

Circuito RLC en transitorio

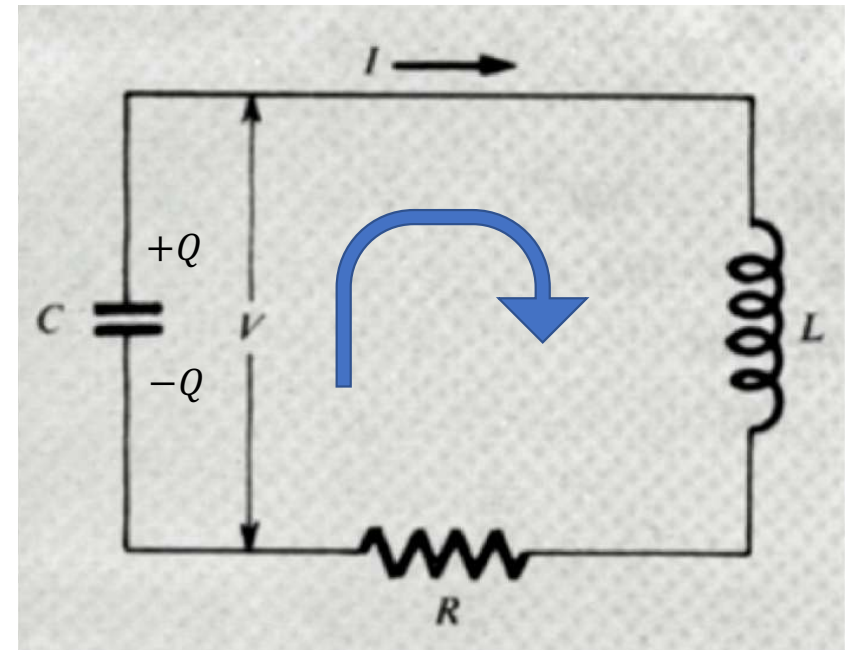
Circuito RLC en serie

- Supongamos el siguiente circuito con inductancia L , capacitor de capacidad C y resistencia R .
- Calculemos la diferencia de potencial V en el capacitor.
- Supogamos que el capacitor tiene una carga $+Q$ en la placa superior y se descarga

$$I = - \frac{dQ}{dt} \quad Q = CV$$

- Entonces Faraday en el sentido de I queda:

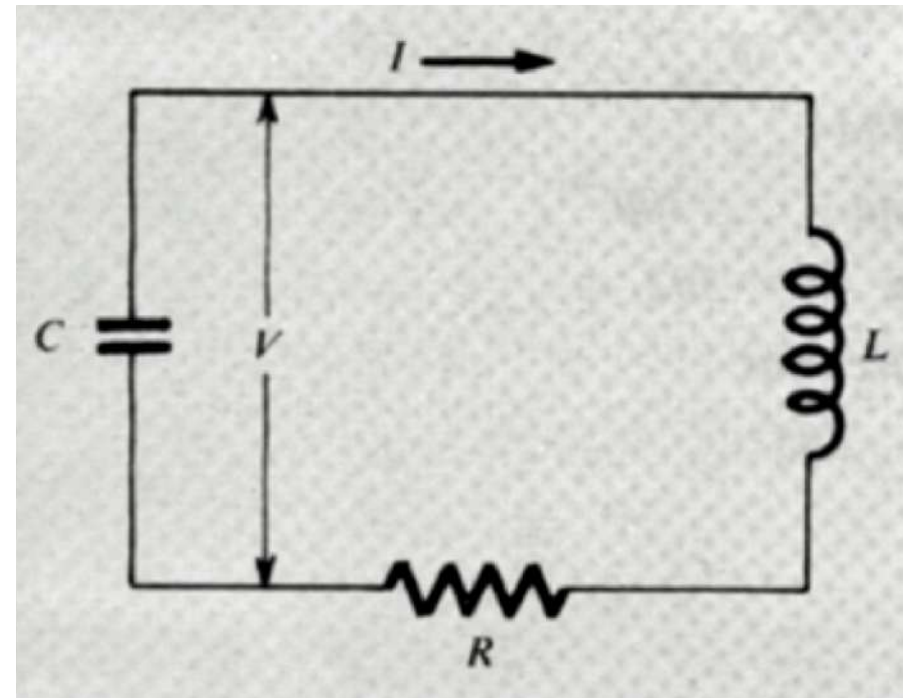
$$V = L \frac{dI}{dt} + RI$$



Circuito RLC en serie

- Poniendo todo en función de V llegamos a la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden a coeficientes constantes:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right) \frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right) V = 0$$



Ecuación diferencial homogénea de segundo orden a coeficientes constantes (a, b, c)

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

Polinomio característico

$$y = C_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + C_2 e^{\lambda t} \sin \mu t.$$

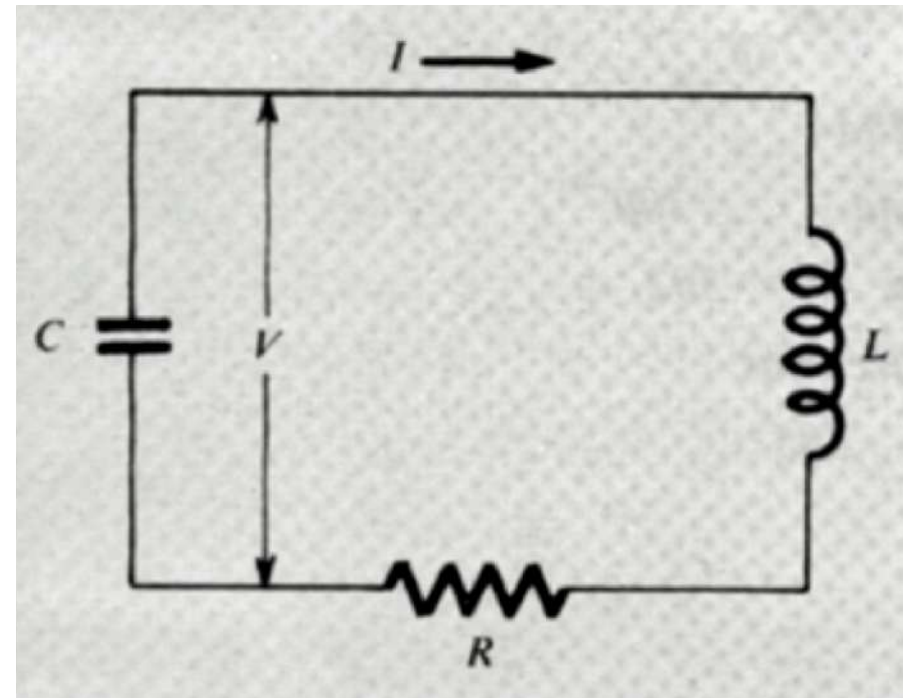
Donde $r = \lambda \pm i\mu$ con $\mu > 0$ son las dos raíces complejas del polinomio característico

Circuito RLC en serie

- Entonces la solución general es

$$V(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

- Donde $-\alpha \pm i\omega$ son las raíces del polinomio característico
- A y B dependen de las condiciones iniciales.
- De hecho, dependiendo de cuándo comenzamos a medir el tiempo es posible quedarse con sólo $\cos \omega t$ o $\sin \omega t$



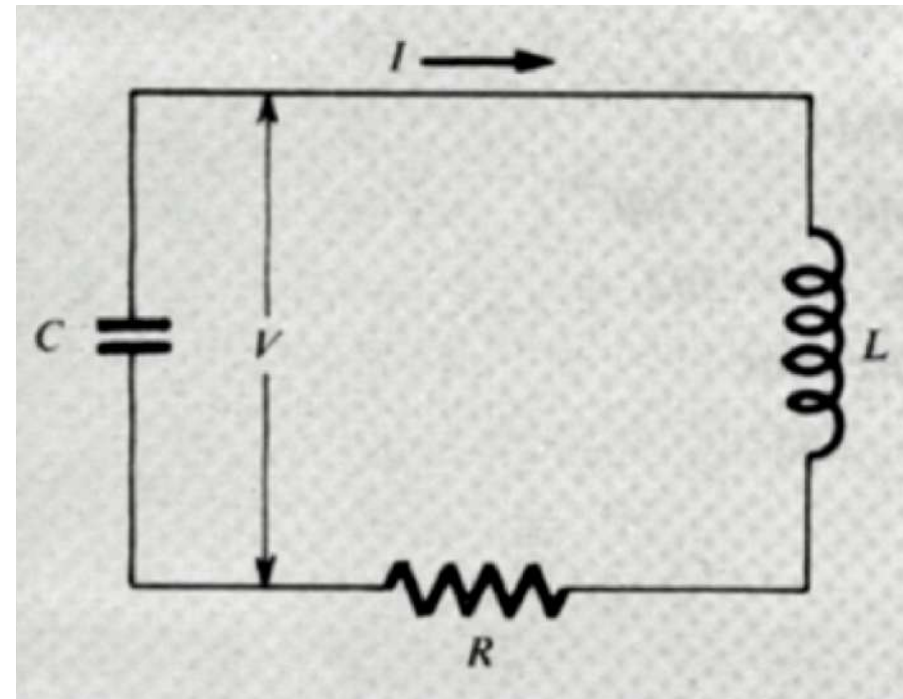
Circuito RLC en serie

- Probemos con la solución

$$V = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$$

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t} [-\alpha \cos \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t]$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t} [(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \operatorname{sen} \omega t]$$

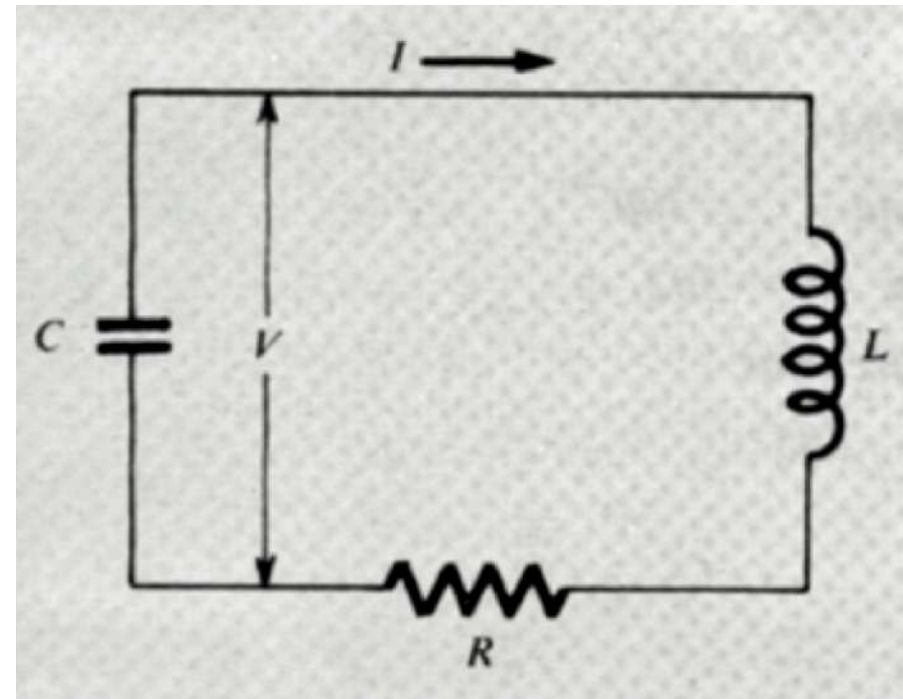


Circuito RLC en serie

- Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando los $Ae^{-\alpha t}$ llegamos

$$(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t - \frac{R}{L}(\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{LC} \cos \omega t = 0$$

- Esto puede satisfacerse para todo t si los coeficientes que acompañan a $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$ son ambos cero.



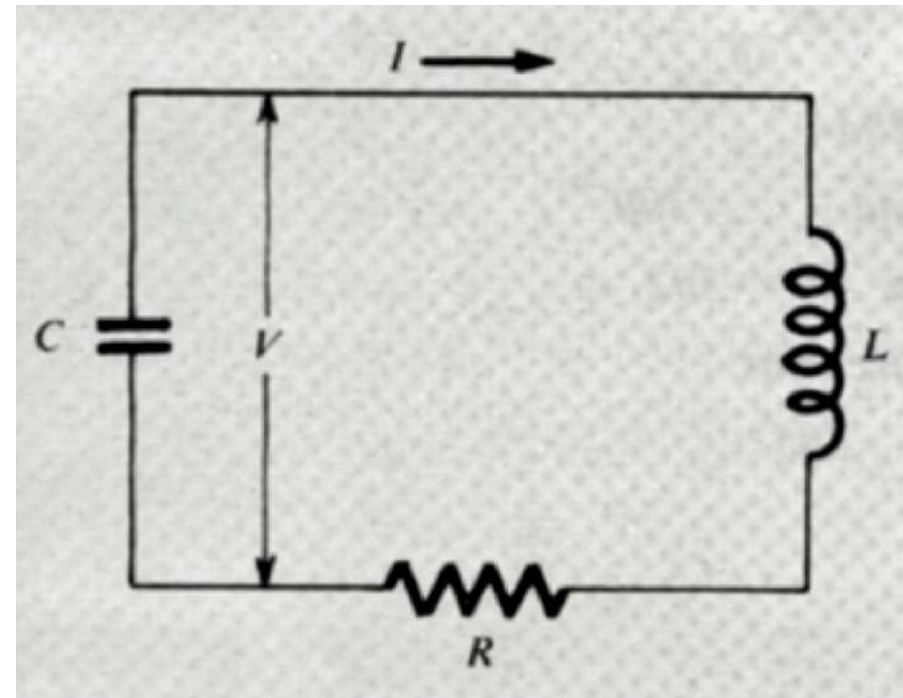
Circuito RLC en serie

- Esto quiere decir, por un lado que $(\sin \omega t)$

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0$$

- Lo cual quiere decir que

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$



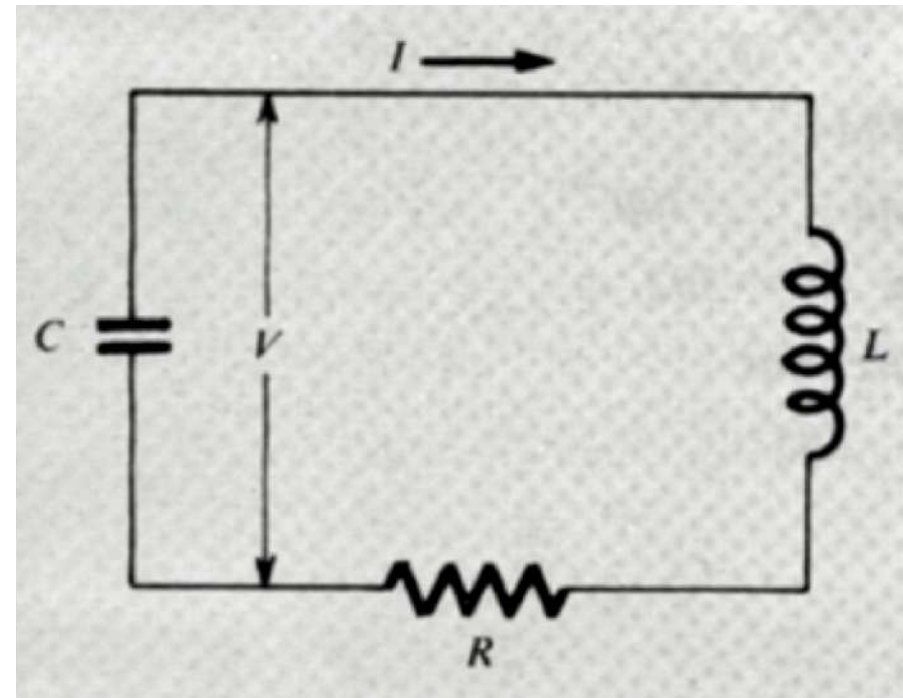
Circuito RLC en serie

- Por otro lado se tiene ($\cos \omega t$):

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

- Lo cual implica que:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$



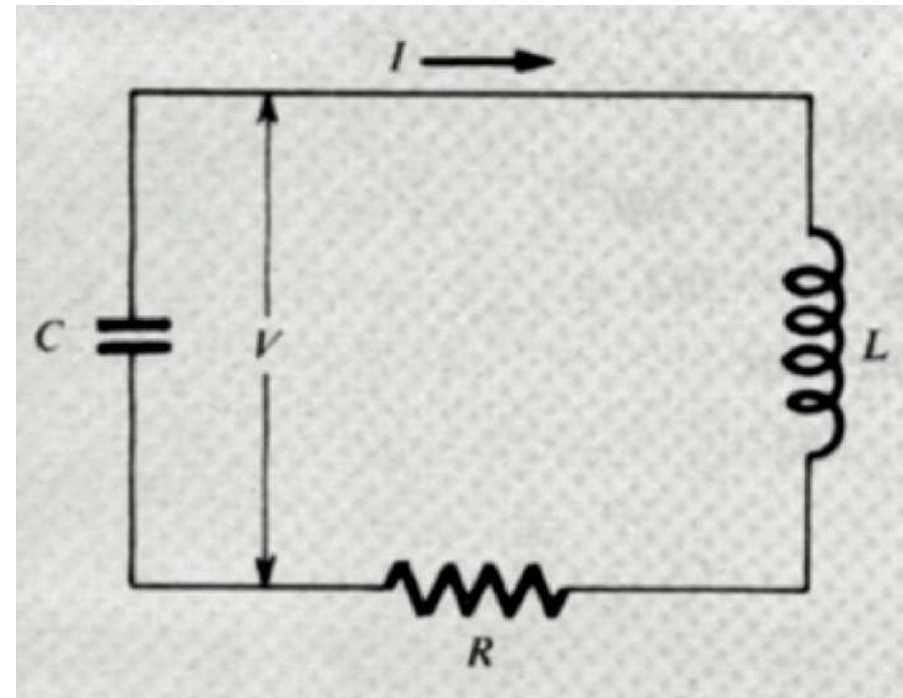
Circuito RLC en serie

- Siendo ω real, la ecuación anterior implica que

$$\frac{1}{LC} \geq \frac{R^2}{4L^2}$$

- Si tomamos el caso tal que usamos el $>$ tenemos el caso de bajo amortiguamiento:

$$R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$



Circuito RLC en serie

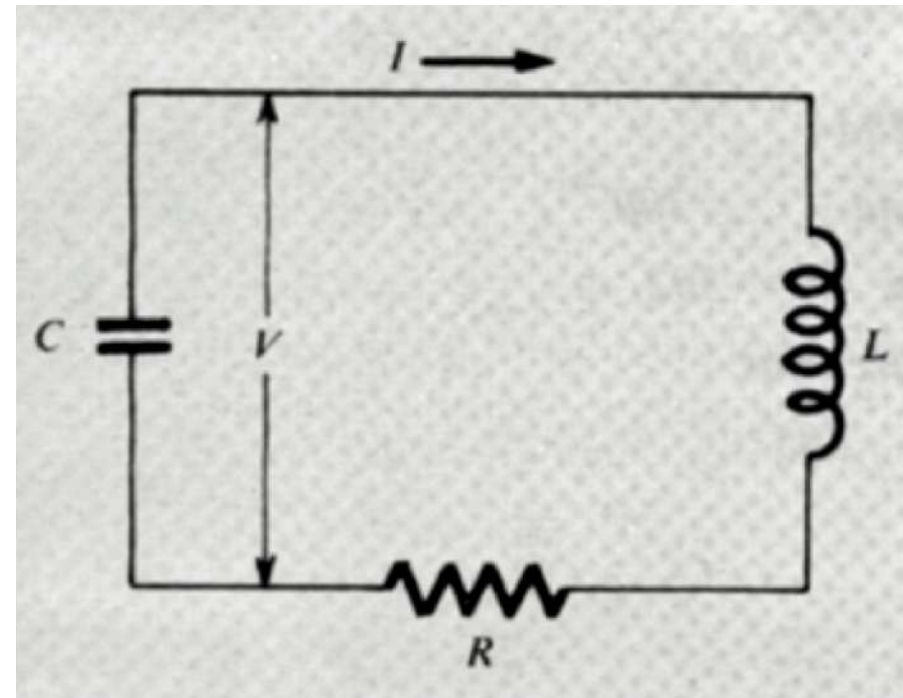
- Entonces

$$V = Ae^{-\frac{R}{2L}t} \cos \left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right]$$

(solución cuando la amplitud de V es máxima en $t = 0$)

- Y la corriente nos queda

$$I = -C \frac{dV}{dt} = AC\omega e^{-\alpha t} \left[\sin \omega t - \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t \right]$$



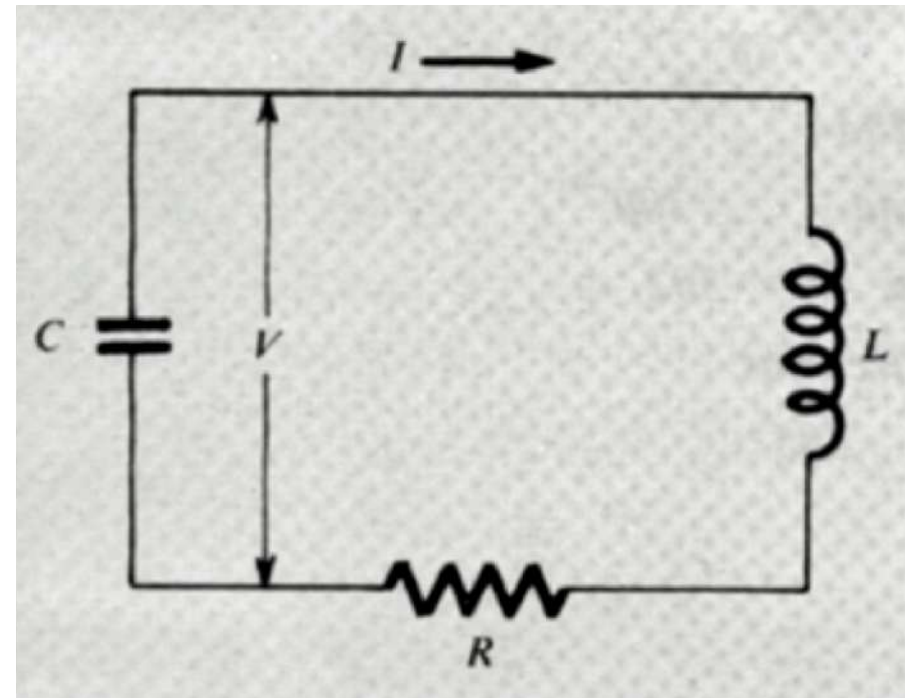
Circuito RLC en serie

- Tanto V como I oscilan y son amortiguados por un factor

$$e^{-\frac{R}{2L}t}$$

- La medida del amortiguamiento es el cociente

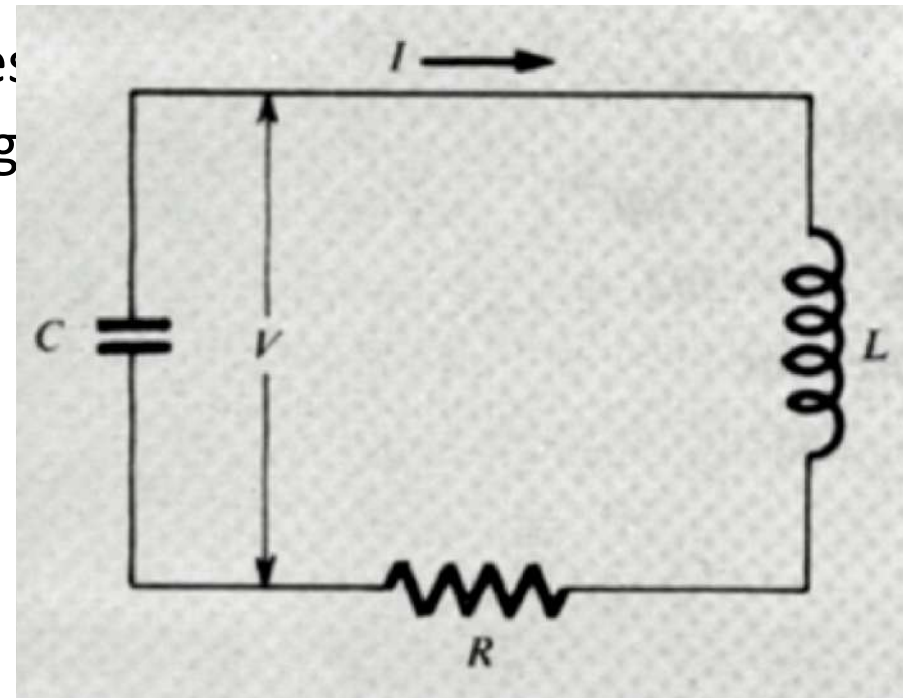
$$\frac{\alpha}{\omega}$$



Circuito RLC en serie

- Si $\frac{\alpha}{\omega}$ es muy pequeño, muchas oscilaciones van a ocurrir antes que la amplitud decaiga considerablemente.
- El caso límite es cuando $\frac{\alpha}{\omega} = 0$ no hay amortiguamiento (es como si R no existiera)
- En ese caso, la frecuencia es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

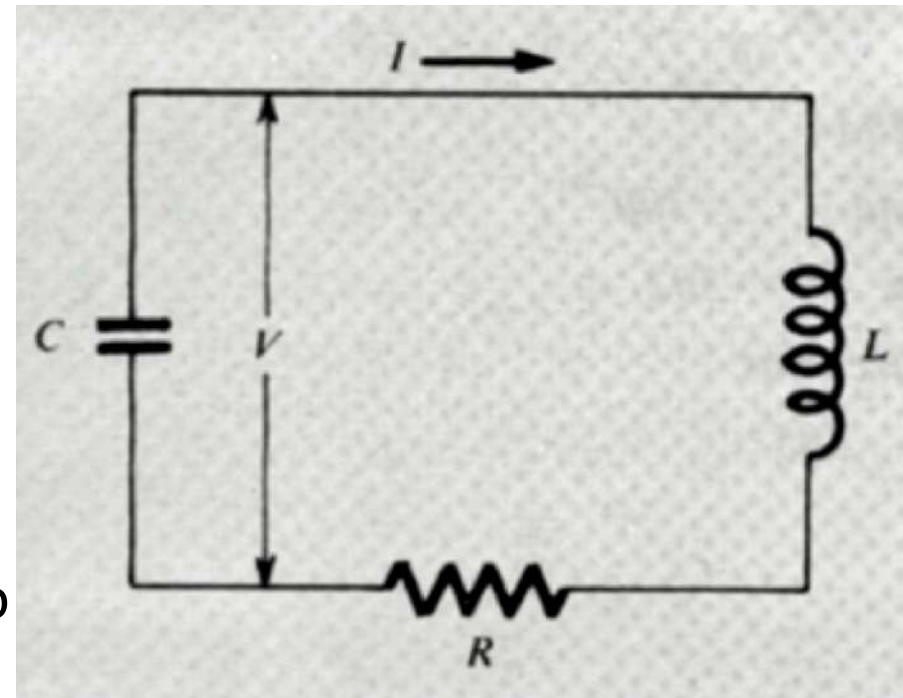


Circuito RLC en serie

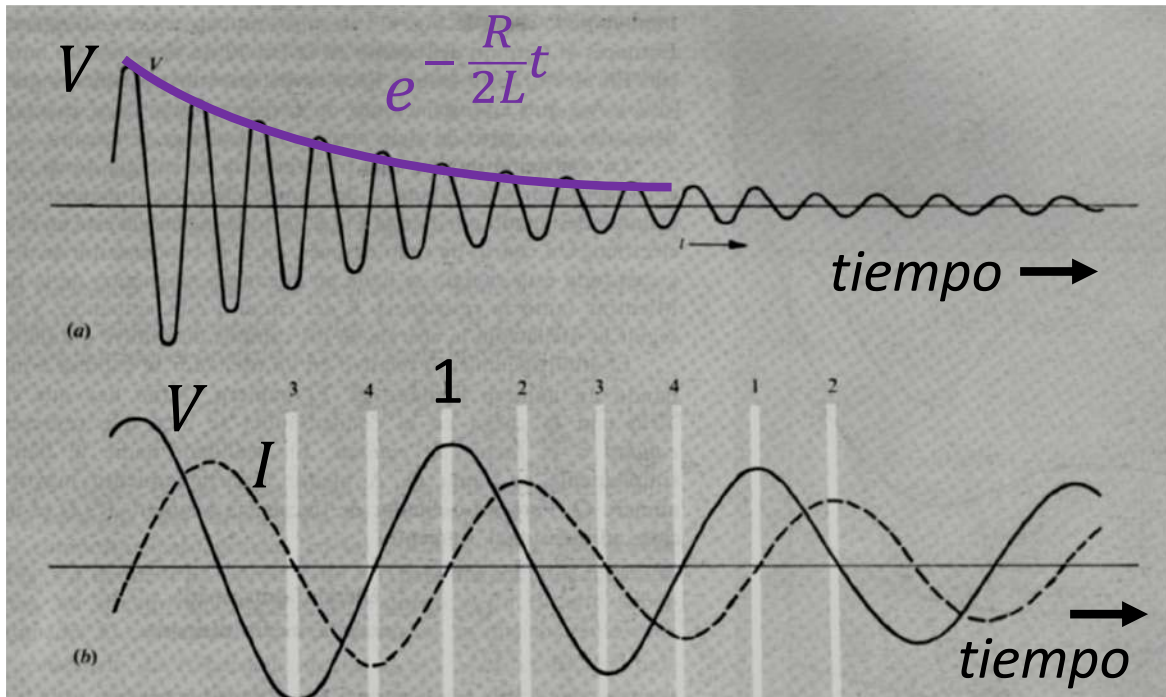
- Existe un desfase entre V e I .
- En la medida en la que $\frac{\alpha}{\omega}$ sea muy pequeño,

$$I \approx AC\omega e^{-\alpha t} [\sin \omega t]$$

- Y el desfase en ese caso es de un cuarto de ciclo ($\pi/2$).

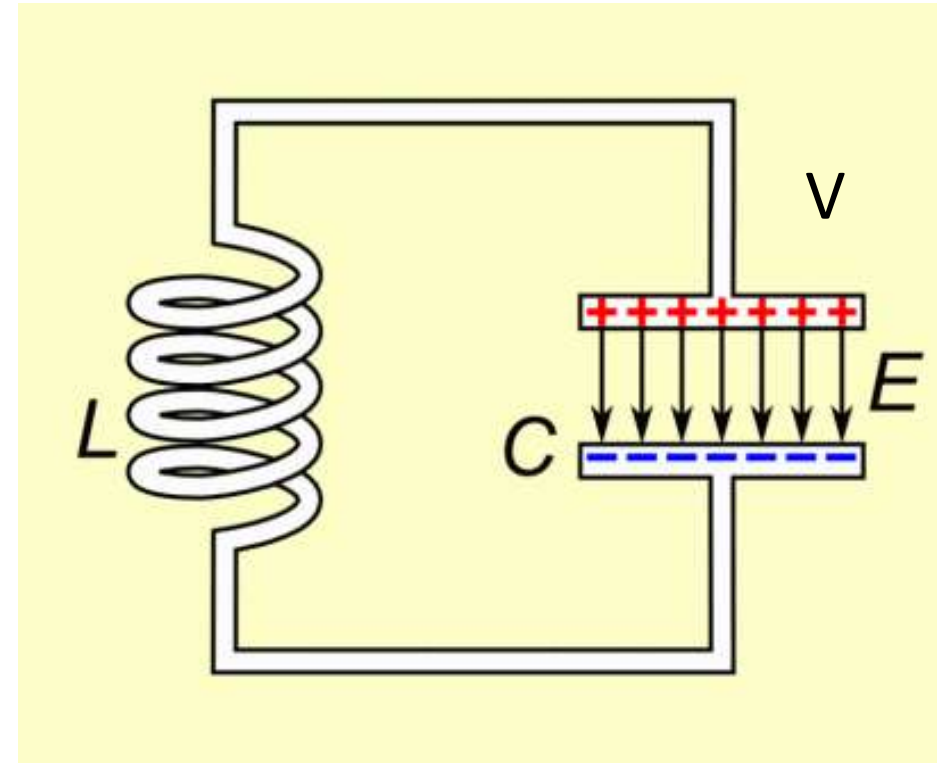


Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

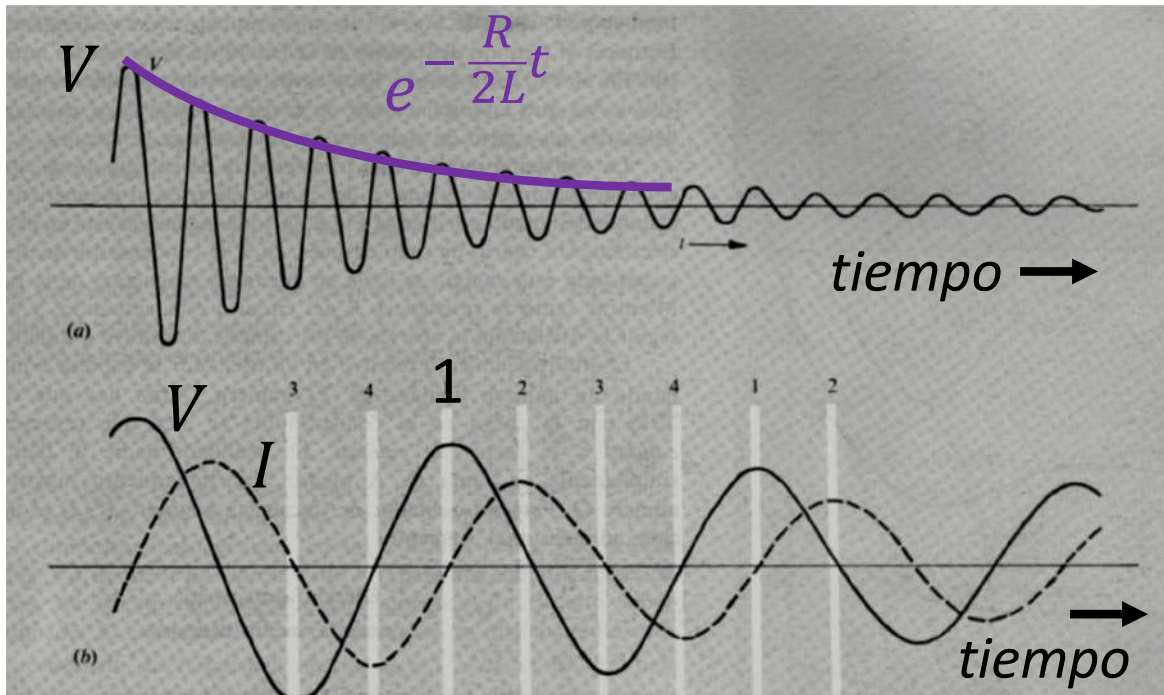


1. Capacitor cargado, corriente cero

Caso sin amortiguamiento
($R = 0$)

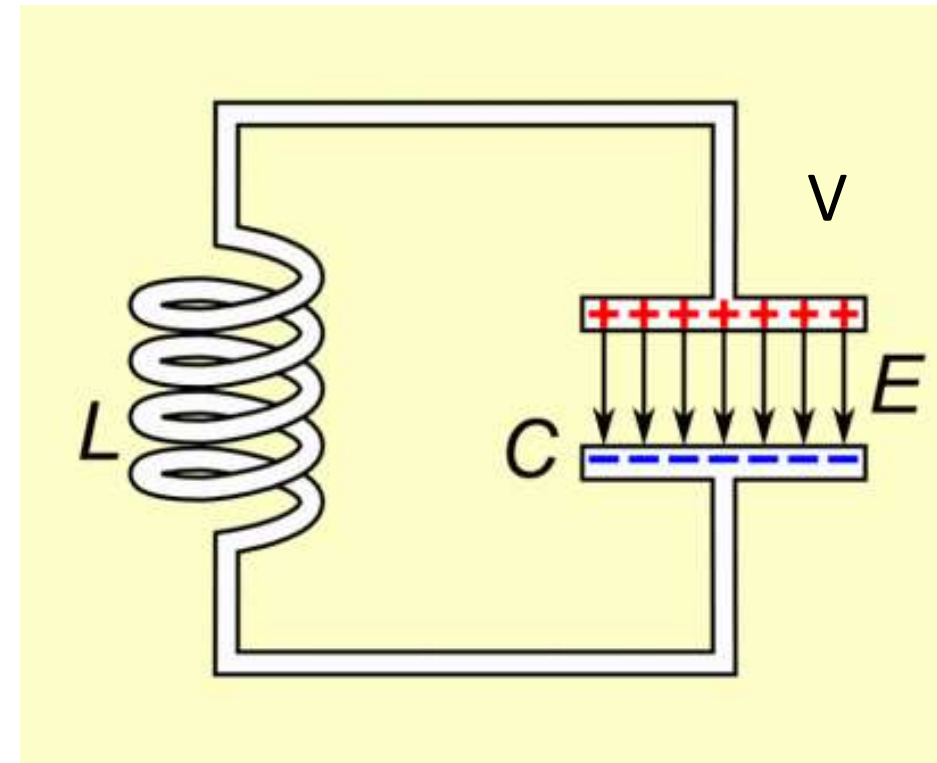


Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

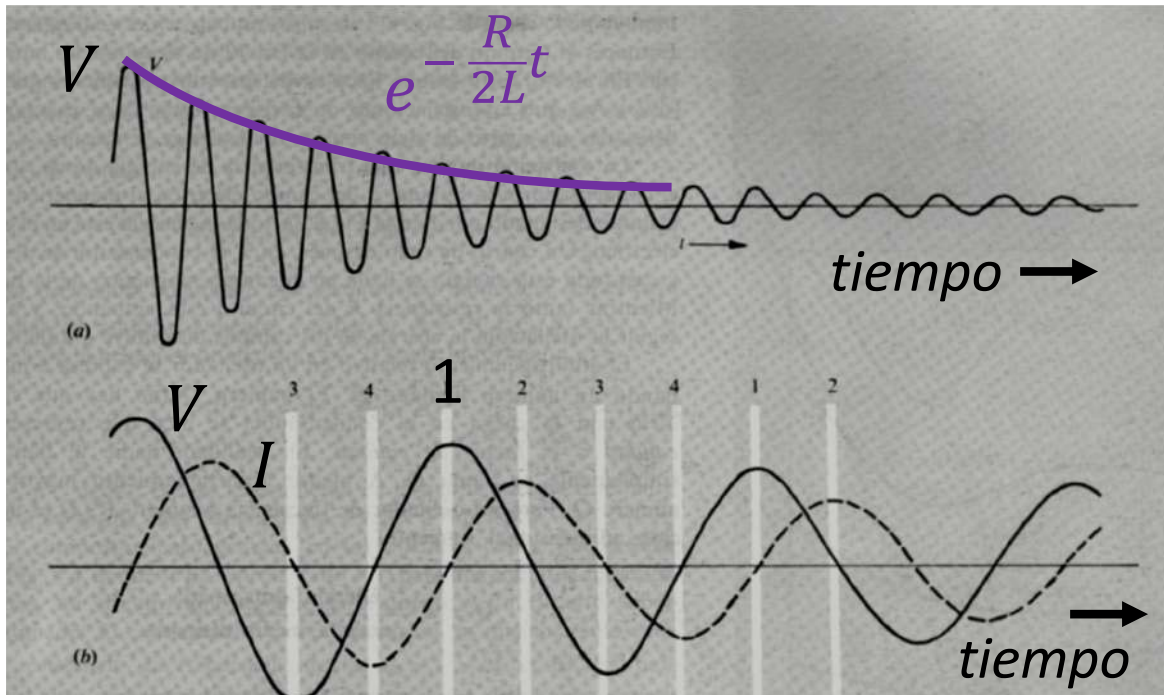


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético

Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)

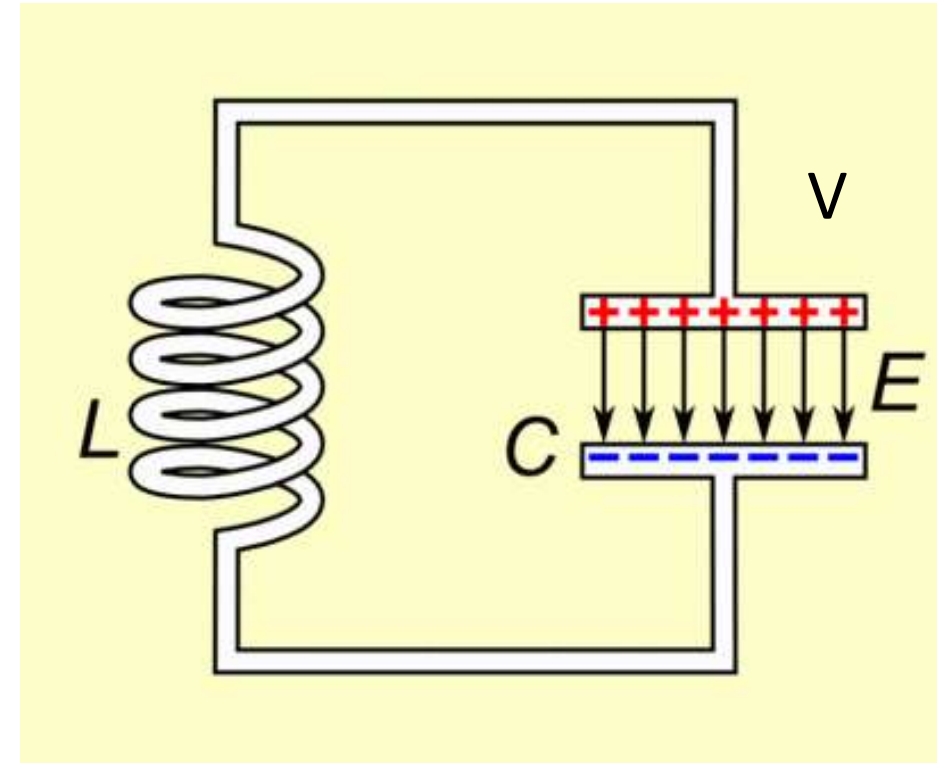


Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

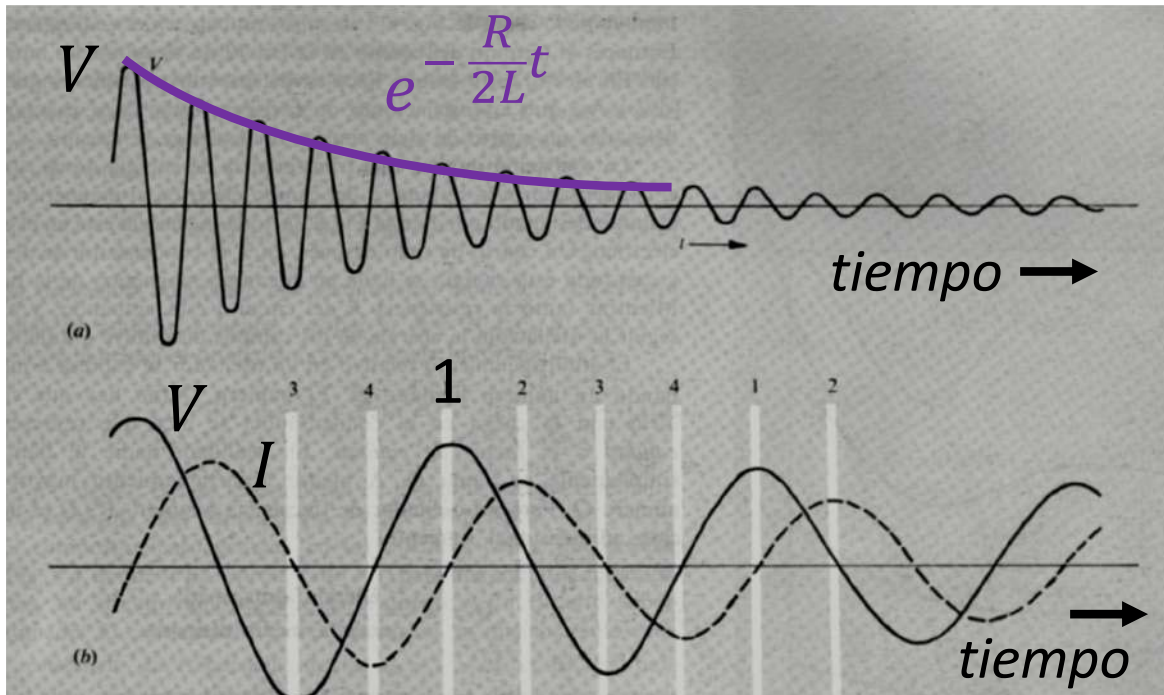


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero

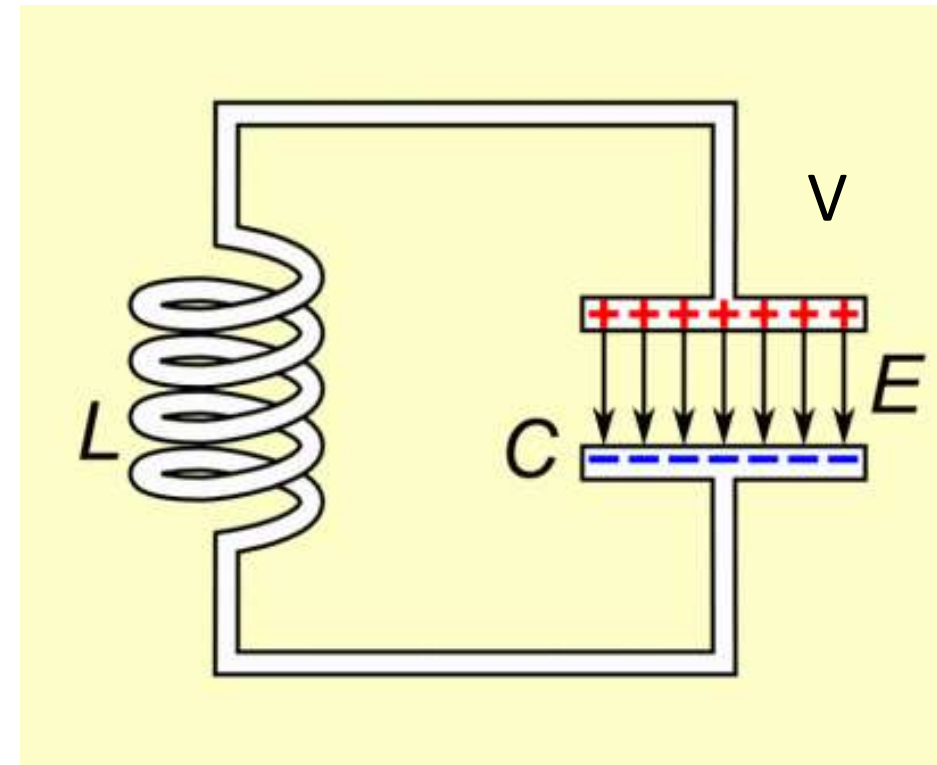
Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)



Caso sin amortiguamiento
($R = 0$)



1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero
4. Corriente máxima en sentido opuesto a 2, máximo campo magnético en sentido opuesto a 2, capacitor descargado.

Energía magnética o eléctrica

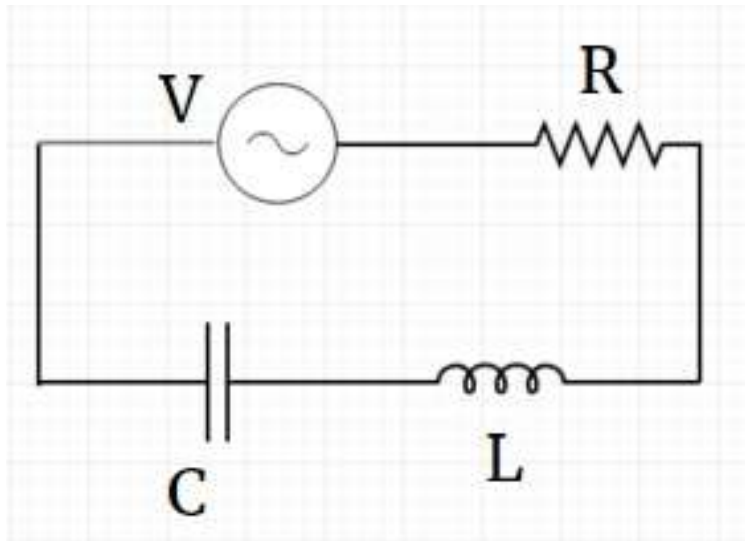


Inductancia

Capacitor

Circuitos de corriente alterna

Circuito RLC en serie



- Supongamos ahora un circuito RLC en serie de corriente alterna donde

$$V = V_0 \cos \omega t$$

- Por ley de Faraday tenemos

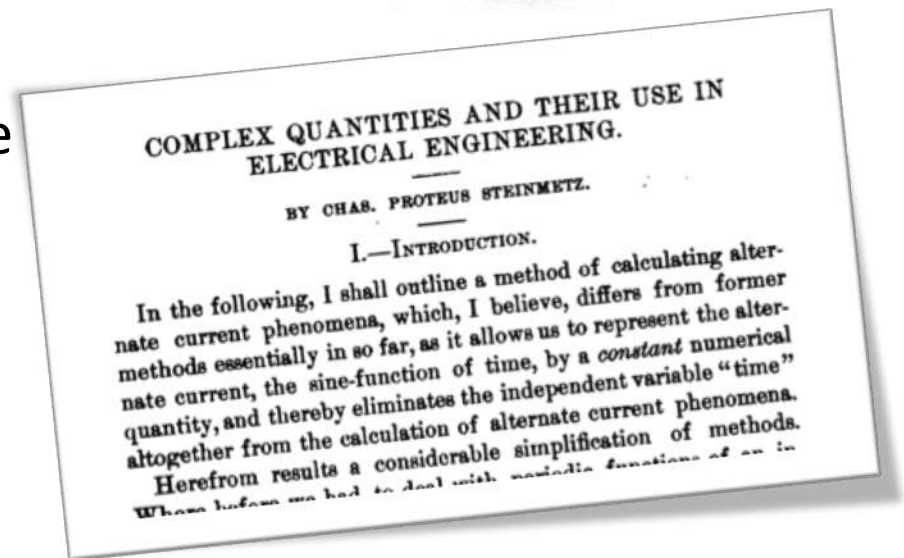
$$V_0 \cos \omega t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt$$

- Podemos resolver esta ecuación diferencial de manera diferente a como lo venimos haciendo?

Números complejos y circuitos AC

- En 1893 Charles Steinmetz, ingeniero alemán en GE (EEUU), presenta el trabajo 'Complex Quantities and Their Use in Electrical Engineering'.
- En este trabajo muestra como ecuaciones como la anterior son en realidad un problema de álgebra simple de números complejos.
- En otras palabras

¡No hace falta integrar !



Representaciones de números complejos

- Cartesianas

$$z = x + iy$$

$$x = \operatorname{Re}(z)$$

$$y = \operatorname{Im}(z)$$

- Polares (Euler)

$$z = r e^{i\varphi}$$

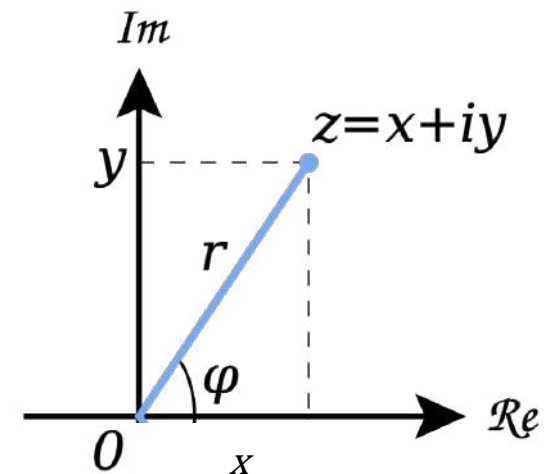
donde r es el módulo y φ es el argumento o la fase

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$



Operaciones simples en polares

La multiplicación de números complejos es especialmente sencilla con la notación polar:

$$z_1 z_2 = r s e^{i(\phi+\psi)} \Leftrightarrow z_1 z_2 = r e^{i\phi} s e^{i\psi}$$

División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s} e^{i(\phi-\psi)}$$

Potenciación:

$$z^n = r^n e^{i\phi n} \Leftrightarrow z^n = (r e^{i\phi})^n$$

Complejo conjugado \bar{z}

- Si $z = x + iy$ entonces $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$
- Propiedades

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$$

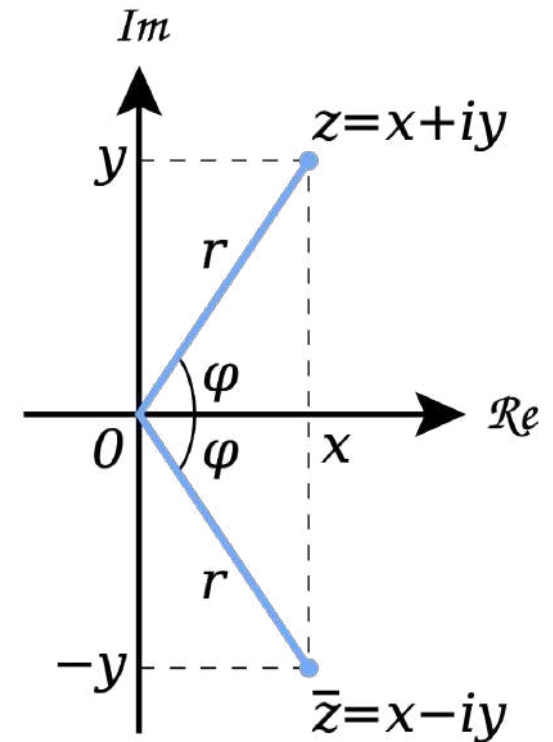
$$z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$$

$$\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$$

$$|z|^2 = z\bar{z} \geq 0$$

$$z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$



Voltaje complejo

- La FEM de la batería

$$V_0 \cos \omega t$$

- Puede ser vista como la parte real del número complejo

$$V_0 e^{i\omega t} = V_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

- En cuyo caso

$$V_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}(V_0 e^{i\omega t})$$

Corriente compleja

- Para la solución de nuestro problema podemos hacer lo mismo con I

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(I_0 e^{i(\omega t + \varphi)})$$

donde φ es la diferencia de fase con V

- Pero podemos reescribir esto como

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(I_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t})$$

- Ahora definimos **la amplitud compleja \tilde{I}** (independiente del tiempo)

$$\tilde{I} = I_0 e^{i\varphi} = I_0 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

- Podemos escribir

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(\tilde{I} e^{i\omega t})$$

Corriente compleja: derivada e integral

- Veamos cómo dan las derivadas y las integrales de $\tilde{I} e^{i\omega t}$

- La derivada respecto a t queda:

$$\frac{d\tilde{I} e^{i\omega t}}{dt} = \tilde{I} \frac{de^{i\omega t}}{dt} = i\omega \tilde{I} e^{i\omega t}$$

¡Derivar la corriente compleja equivale a multiplicarla por $i\omega$!

- La integral queda

$$\int \tilde{I} e^{i\omega t} dt = \tilde{I} \int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} \tilde{I} e^{i\omega t} = -\frac{i}{\omega} \tilde{I} e^{i\omega t}$$

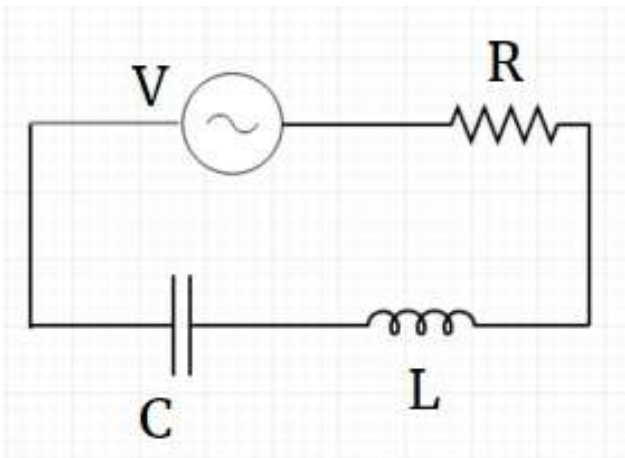
¡Integrar la corriente compleja equivale a multiplicarla por $\frac{1}{i\omega}$!

Pregunta

- ¿Por cuánto hay que multiplicar $\tilde{I}e^{i\omega t}$ para obtener su derivada segunda respecto al tiempo?

Circuito RLC en serie

- Estas propiedades de los números complejos nos permiten hallar la solución de la ecuación diferencial del circuito. Entonces



$$V_0 \cos \omega t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt$$

Como **la ecuación es lineal**, esto equivale a

$$\text{Re}(V_0 e^{i\omega t}) = \text{Re}(R\tilde{I} e^{i\omega t} + L \frac{d\tilde{I} e^{i\omega t}}{dt} + \frac{1}{C} \int \tilde{I} e^{i\omega t} dt)$$

Circuito RLC en serie

- Resolvamos entonces en complejos y luego tomemos la parte real

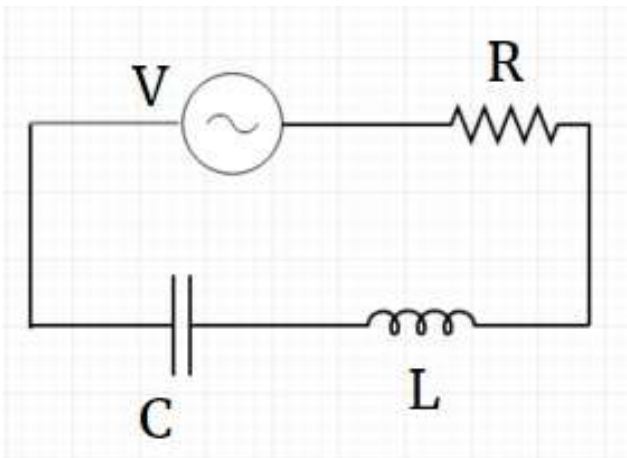
$$V_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I} e^{i\omega t} + L \frac{d\tilde{I} e^{i\omega t}}{dt} + \frac{1}{C} \int \tilde{I} e^{i\omega t} dt$$

- Reemplazamos la integral y la derivada

$$V_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I} e^{i\omega t} + i\omega L\tilde{I} e^{i\omega t} + \frac{1}{i\omega C} \tilde{I} e^{i\omega t}$$

- simplificamos $e^{i\omega t}$

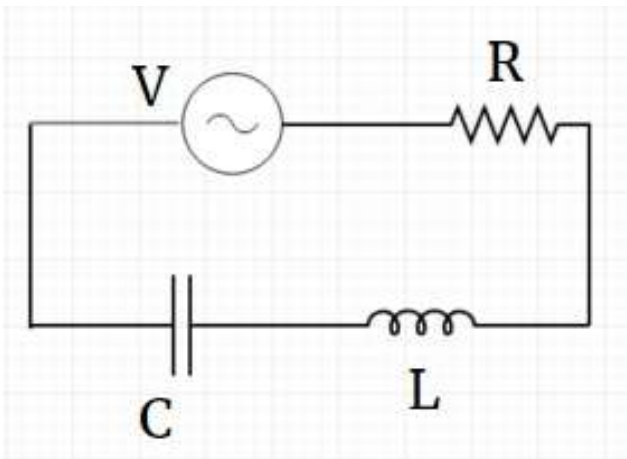
$$V_0 = R\tilde{I} + i\omega L\tilde{I} + \frac{1}{i\omega C} \tilde{I}$$



Circuito RLC en serie

- Y por último despejamos \tilde{I}

$$V_0 = \left[R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right] \tilde{I}$$



$$\tilde{I} = \frac{V_0}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{V_0}{Z}$$

donde Z es la *impedancia resultante del circuito*

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

Circuito RLC en serie

- Entonces, la corriente es

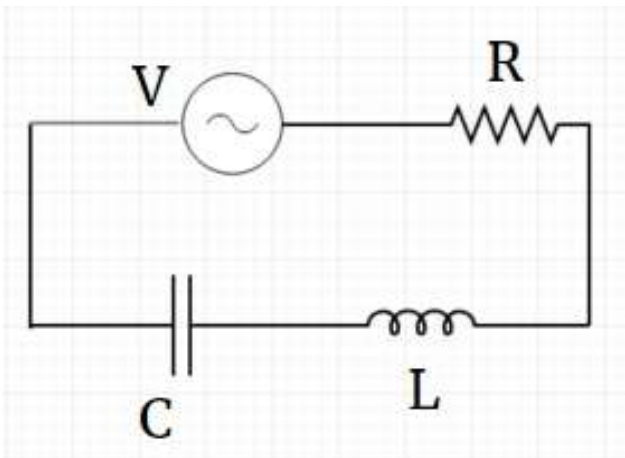
$$I(t) = \text{Re}(\tilde{I}e^{i\omega t}) = \text{Re} \left[\frac{V_0}{R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}} e^{i\omega t} \right]$$

- Llamemos θ a la fase de la impedancia

$$Z = R + i \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right] = |Z| e^{i\theta}$$

$$I(t) = \text{Re} \left[\frac{V_0}{|Z| e^{i\theta}} e^{i\omega t} \right] = \text{Re} \left[\frac{V_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)} \right]$$

$$I(t) = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta)$$



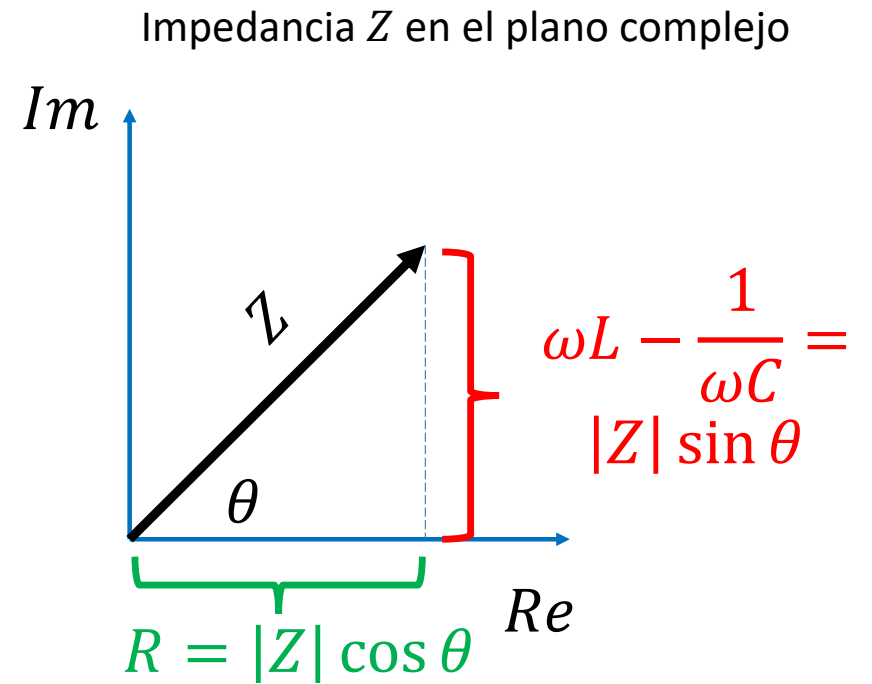
Circuito RLC en serie

- La impedancia tiene las propiedades:

$$Z = R + i \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right] = |Z| e^{i\theta}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}$$

$$\tan \theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

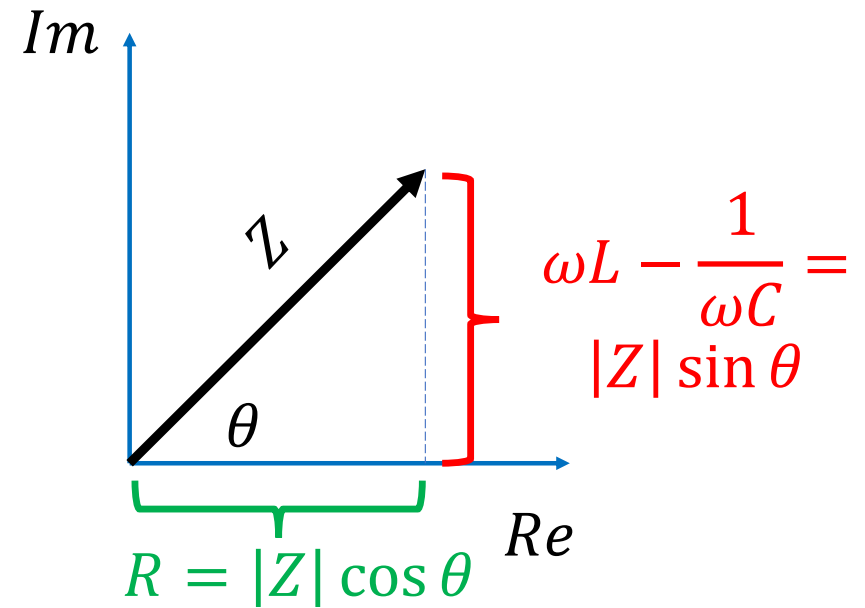


Circuito RLC en serie

- Entonces la solución final es

$$I(t) = \frac{V_0 \cos \left[\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}}$$

Impedancia Z en el plano complejo



La impedancia

- Como vemos en este caso, la intensidad de la corriente depende de ω , C , L y R .
- También de ellas depende su fase.
- Llamemos nuevamente I_0 a la amplitud real de I :

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}}$$

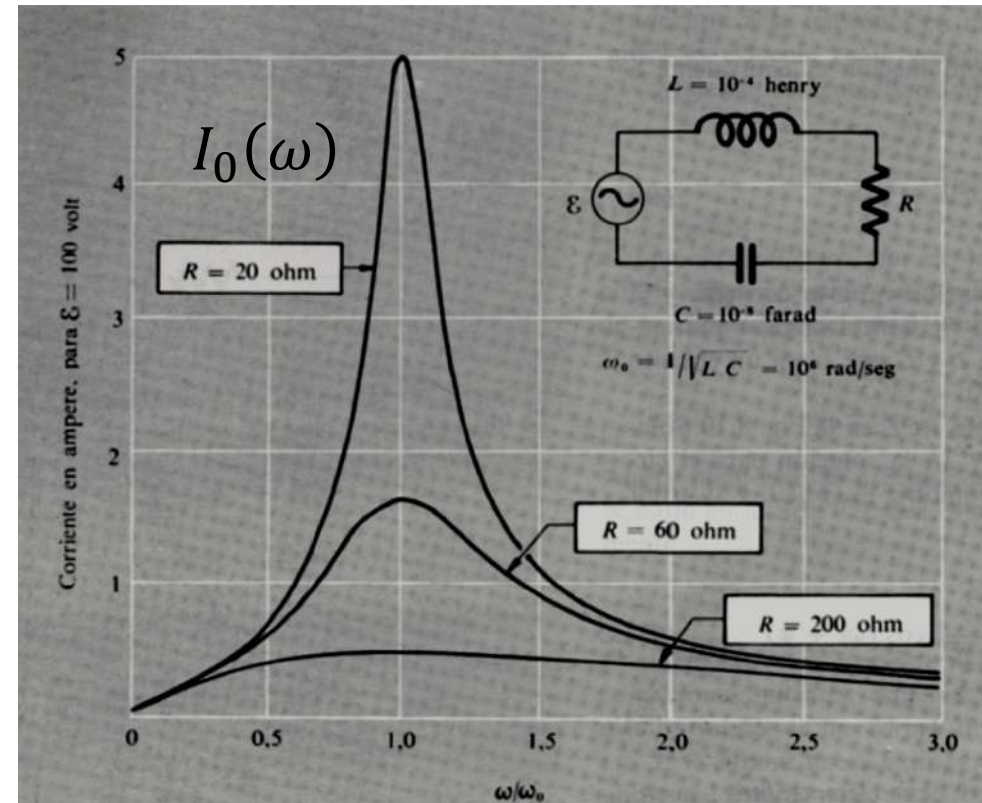
La impedancia

- En la figura vemos cómo varía I_0 en función de ω para:

$$\begin{aligned}V_0 &= 100 \text{ V} \\ C &= 10^{-8} \text{ Farad,} \\ L &= 10^{-4} \text{ H} \\ R &= 20, 60, 200 \Omega\end{aligned}$$

- Vemos que:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} I_0(\omega) = 0 \text{ y } \lim_{\omega \rightarrow \infty} I_0(\omega) = 0$$

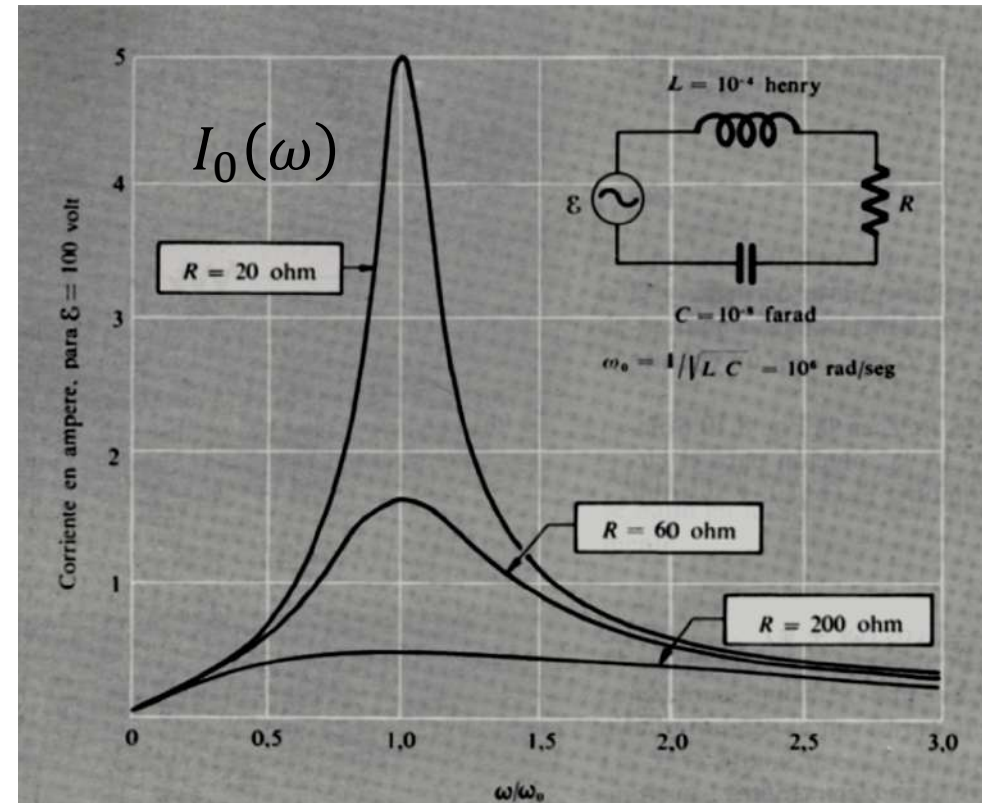


La impedancia

- $I_0(\omega)$ alcanza un máximo cuando
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ rad/s}$$
- Cuando esto ocurre se da una resonancia y el efecto de L y C parecen desaparecer (hasta la fase)

$$I_{res}(t) = \frac{V_0 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t}{R}$$

- El máximo es más intenso y más fino en la medida que R es más pequeño



Preguntas

- Como vimos, encontramos una solución de la ecuación de segundo orden

$$V_0 \cos \omega t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt$$

- Sin embargo, nuestra solución no incluye dos constantes de integración a despejar con las condiciones iniciales

¿Por qué?

¿Le falta algo a la solución?

Solución complementaria

- La solución:

$$I(t) = \frac{V_0 \cos \left[\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}}$$

- Es una solución particular de la ecuación inhomogénea

$$V_0 \cos \omega t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt$$

Solución complementaria

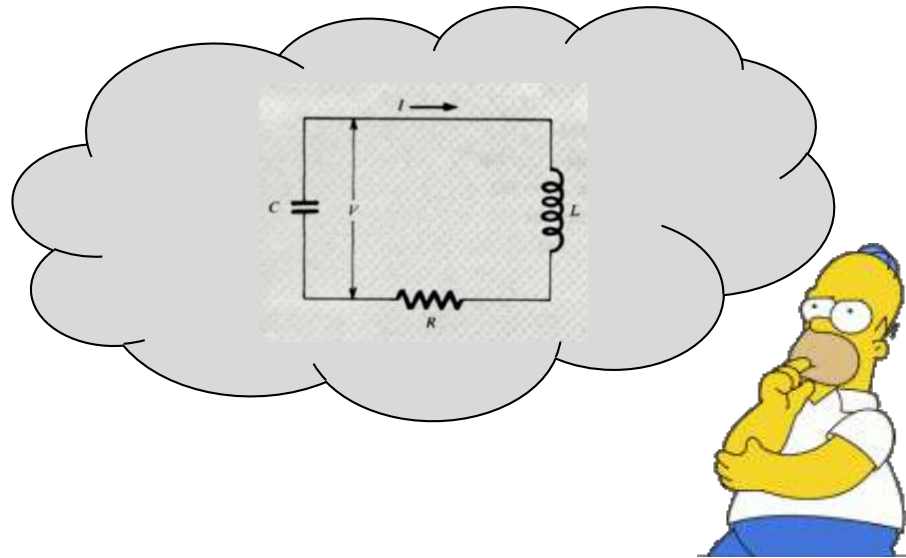
- La solución completa consiste en una solución particular de la ecuación inhomogénea más la general de la homogénea:

$$I_{total} = I(t) + I_h \quad \text{donde} \quad I_h R + L \frac{dI_h}{dt} + \frac{1}{C} \int I_h dt = 0$$

Solución complementaria

- La solución completa consiste en una solución particular de la ecuación inhomogénea más la general de la homogénea:

$$I_{total} = I(t) + I_h \quad \text{donde} \quad I_h R + L \frac{dI_h}{dt} + \frac{1}{C} \int I_h dt = 0$$



Solución complementaria

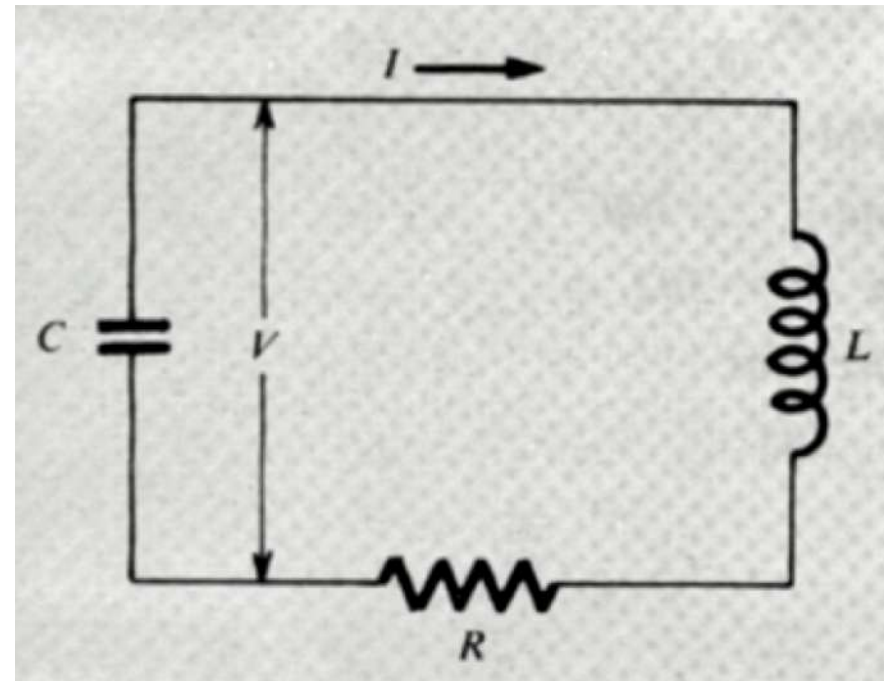
- A la solución para la homogénea ya la habíamos obtenido

$$I_h = -C \frac{dV}{dt}$$

- Siendo V el voltaje en el capacitor (no confundir con la FEM alterna)

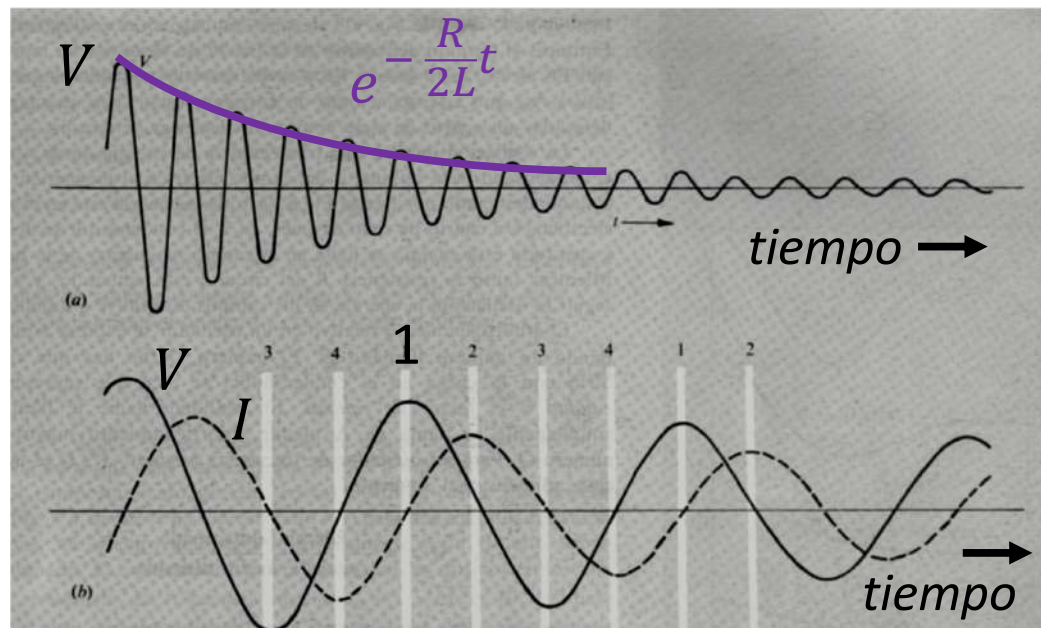
$$V(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sen \omega t)$$

- Donde A y B son las constantes de integración.



Pregunta

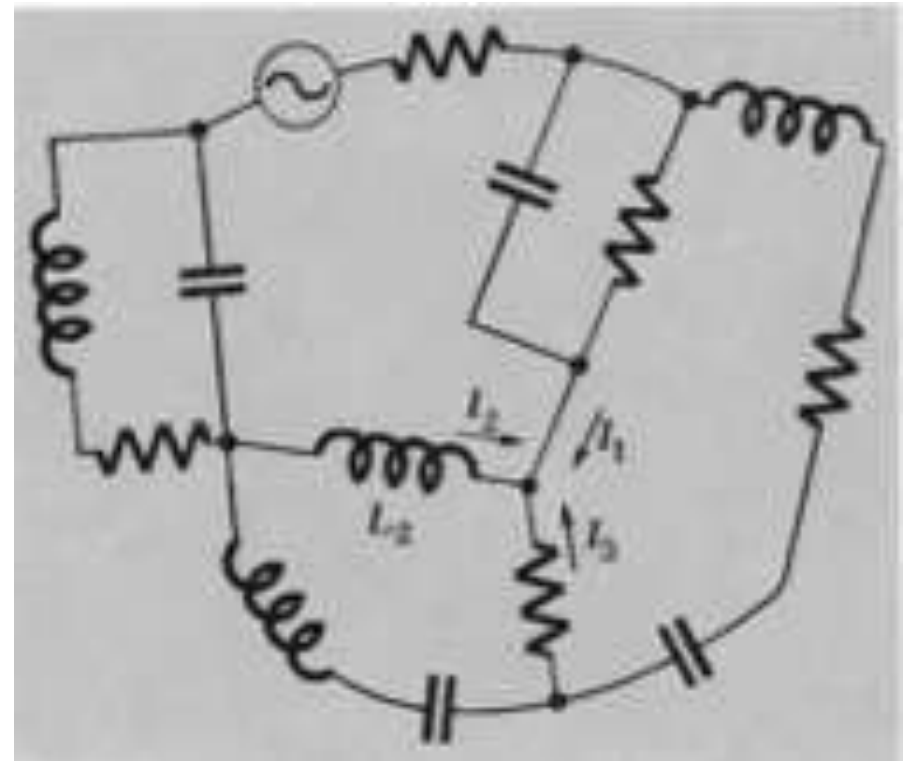
- ¿Cómo puedo evitar la solución complementaria cuando mido una corriente en un RLC de corriente alterna?
- Ayuda:



Otros circuitos en alterna

Otros circuitos en alterna

- Una red de corriente alterna es un conjunto de **resistencias, capacitores e inductores** en los cuales circula corriente que oscila **estacionariamente** a una frecuencia ω .
- La frecuencia es una constante en todo el circuito.
- Para hallar la corriente en cada rama hay que saber su amplitud y su fase respecto a la fuente.

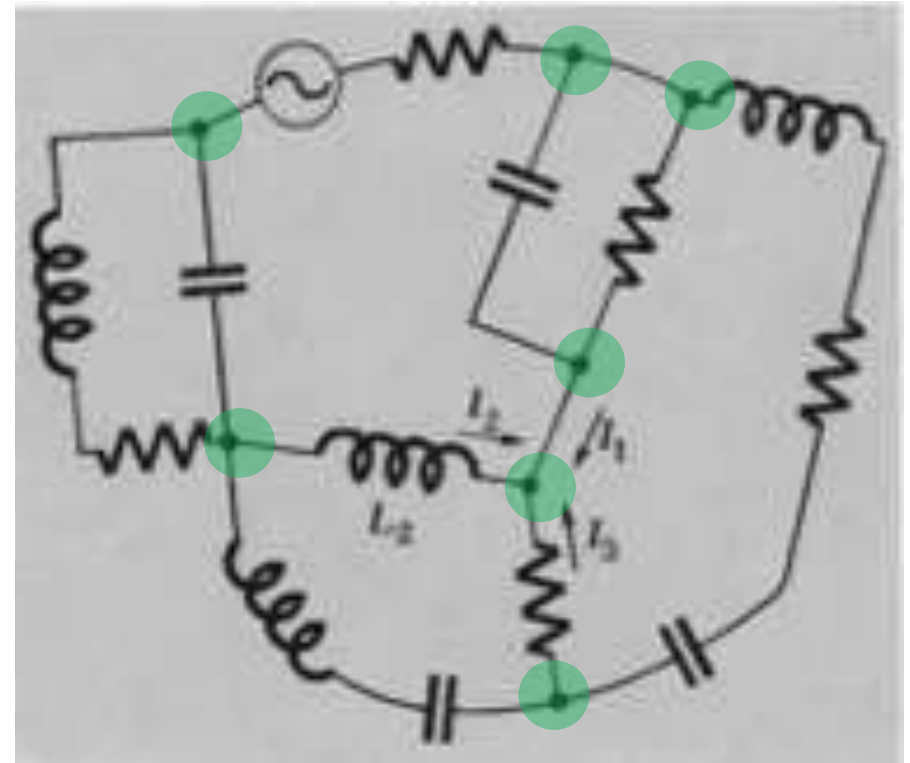


Otros circuitos en alterna

- Por conservación de la carga, las corrientes que pasan por cada nodo deben dar suma nula

$$I_1 + I_2 \dots = 0$$

- En cada rama, el voltaje también tendrá su propia amplitud y fase.

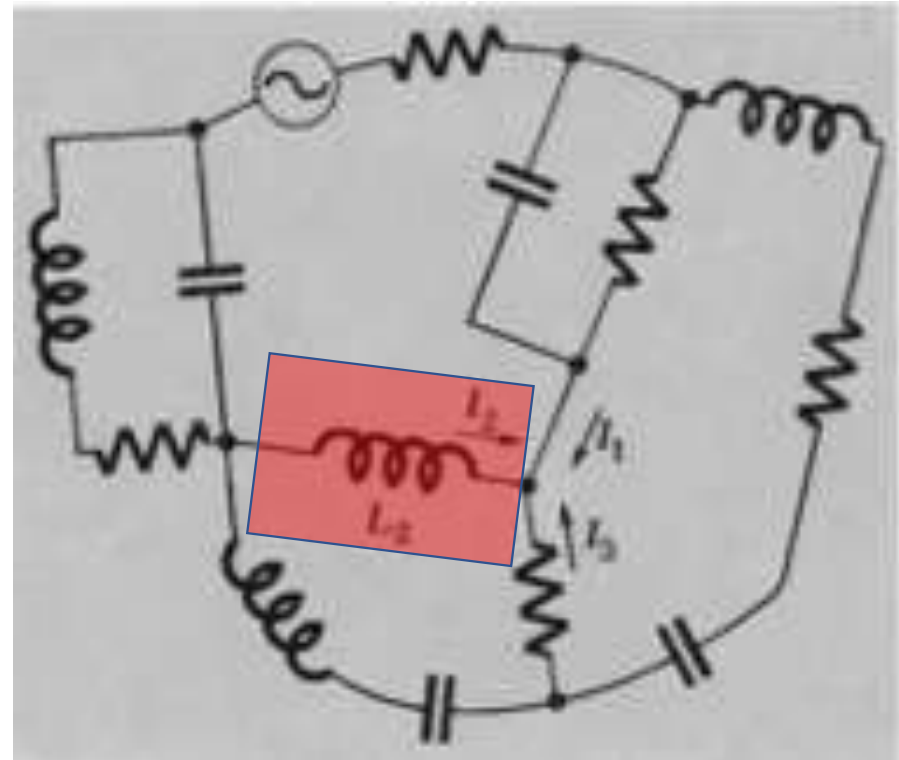


Otros circuitos en alterna

- La fase de la tensión y la corriente en cada rama puede no ser la misma.

$$I_2 = I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$V_2 = V_{02} \cos(\omega t + \theta_2)$$



Impedancias y admitancias

- ¿Cómo se relacionan la tensión y la corriente complejas en cada rama k ?

$$\tilde{I}_k e^{i\omega t} = Y_k \tilde{V}_k e^{i\omega t}$$

$$\tilde{I}_k = Y_k \tilde{V}_k$$




donde \tilde{I}_k y \tilde{V}_k son las amplitudes complejas de la tensión y la corriente en cada rama k

$$\tilde{I}_k = |\tilde{I}_k| e^{i\varphi_k} \quad \text{y} \quad \tilde{V}_k = |\tilde{V}_k| e^{i\theta_k}$$

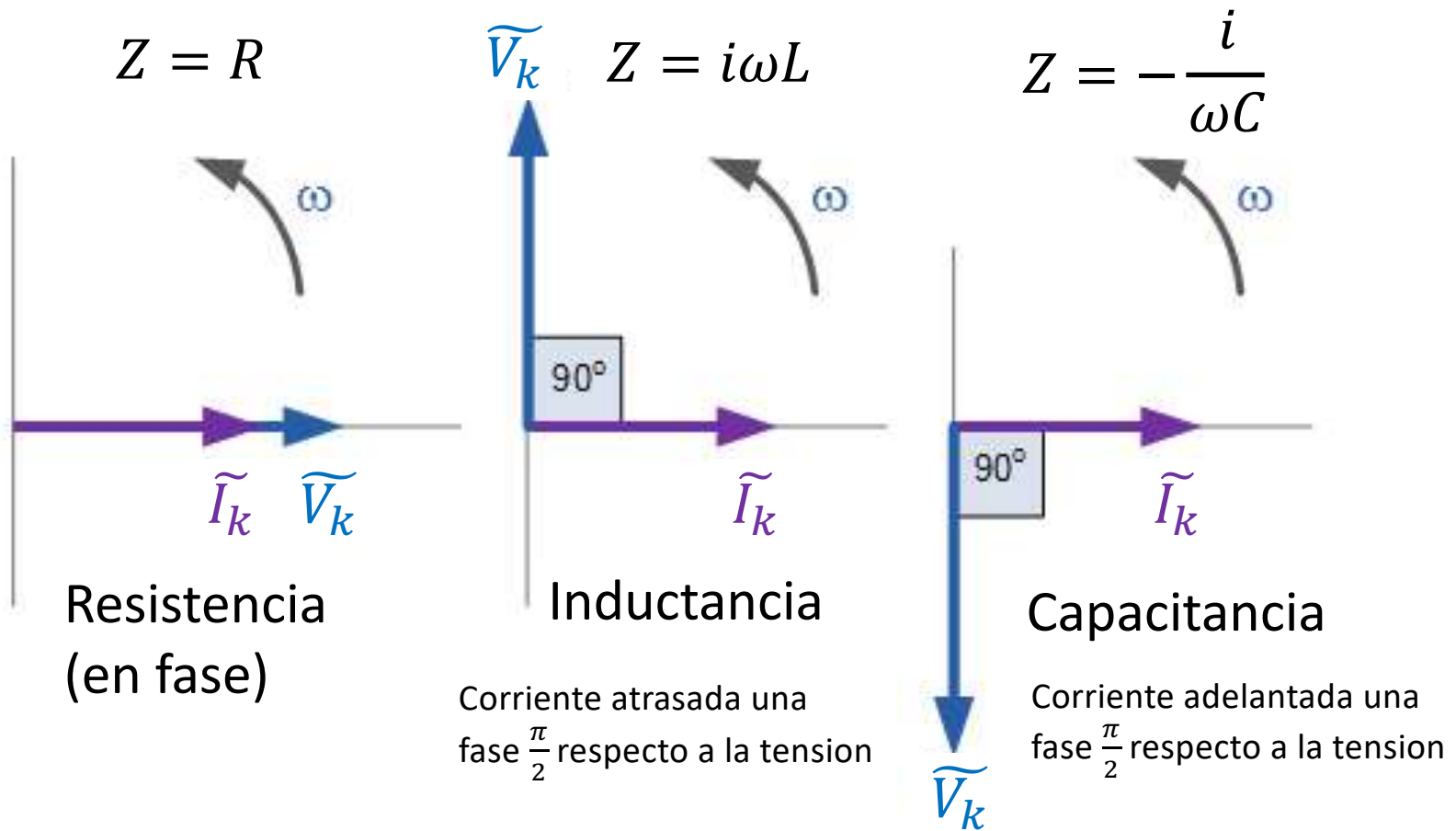
Impedancias y admitancias

- La cantidad compleja Y_k se denomina **admitancia** (*unidad* = $\frac{1}{\Omega}$).
- La inversa compleja de la admitancia es la **impedancia** Z_k (*unidad* = Ω)

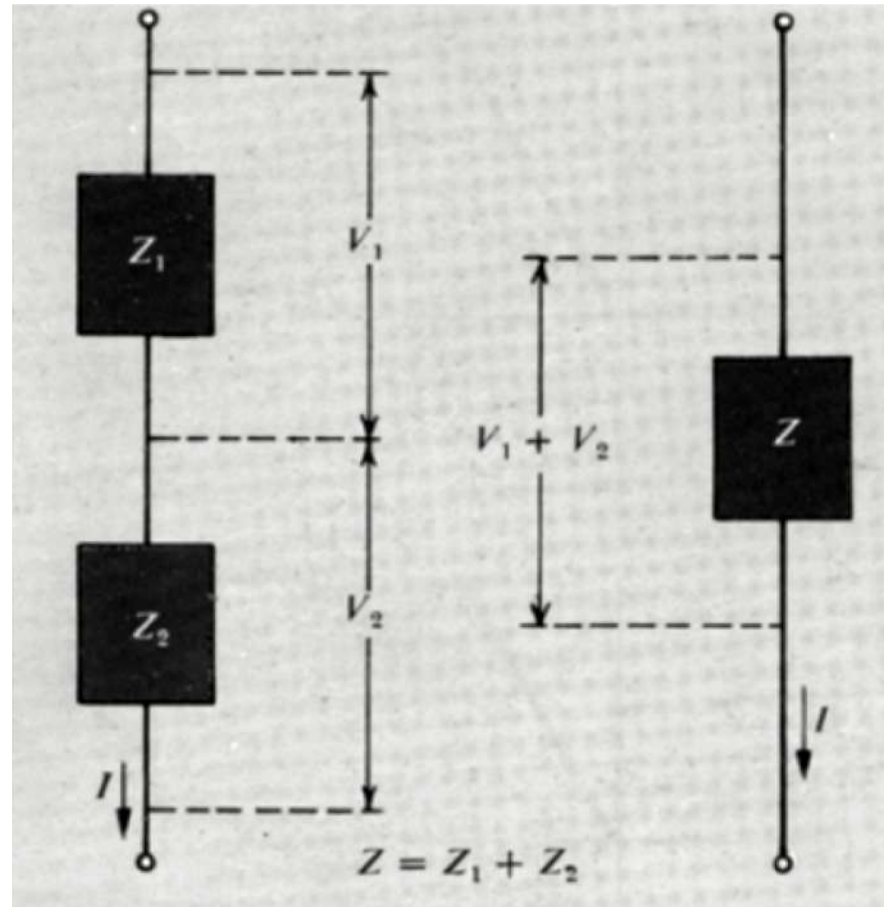
$$\widetilde{V}_k = Z_k \widetilde{I}_k = \frac{1}{Y_k} \widetilde{I}_k$$

<i>Símbolo</i>	<i>Admitancia, Y</i>	<i>Impedancia, Z = $\frac{1}{Y}$</i>
R 	$\frac{1}{R}$	R
L 	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
C 	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$

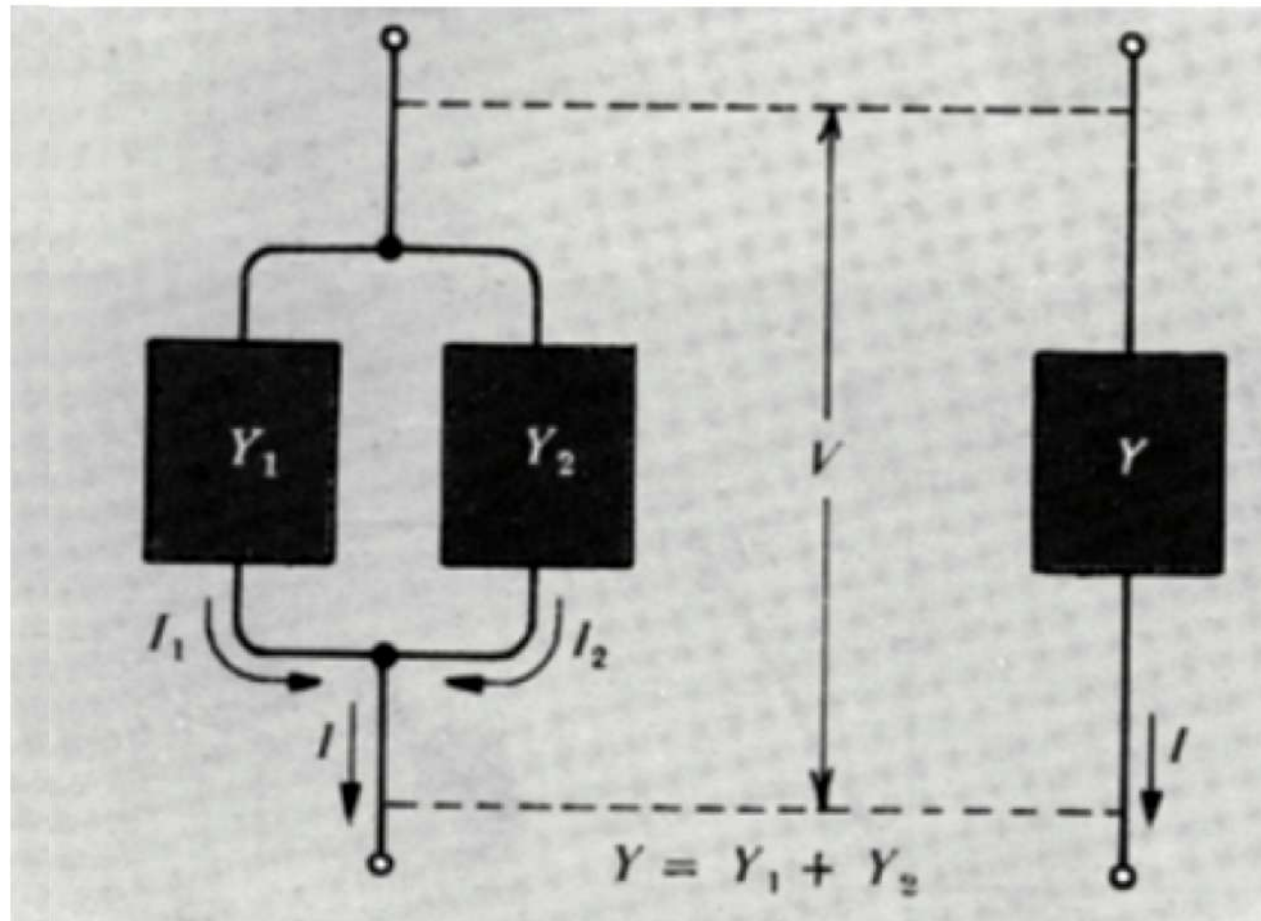
Diferencias de fase entre \widetilde{V}_k e \widetilde{I}_k ($\widetilde{V}_k = Z_k \widetilde{I}_k$) para distintos tipos de impedancia



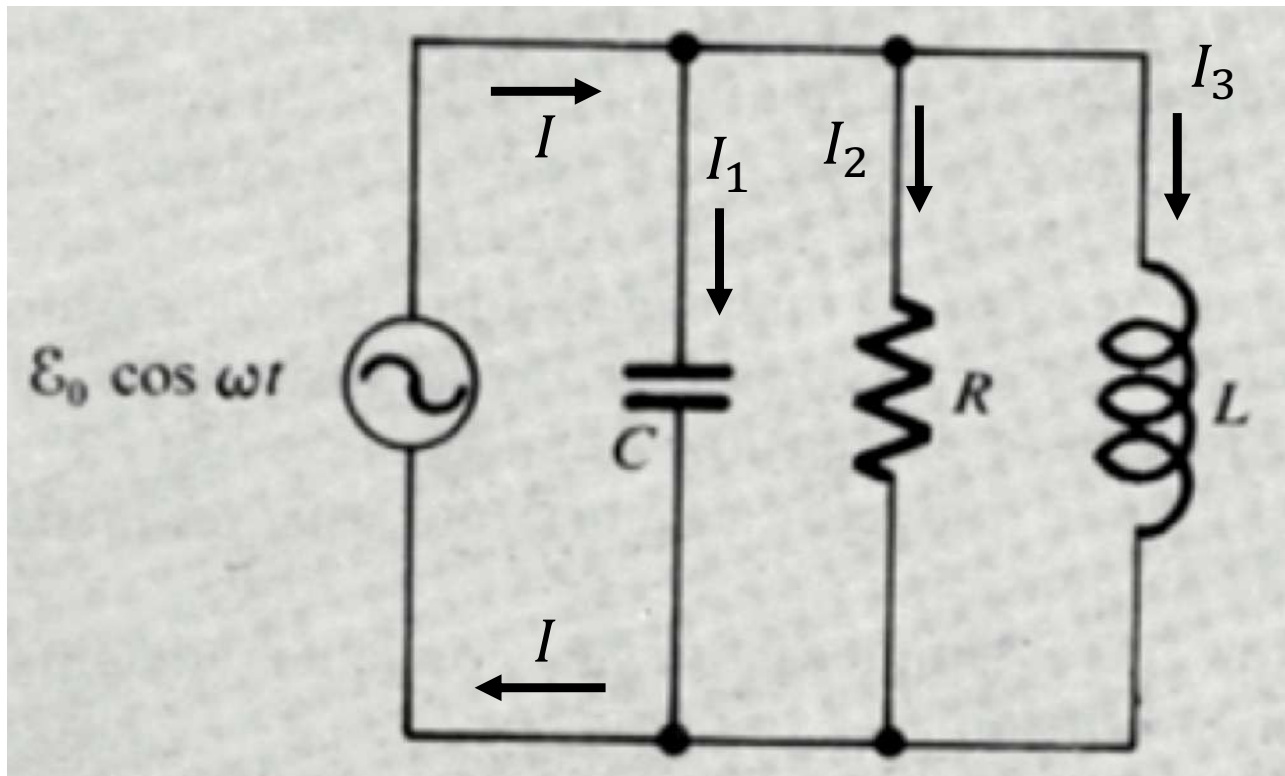
Impedancias en serie: $Z = Z_1 + Z_2$



Admitancias en paralelo: $Y = Y_1 + Y_2$



Ejercicio: RLC paralelo



- Resolver para las corrientes:

$$I, I_1, I_2 \text{ e } I_3$$

- Estudiar la impedancia equivalente en resonancia: ¿Alcanza un máximo o un mínimo?