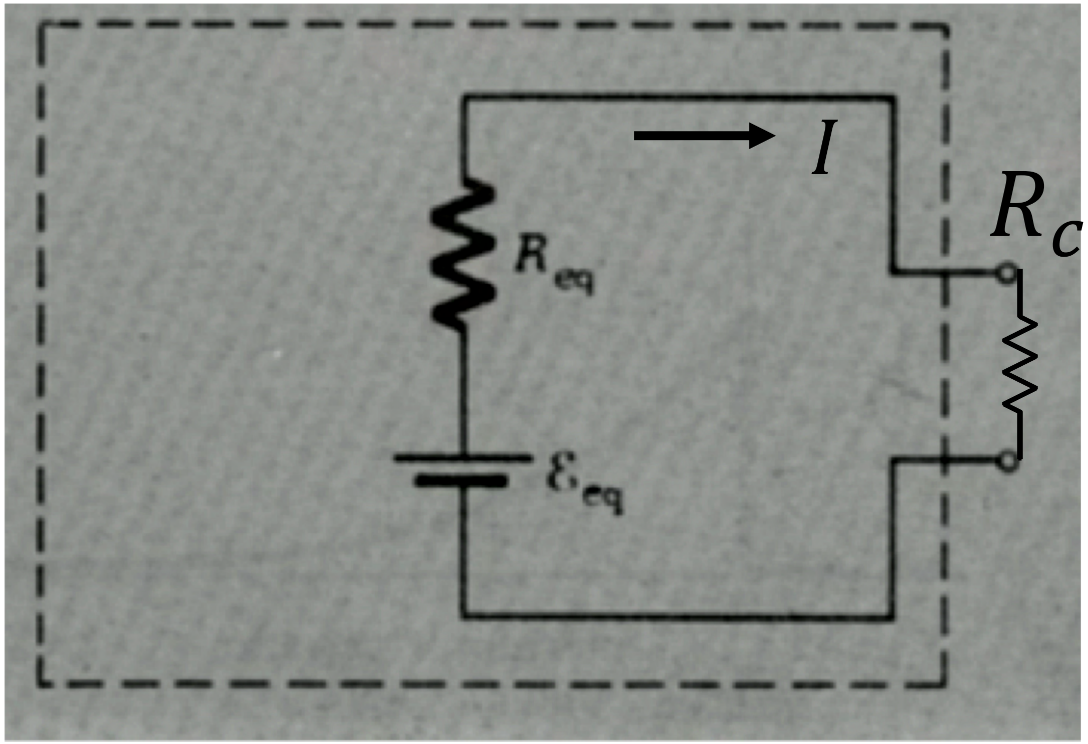
Teorema de potencia máxima

- Efectivamente, el máximo de esta función tiene lugar cuando ocurre cuando

$$R_c = R_{eq}$$

y vale:

$$P_{cmax} = \frac{{\varepsilon_{eq}}^2}{4R_{eq}}$$



Problema

- Demostrar que el máximo de esta función tiene lugar cuando $R_c = R_{eq}$

$$P_c(R_c) = R_c \left[\frac{\varepsilon_{eq}}{(R_c + R_{eq})} \right]^2$$