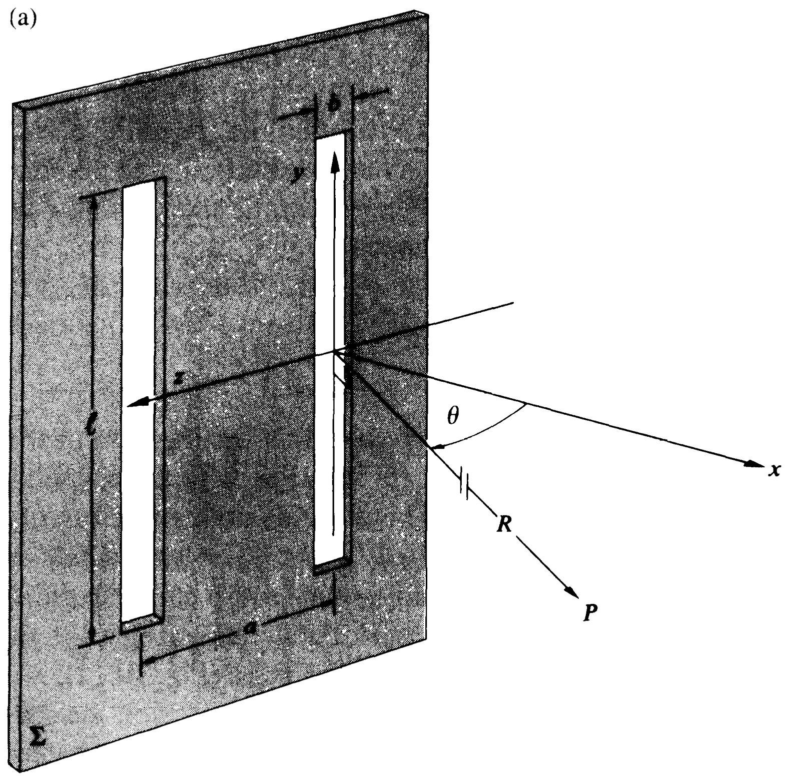
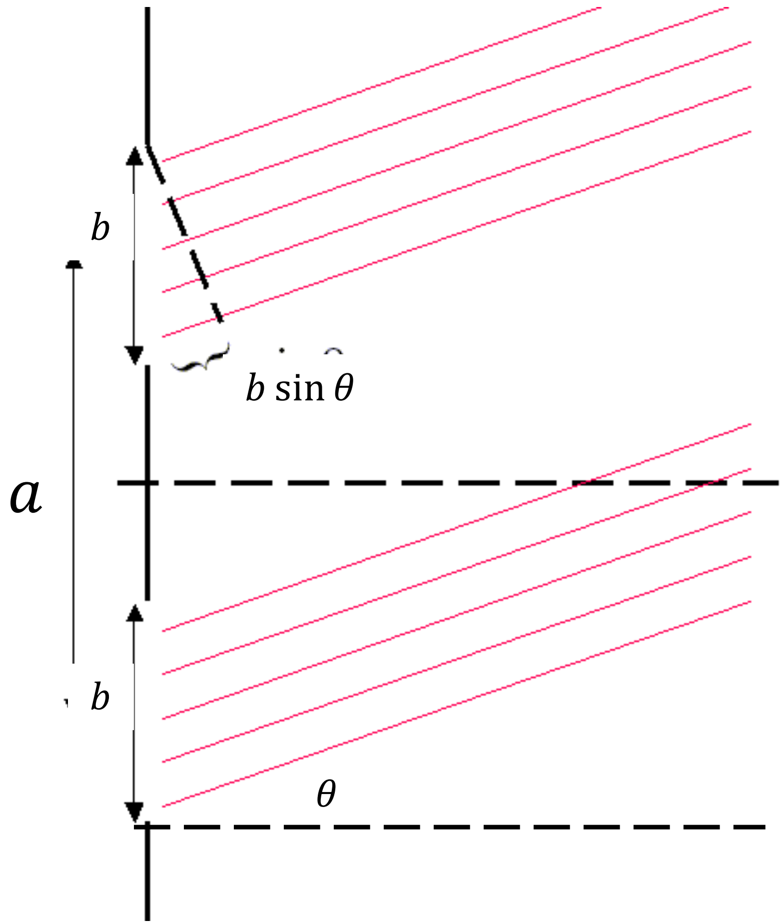
Doble rendija

- Supongamos dos rendijas idénticas del ancho b cuyos centros están separados una distancia a.
- Cada rendija por separado va a generar el patrón de difracción que vimos anteriormente.
- Para cada punto de la pantalla, las contribuciones al campo de cada rendija van a sumarse con la posibilidad de generar interferencia.



Doble rendija

- Recordemos el principio de Huygens Fresnel.
- Para una fuente lejana, la diferencia de fase inicial entre las ondas secundarias en las dos rendijas es cero.
- Luego, la diferencia de fase entre las ondas secundarias que llegan a un mismo punto P dependerá de la diferencia de camino óptico.



Doble rendija

- Hagamos el mismo planteo que para la rendija única ahora para dos rendijas vistas como dos segmentos de fuentes puntuales coherentes.
- La contribución del campo en un punto de la pantalla viene dada por:

$$E = \underbrace{C \int_{-b/2}^{b/2} F(z)\, dz}_{\text{rendija 1}} + \underbrace{C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z)\, dz}_{\text{rendija 2}}$$

- C es la misma pues es la misma amplitud que llega a cada rendija y luego a cada punto de la pantalla.

Doble rendija

- La función a integrar es similar al caso de una línea de fuentes, ahora sobre el eje z.

$$F(z) = \sin\left[\omega t - k(R - z \sin \theta)\right]$$

donde R es la distancia entre la rendija 1 y la pantalla

- La integral da:

$$E = bC\left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)\left[\sin(\omega t - kR) + \sin(\omega t - kR + 2\alpha)\right]$$

donde $\alpha = \frac{ka}{2} \sin \theta$

Doble rendija

- Esto es la suma de dos campos, uno proveniente de la rendija 1 y otro proveniente de la rendija 2

- La cantidad 2α es la diferencia de fase entre una fuente en la rendija 1 y otra a una distancia a en la rendija 2.

- Simplificando la expresión anterior tenemos

$$E = 2bC\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\cos\alpha\,\sin(\omega t - kR + \alpha)$$

Doble rendija

- Elevando la expresión anterior al cuadrado y promediándola en el tiempo para tiempos largos llegamos a la expresión para la irradiancia:

$$I(\theta) = 4I_0\left(\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\right)\cos^2\alpha$$

- Donde I_0 es la intensidad para una rendija

Doble rendija

- Esta expresión tiene un máximo en $\theta = 0$ con lo cual $\alpha = \beta = 0$.
- Ya vimos que los mínimos de difracción tenían lugar para $\beta = \pm\,\pi, \pm 2\pi \ldots \pm\, n\pi$. Esto implicaba que los mínimos de difracción se hallan en:

$$\sin\theta_{mindif} = \pm\frac{2n\pi}{kb} = \pm\frac{n\lambda}{b}$$

- Por otro lado, los mínimos de interferencia ocurren cuando:

$$\alpha = \pm\pi/2,\ \pm 3\pi/2,\ \pm 5\pi/2, \ldots$$

Doble rendija

- Esto último implica que

$$\sin\theta_{minint} = \pm\frac{(2n+1)2\pi}{2ka} = \pm\frac{(2n+1)\lambda}{2a} \quad \mathrm{n} = 0,1,2\ldots$$

- Por último, los máximos de interferencia ocurrirán cuando

$$\alpha_{maxint} = \pm n\pi \quad n = 1,2,3\ldots$$

- es decir, en las posiciones

$$\sin\theta_{maxint} = \pm\frac{2\pi n}{ka} = \pm\frac{n\lambda}{a}$$

Doble rendija: órdenes perdidos

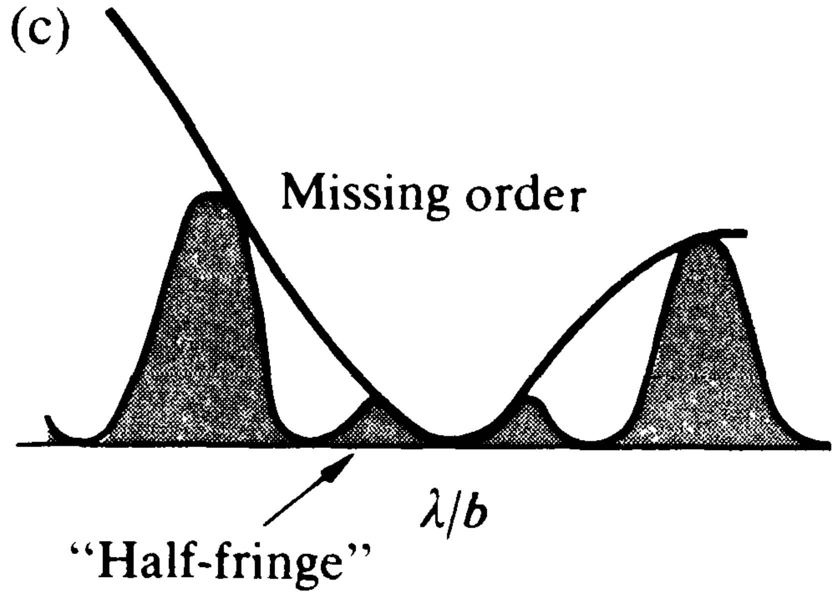
- Puede darse el caso que a sea un múltiplo de b:
$$a = mb \quad m \in \mathbb{N}$$
- Eso hace que haya 2m líneas brillantes dentro del pico central de difracción.
- Un máximo de interferencia puede coincidir espacialmente con un mínimo de difracción si:
$$a = \frac{m}{n} b$$
- En ese caso, el máximo m-ésimo coincidirá con el mínimo n-ésimo:
$$\sin \theta_{maxint}(m) = \frac{m\lambda}{a} = \sin \theta_{mindif} = \frac{n\lambda}{b}$$

Pregunta

- ¿Qué se observa en ese valor de θ?

Pregunta

- ¿Qué se observa en ese valor de θ?



N rendijas

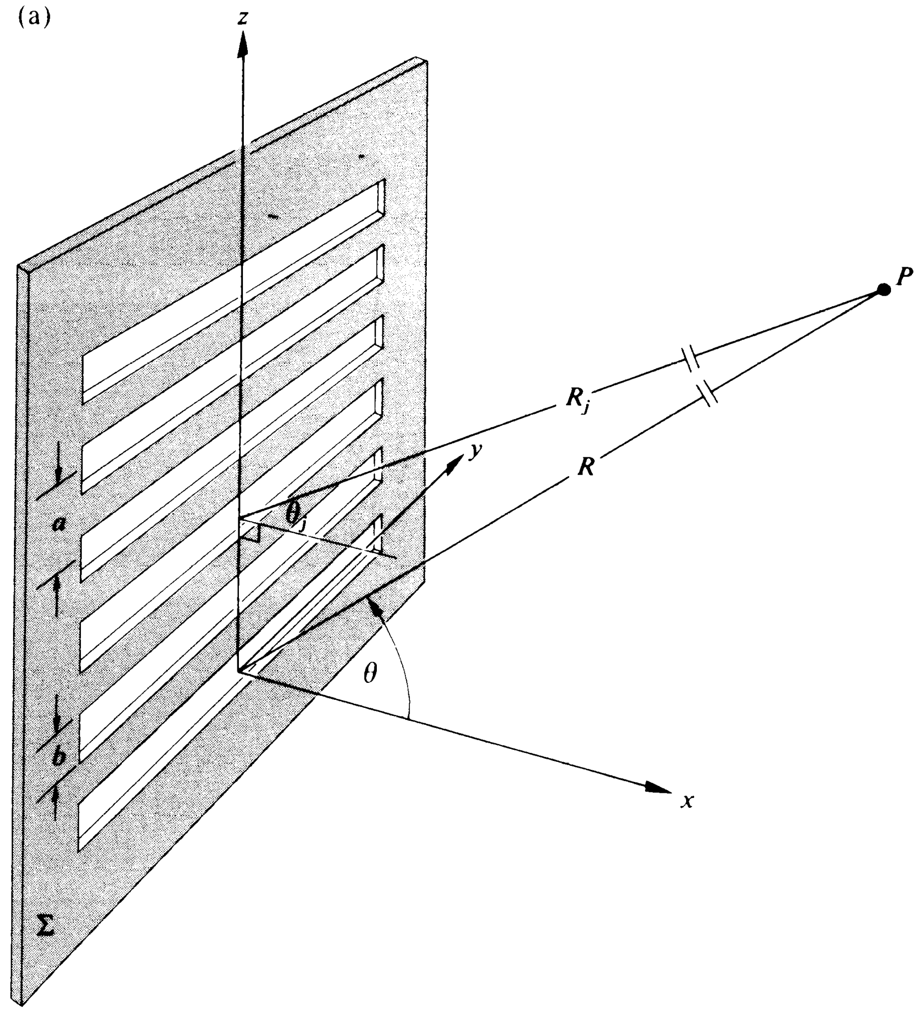
N rendijas

- Al igual que para el caso de dos rendijas sumemos las contribuciones al campo magnético en un punto de la pantalla:

$$E = C\int_{-b/2}^{b/2} F(z)\,dz + C\int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z)\,dz$$

$$+ C\int_{2a-b/2}^{2a+b/2} F(z)\,dz + \cdots$$

$$+ C\int_{(N-1)a-b/2}^{(N-1)a+b/2} F(z)\,dz$$



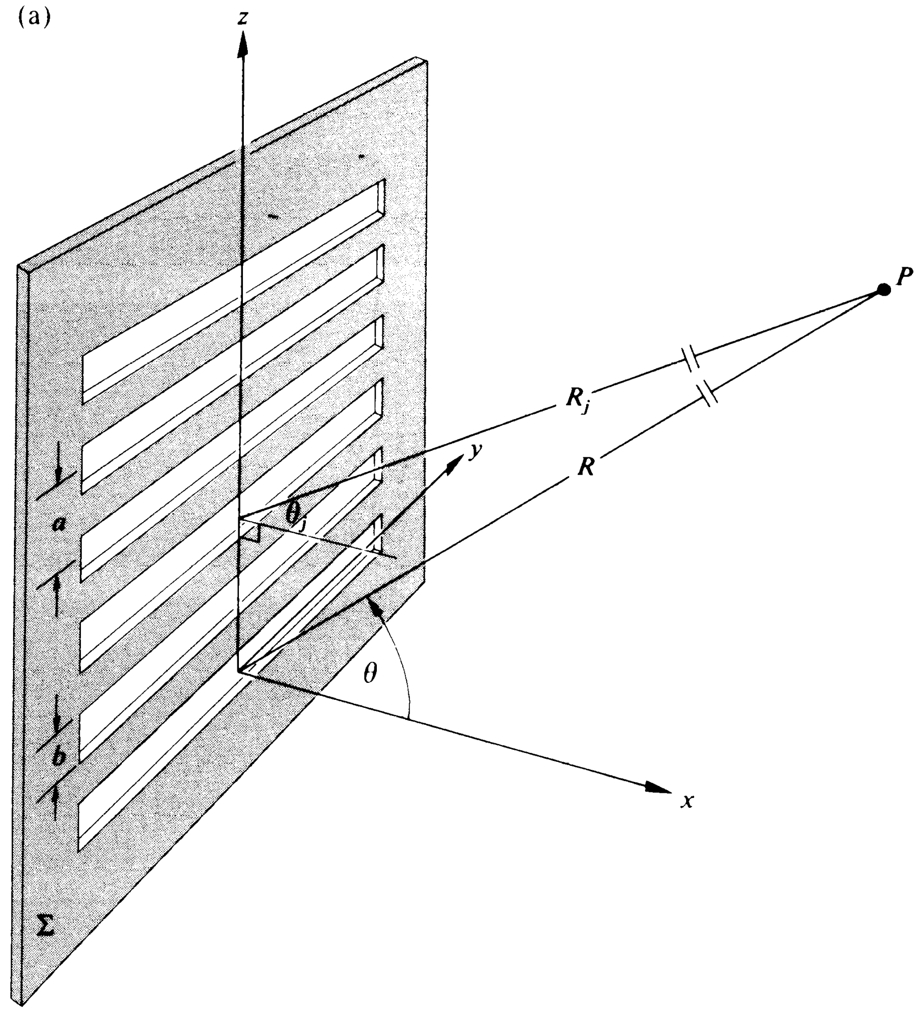
N rendijas

- En la expresión anterior, la función $F(z)$ sigue siendo:

$$F(z) = \sin\left[\omega t - k(R - z\sin\theta)\right].$$

- Una suposición adicional es que todo el conjunto de rendijas debe cumplir con la aproximación de Fraunhofer:

$$r = R - z\sin\theta$$



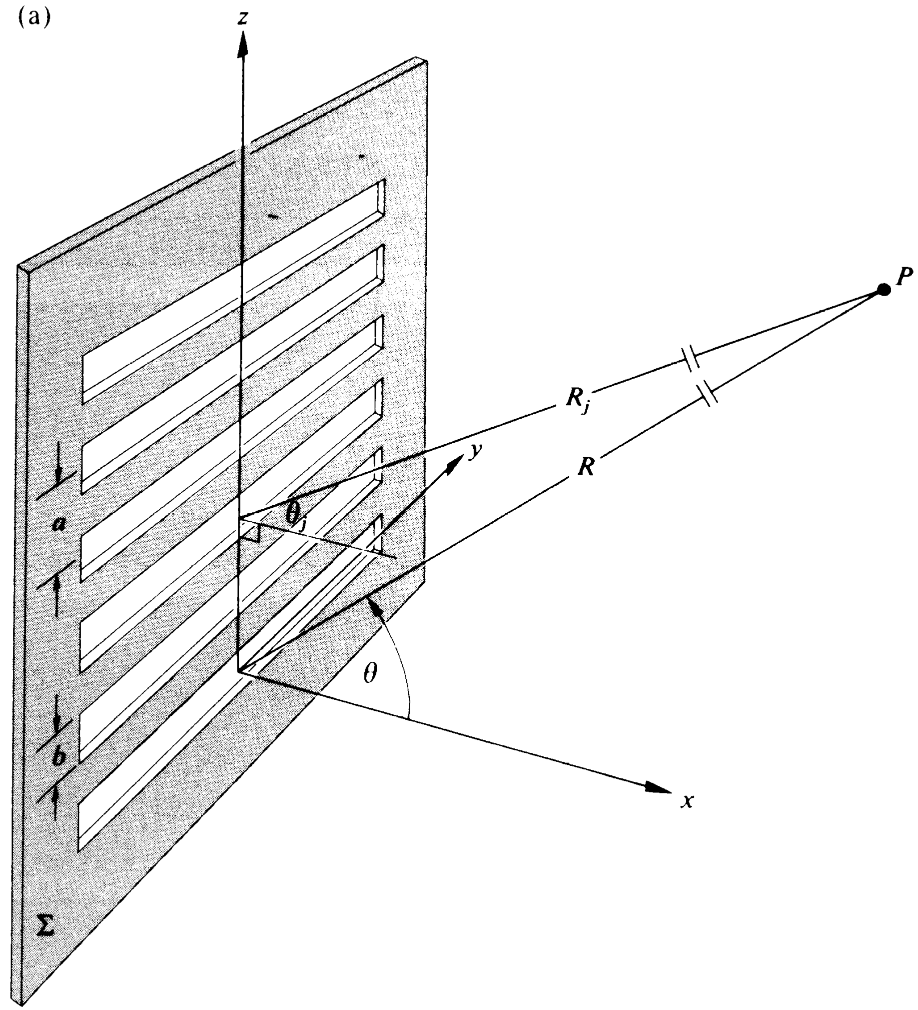
N rendijas

- En la expresión anterior, la función $F(z)$ sigue siendo:

$$F(z) = \sin\left[\omega t - k(R - z\sin\theta)\right].$$

- Una suposición adicional es que todo el conjunto de rendijas debe cumplir con la aproximación de Fraunhofer:

$$r = R - z\sin\theta$$



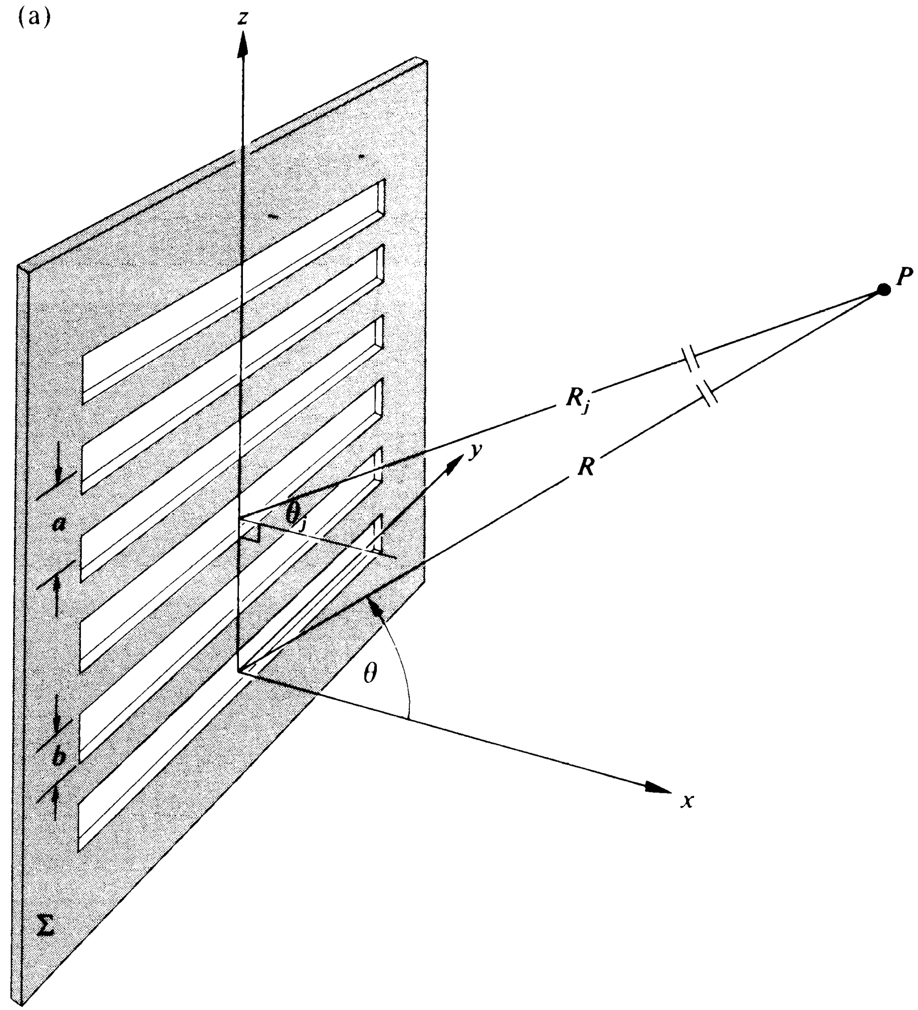
N rendijas

- La contribución de la j-ésima rendija a la integral si $\theta_i = \theta$

$$E_j = bC\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\sin\,(\omega t - kR + 2\alpha j)$$

- Entonces la contribución total en el punto P es:

$$E = \sum_{j=0}^{N-1} bC\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\sin\,(\omega t - kR + 2\alpha j)$$



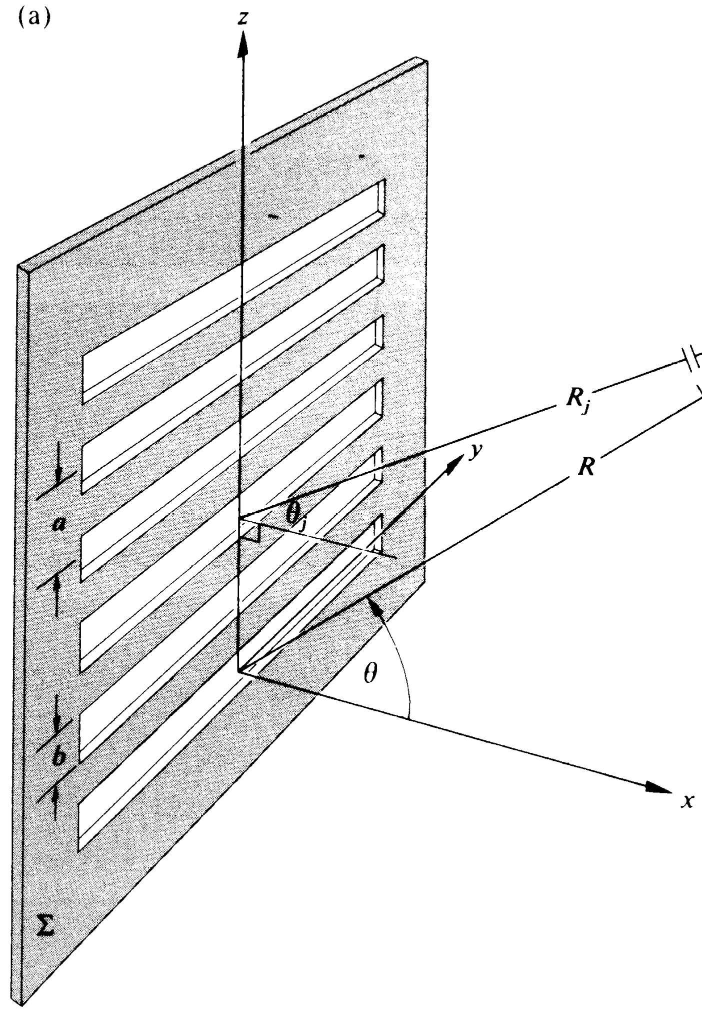
N rendijas

- Esto equivale a:

$$E = \mathrm{Im}\left[bC\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) e^{i(\omega t - kR)} \sum_{j=0}^{N-1} (e^{i2\alpha})^{j} \right]$$

- Pero ya vimos esta serie geométrica, con lo cual concluimos

$$E = bC\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin[\omega t - kR + (N-1)\alpha]$$



N rendijas

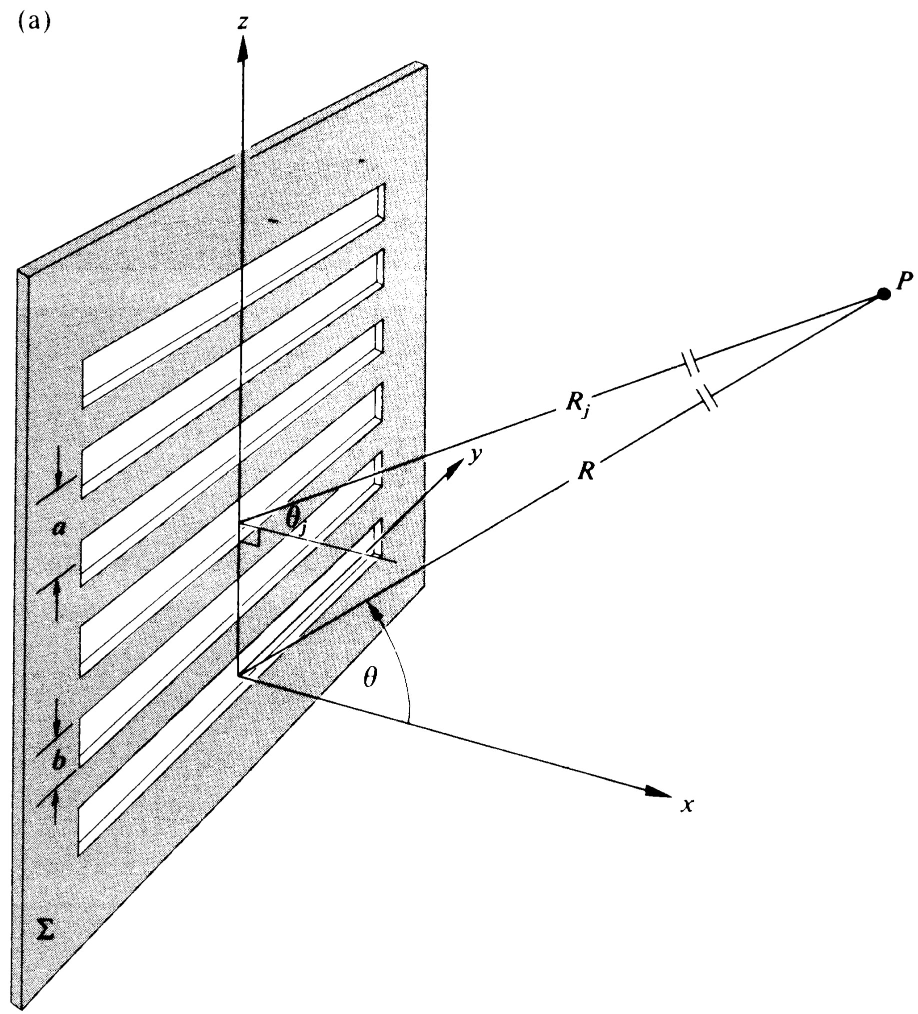
- Entonces, la irradiancia queda:

$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

- donde

$$\alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta$$

$$\beta = \frac{kb}{2}\sin\theta$$



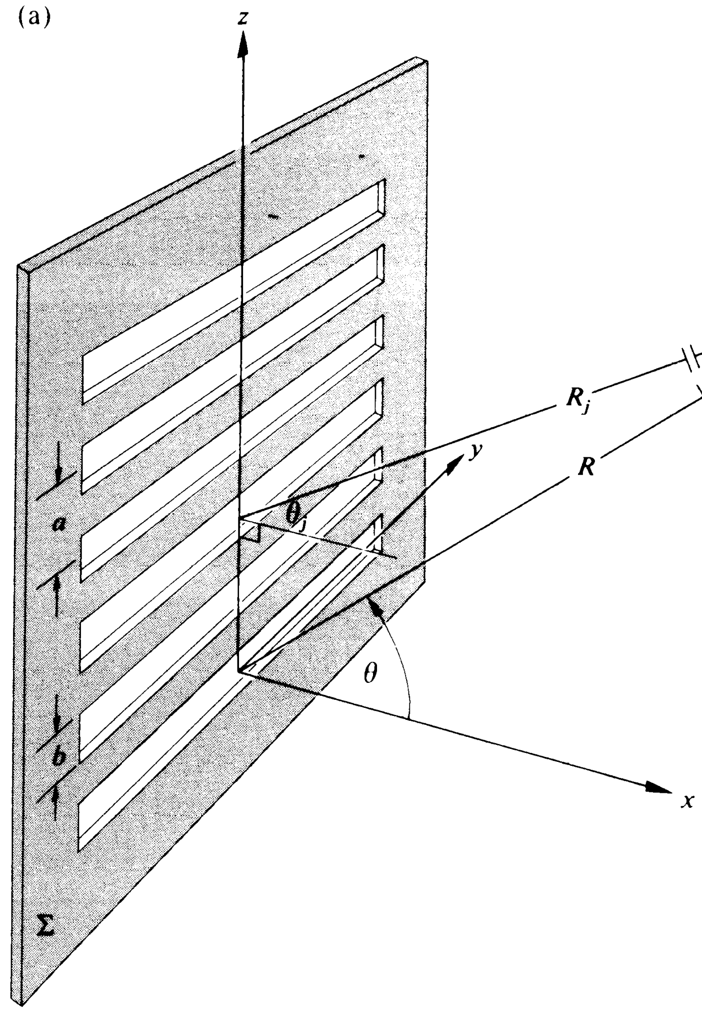
N rendijas: interferencia

- Veamos qué aporta el factor

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$$

- Este factor alcanza un valor máximo igual a N^2 cuando

$$\alpha = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$



N rendijas: máximos de interferencia

- Entonces, los máximos de

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$$

- Ocurren en las posiciones:

$$\sin \theta_{maxint} = \pm\frac{n\lambda}{a}\ ; \quad 0, 1, 2, 3 \ldots$$

N rendijas: mínimos de interferencia

- Los mínimos de la función

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$$

- Son más fáciles de encontrar, estos ocurren para los valores de

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{N}, \pm\frac{2\pi}{N}, \pm\frac{3\pi}{N}, \ldots, \pm\frac{(N-1)\pi}{N}, \pm\frac{(N+1)\pi}{N}, \ldots$$

N rendijas: mínimos de interferencia

- Los mínimos de la función

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$$

- Son más fáciles de encontrar, estos ocurren para los valores de

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{N}, \pm\frac{2\pi}{N}, \pm\frac{3\pi}{N}, \ldots, \pm\frac{(N-1)\pi}{N}, \pm\frac{(N+1)\pi}{N}, \ldots$$

Pregunta

- ¿Por qué no se incluye a $\frac{N\pi}{N}$ entre los mínimos de interferencia?

N rendijas: mínimos de interferencia

- En consecuencia, entre dos máximos de interferencia (que llamaremos principales) existen $N-1$ mínimos. Por ejemplo, entre el máximo central y los máximos principales de orden ± 1 los mínimos ocurren para

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{N}, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{3\pi}{N}, \ldots, \pm \frac{(N-1)\pi}{N}$$

- En este ejemplo, esto corresponde a las ubicaciones:

$$\sin\theta_{minint} = \pm\frac{\lambda}{aN}, \pm\frac{2\lambda}{aN}, \pm\frac{3\lambda}{aN}, \ldots, \pm\frac{(N-1)\lambda}{aN}$$

N rendijas: máximos secundarios de interferencia

- Si existen $\boldsymbol{N-1}$ **mínimos entre dos máximos principales**, deben existir **máximos secundarios entre esos mínimos**. Entre el máximo central y el primer máximo principal los máximos secundarios se ubican en

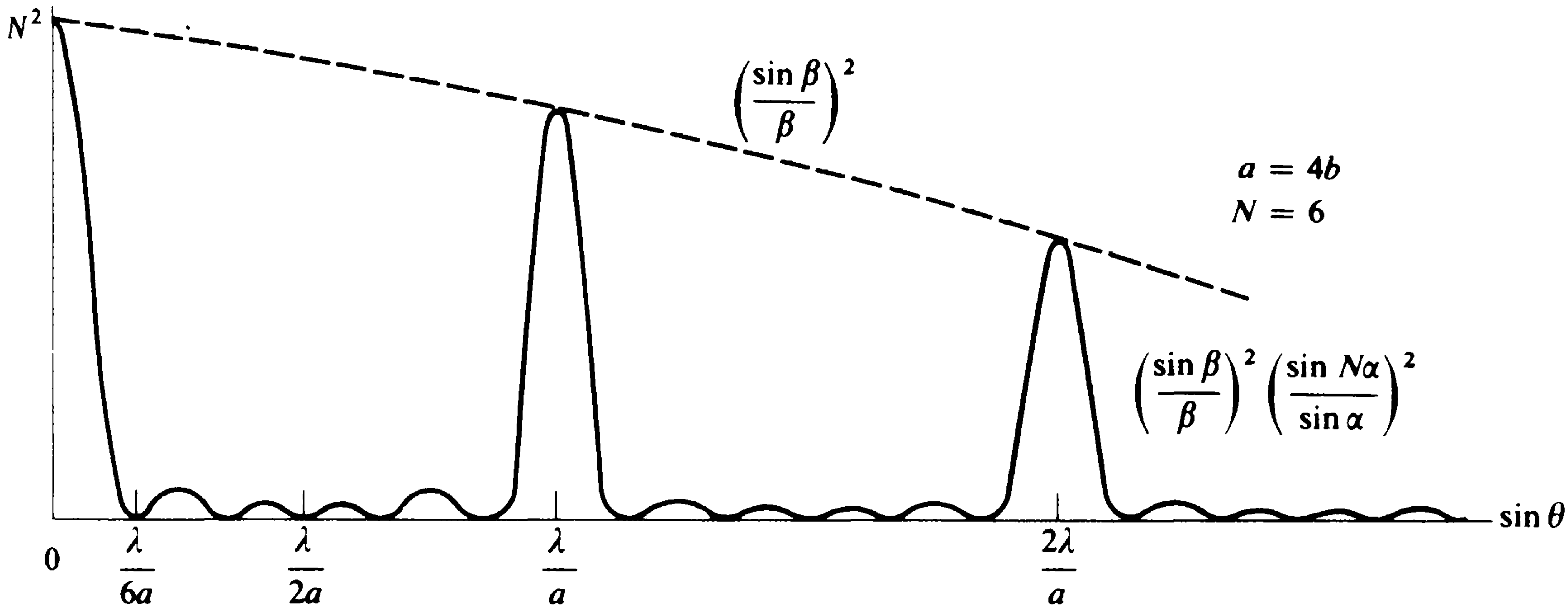
$$\alpha = \pm\frac{3\pi}{2N}, \pm\frac{5\pi}{2N}, \ldots$$

Son $N-2$ entre dos máximos principales

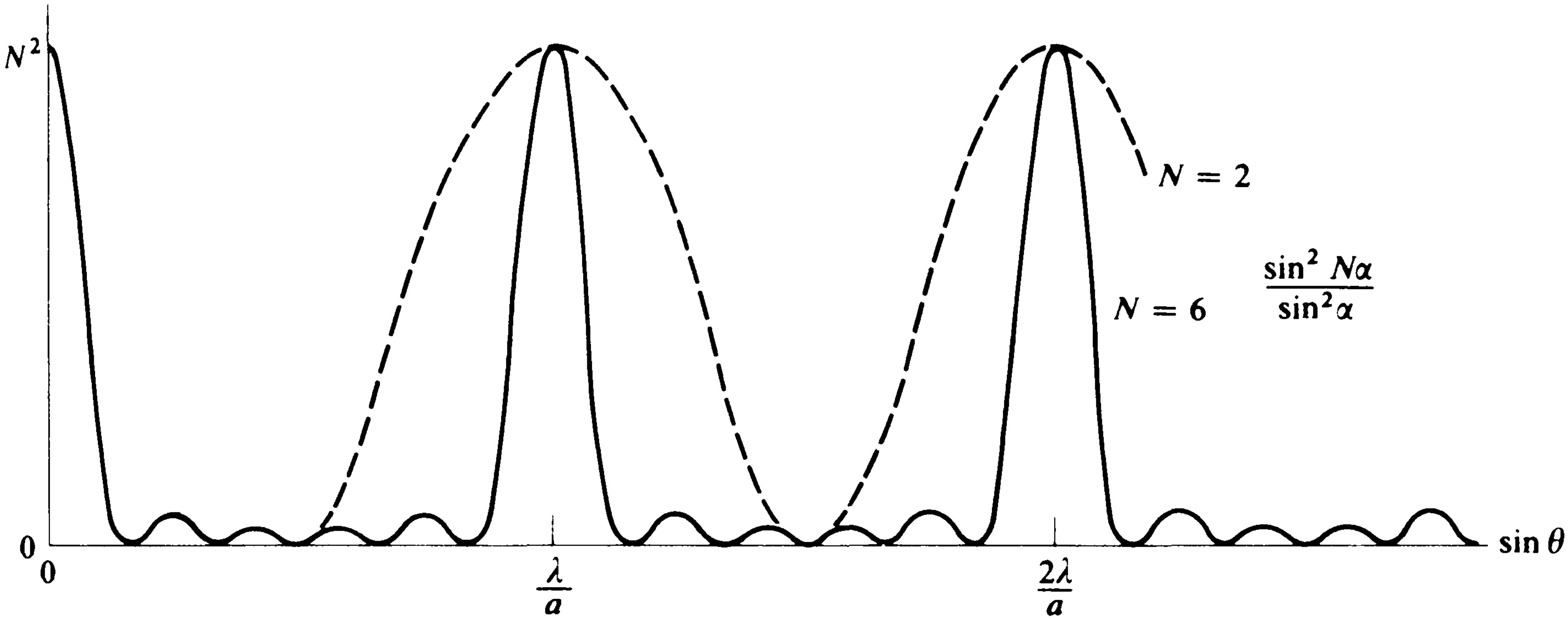
- Pues es ahí donde $\sin N\alpha$ tiene máximos
- En este ejemplo, esto corresponde a las ubicaciones:

$$\sin\theta_{maxsec} = \pm\frac{3\lambda}{2aN}, \pm\frac{5\lambda}{2aN}, \ldots$$

Ejemplo: 6 rendijas



Ejemplo: 6 versus 2 rendijas



Variación con N

- Ya sabemos dónde están los máximos y mínimos de difracción y los de interferencia.

- ¿Cómo cambian las posiciones y las irradiancias en los máximos cuando cambiamos N?

Variación con N

- Al aumentar N, la intensidad de los máximos principales de interferencia va aumentar como N^2. Es decir, acumulan más energía al aumentar N.

- La posición de los máximos principales no depende de N para $N \geq 2$.

- A la vez que crecen en intensidad, se vuelven más finos ya que los mínimos que los rodean se acercan.

$\Delta\alpha$ entre minimos que rodean a maximo principal

$$\frac{(N+1)\pi}{N} - \frac{(N-1)\pi}{N} = \frac{2\pi}{N}$$

- La posición de los máximos y mínimos de difracción no cambia con N.

Variación con N

- ¿Qué pasa con los máximos secundarios?
- Como $I(\theta = 0) = I_0 N^2$ la irradiancia puede reescribirse como:

$$I(\theta) = \frac{I(0)}{N^2}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

- Al crecer N, los valores de α_{maxsec} correspondientes a los máximos secundarios se hacen cada vez más pequeños:

- Entonces, se puede aproximar $\sin\alpha_{maxsec} \cong \alpha_{maxsec}$

Variación con N

- Como $|\sin N\alpha_{maxsec}| = 1$ la irradiancia queda:
  - Para el primer máximo secundario

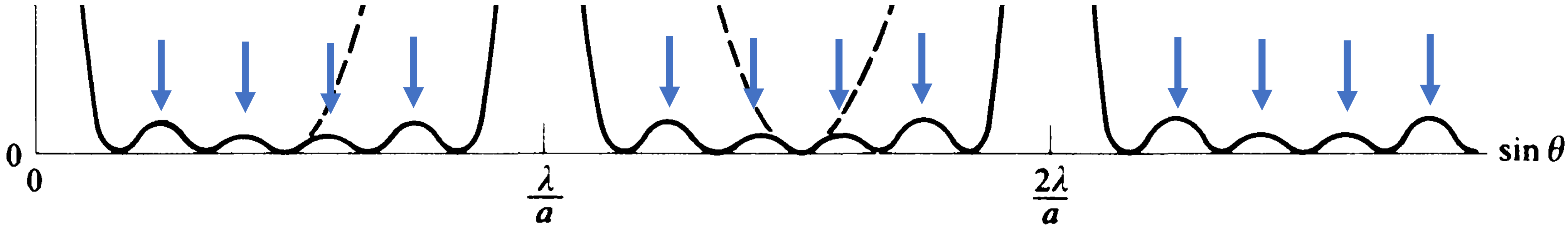
$$I(\theta_{maxsec1}) = \frac{I(0)}{N^2}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\frac{4N^2}{9\pi^2} = I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\frac{4}{9\pi^2} \cong \frac{1}{22}\ I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

  - Para el segundo

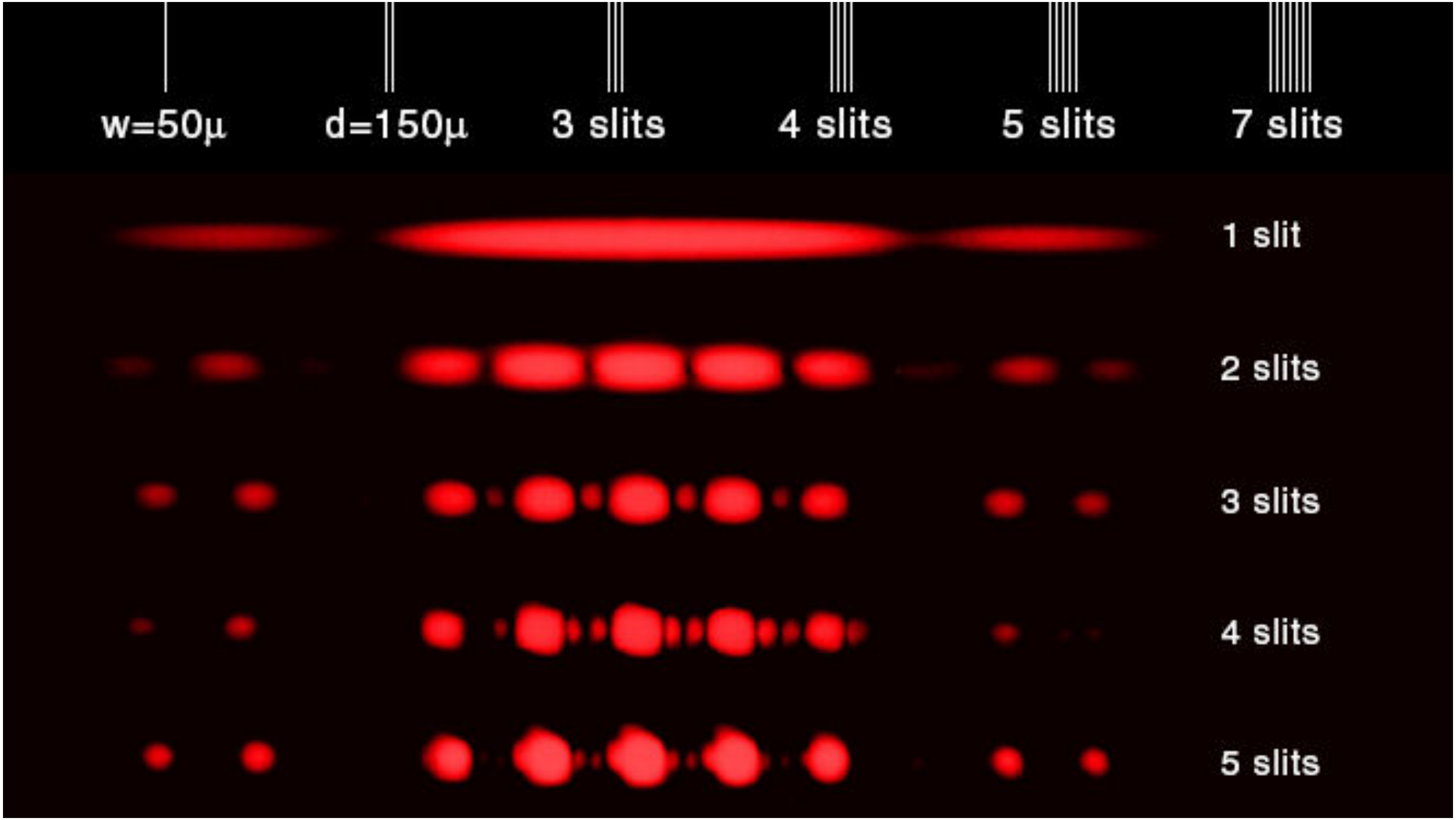
$$I(\theta_{maxsec2}) \cong \frac{1}{64}\ I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

Variación con N

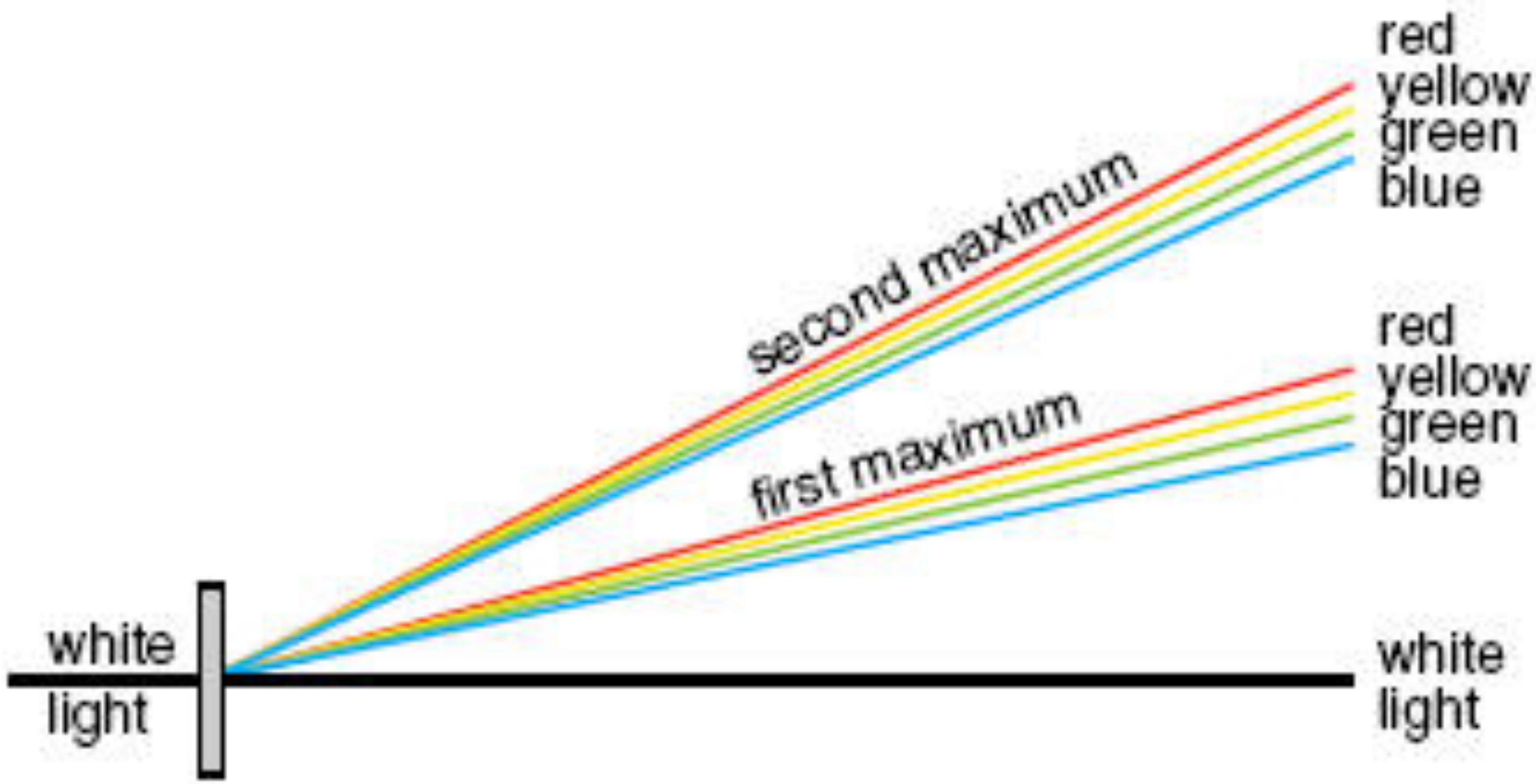
- A mitad de camino del siguiente máximo principal, la intensidad de los máximos secundarios vuelve a subir de manera simétrica.



- La irradiancia de un máximo secundario no varía con N, pero su ancho se achica con lo cual al aumentar N se perciben cada vez menos.


w=50μ
d=150μ
3 slits
4 slits
5 slits
7 slits
1 slit
2 slits
3 slits
4 slits
5 slits

Variación con λ



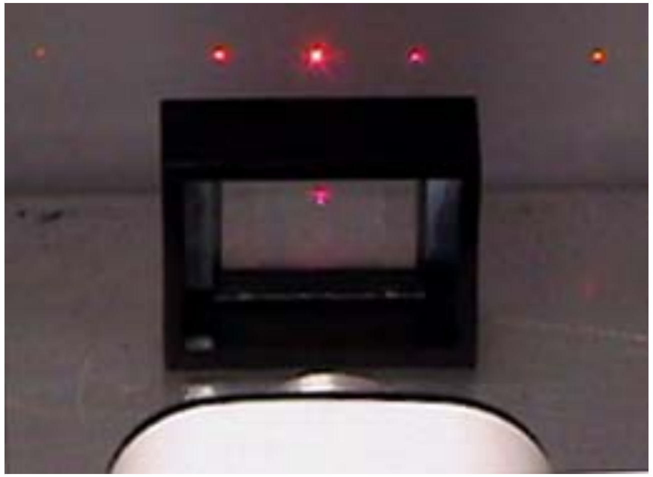
Redes de difracción

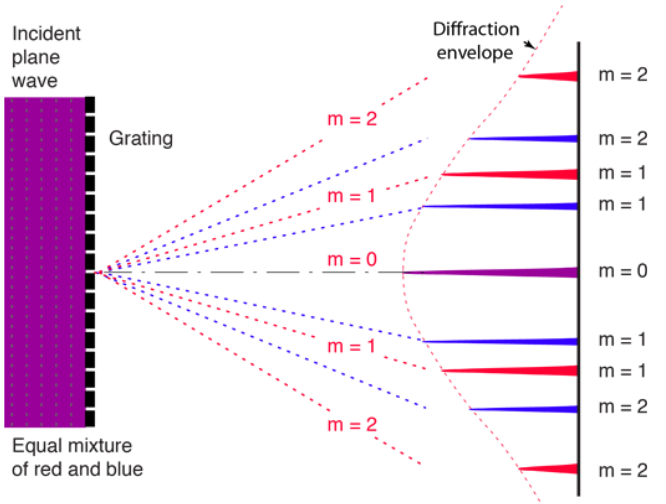
Redes de difracción

- Las redes de difracción son herramientas que permiten para separar los colores de un haz de luz con una alta resolución gracias a la dispersión entre diferentes λ.

- Aplicaciones: medición de espectros atómicos (transiciones electrónicas).

- La alta resolución se logra mediante un gran número de rendijas que vuelve a los máximos principales muy finos e intensos.





Redes de transmisión

- Redes de transmisión: arreglos de rendijas múltiples.
- Piezas de material transparente (vidrio) con canaletas

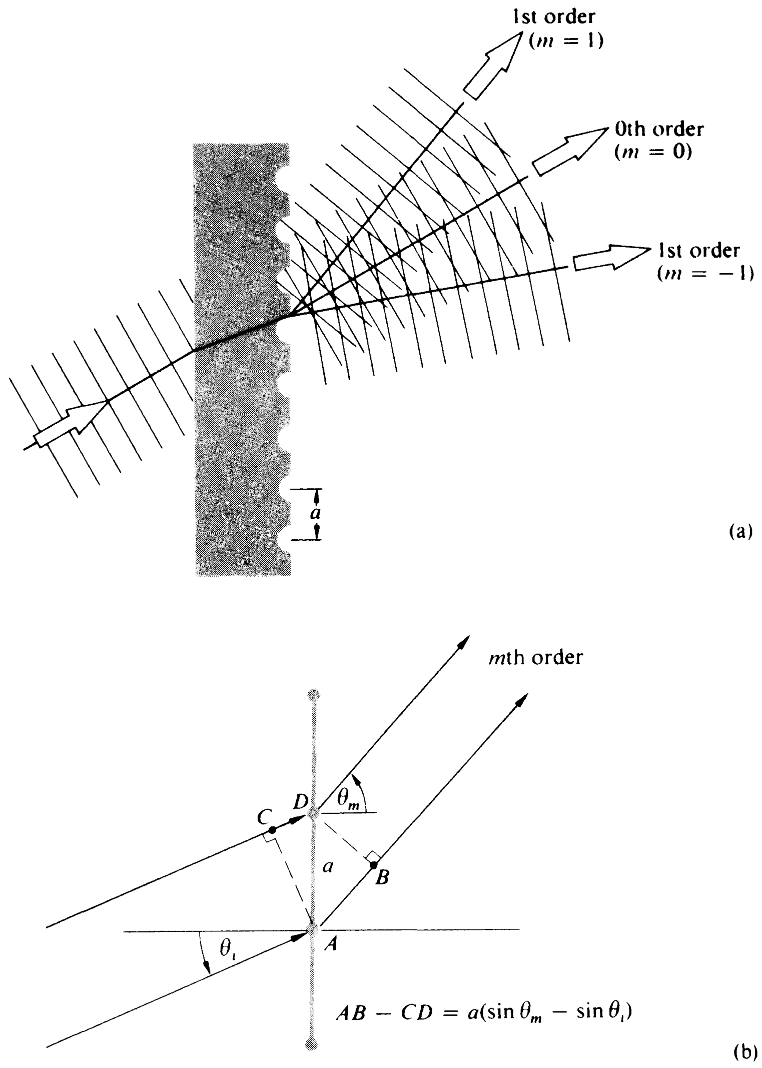


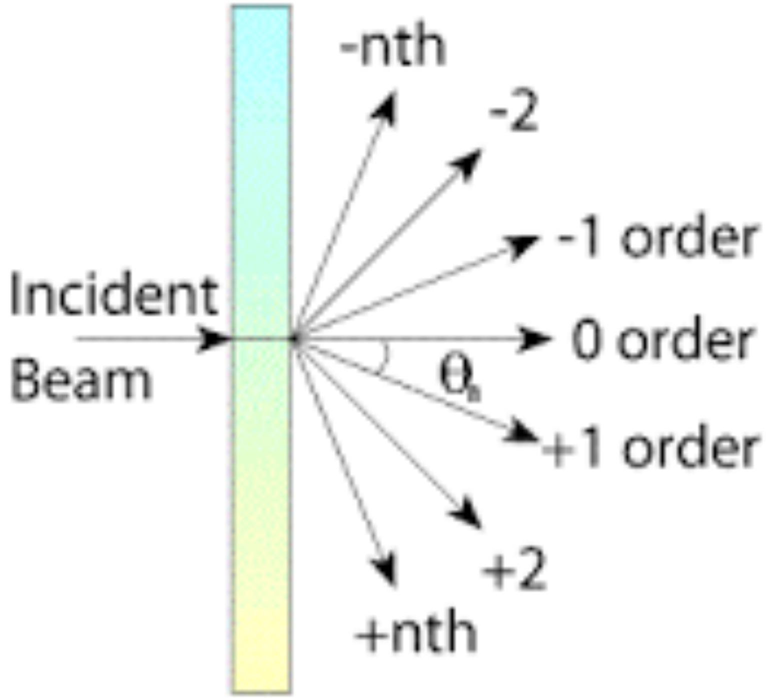
Figure 10.28 A transmission grating.

Ecuación de una red (incidencia normal)

- La ecuación de una red de difracción de transmisión para un haz proveniente de una fuente lejana que incide sobre ella de manera perpendicular nos da la posición de los máximos principales θ_m.

$$a \sin \theta_m = m\lambda$$

Donde el parámetro a es la distancia inter-rendija y m es el orden.

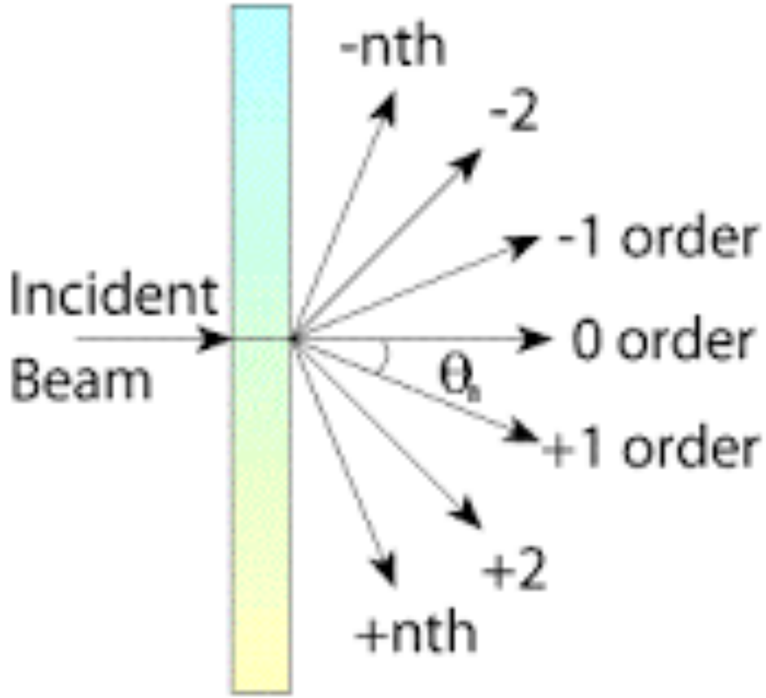


Ecuación de una red (incidencia normal)

- Para cada red y una determinada longitud de onda, existe un máximo orden que se puede ver con incidencia normal.

- Este corresponde al mayor orden M tal que: $$|\sin \theta_M| \leq 1$$

- En otras palabras
$$\frac{M\lambda}{a} \leq 1$$

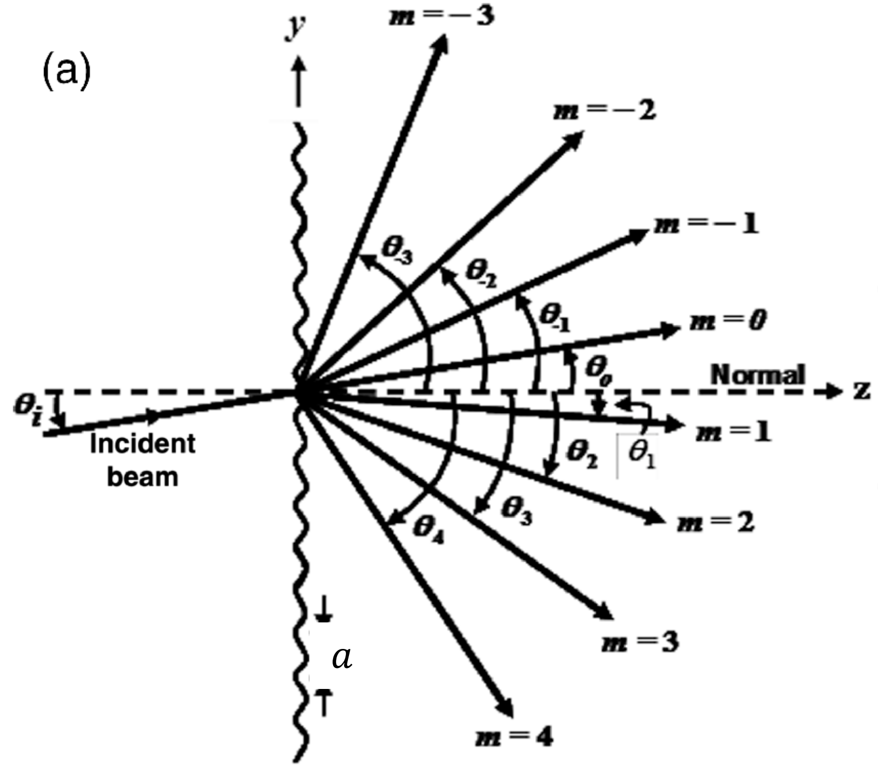


Ecuación de una red (general)

- Para acceder a ordenes mayores al máximo en condiciones de incidencia normal, se hace incidir el haz de manera inclinada.

- La ecuación para incidencia no normal es:

$$a(\sin\,\theta_m - \sin\,\theta_i) = m\lambda$$



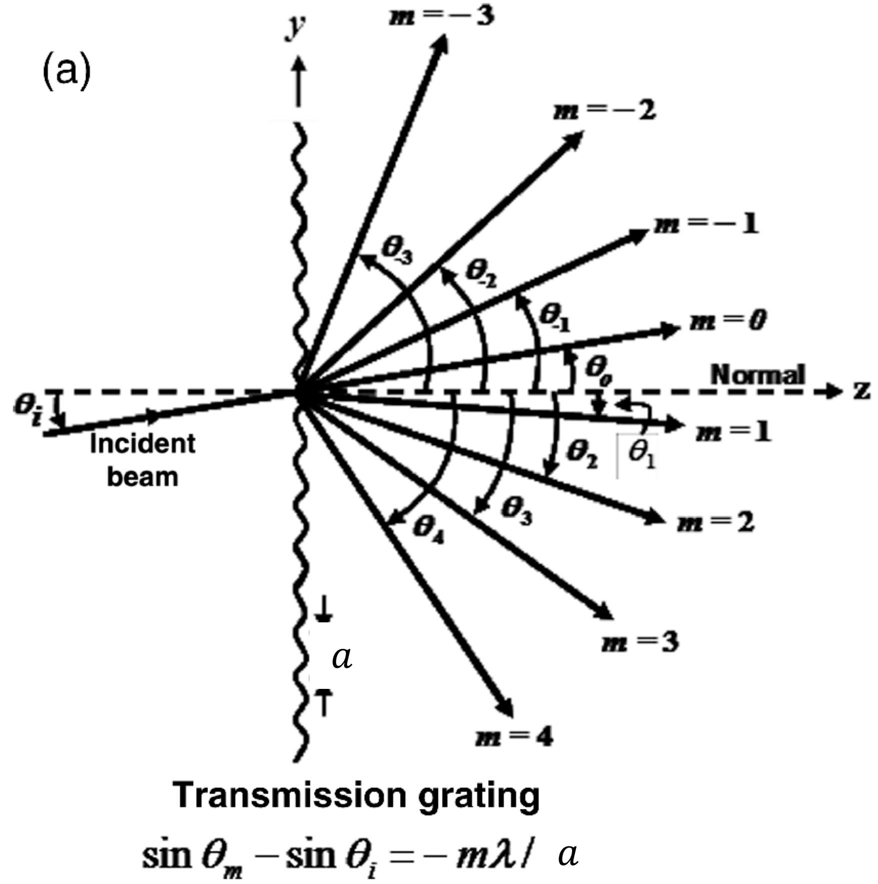
Transmission grating

$\sin\theta_m - \sin\theta_i = -m\lambda /\ a$

Repaso: Ecuación de una red (general)

La ecuación de una red de difracción para incidencia general es:

$$a(\sin\,\theta_m - \sin\,\theta_i) = m\lambda$$



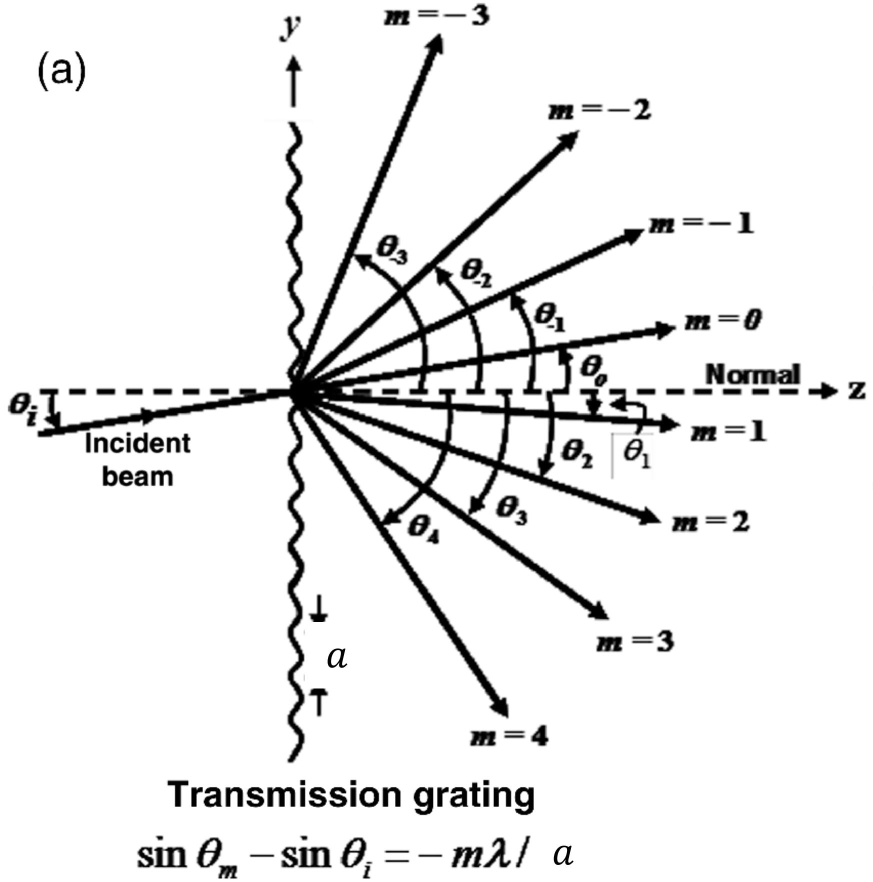
Dispersión angular de una red

- El ancho efectivo de una línea espectral es la distancia angular entre los mínimos alrededor de un máximo principal:

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{N}$$

- Para incidencia general α cambia un poco a:

$$\alpha = \frac{ka}{2}(\sin\theta - \sin\theta_i)$$



Ancho angular de una red

- Si fijamos el ángulo de incidencia, un pequeño cambio $\Delta\alpha$ se escribirá:

$$\Delta\alpha = (ka/2)\cos\theta\,(\Delta\theta)$$

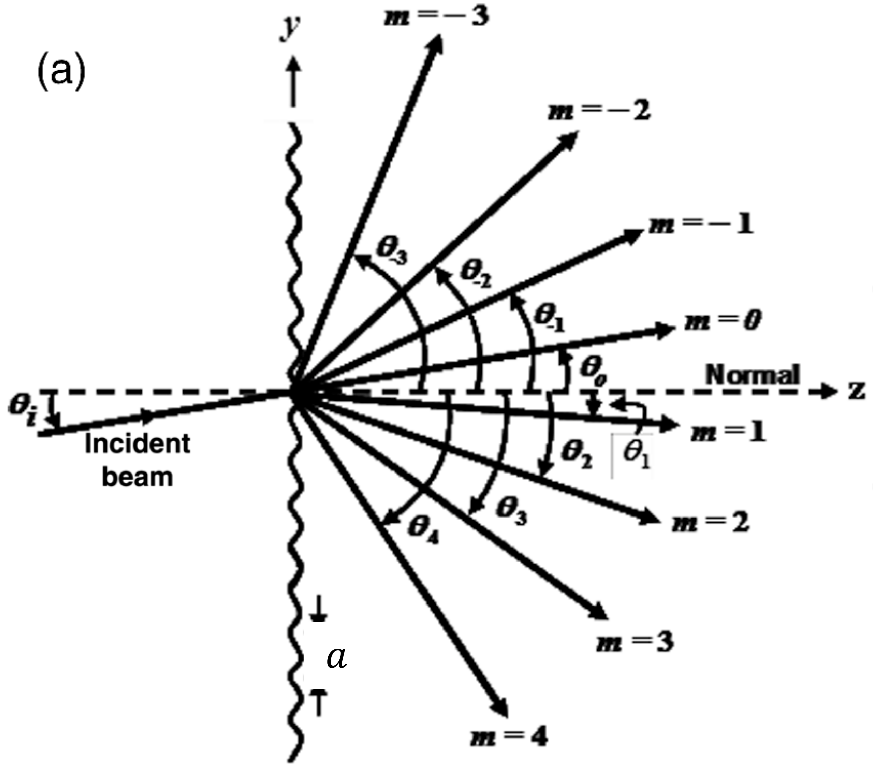
- Si igualamos esto a $\frac{2\pi}{N}$ tenemos

$$\Delta\alpha = (ka/2)\cos\theta\,(\Delta\theta) = 2\pi/N$$

- Así se obtiene el ancho angular de una línea debido al ensanchamiento instrumental:

$$\Delta\theta = 2\lambda/(Na\cos\theta_m)$$

- Notar que Na es el ancho de la red



Transmission grating

$$\sin\theta_m - \sin\theta_i = -m\lambda/\ a$$

Dispersión angular

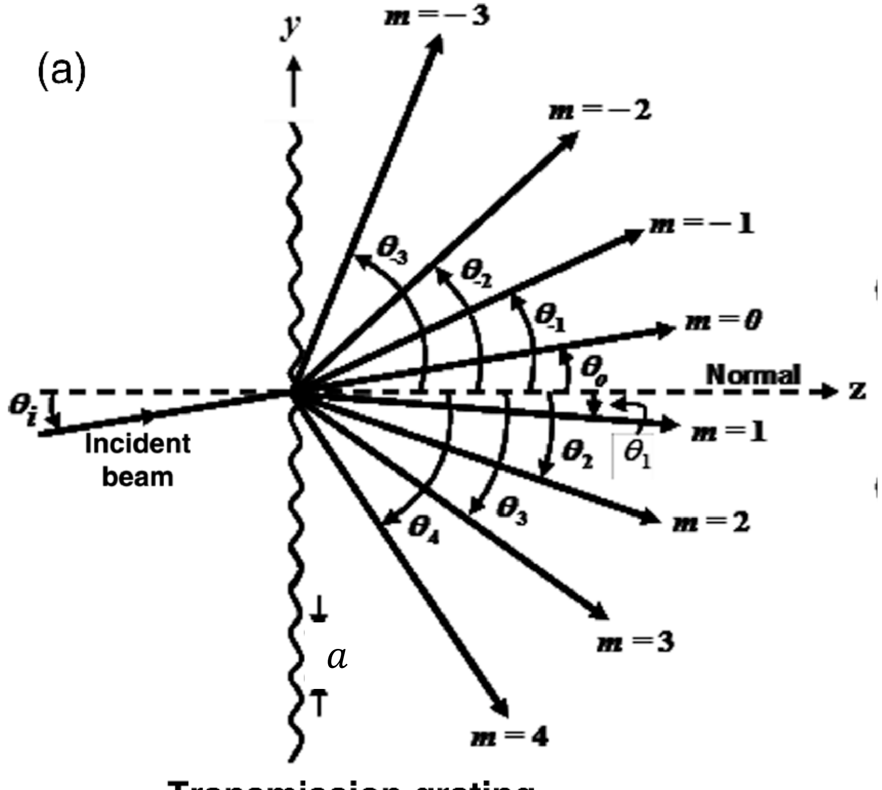
- La dispersión angular se define como:

$$\mathcal{D} \equiv d\theta/d\lambda$$

- Usando la ec. de la red, este valor queda:

$$\mathcal{D} = m/(a\cos\theta_m)$$

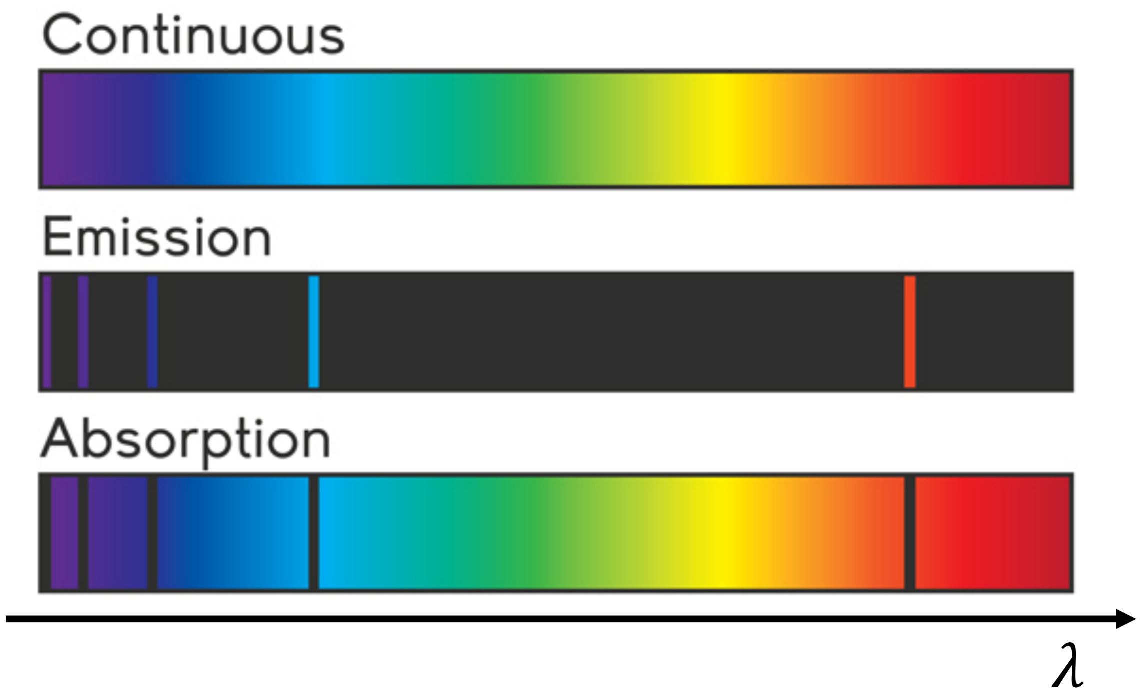
Más dispersión con mayor orden
Más dispersión con rendijas más juntas



Espectroscopía

- Conjunto de métodos donde la interacción entre la radiación electromagnética y la materia es usada para obtener propiedades fundamentales.
- Tipos de espectro (Leyes de Kirchhoff):
  - Contínuo
  - Emisión
  - Absorción

Tipos de espectro en el rango visible

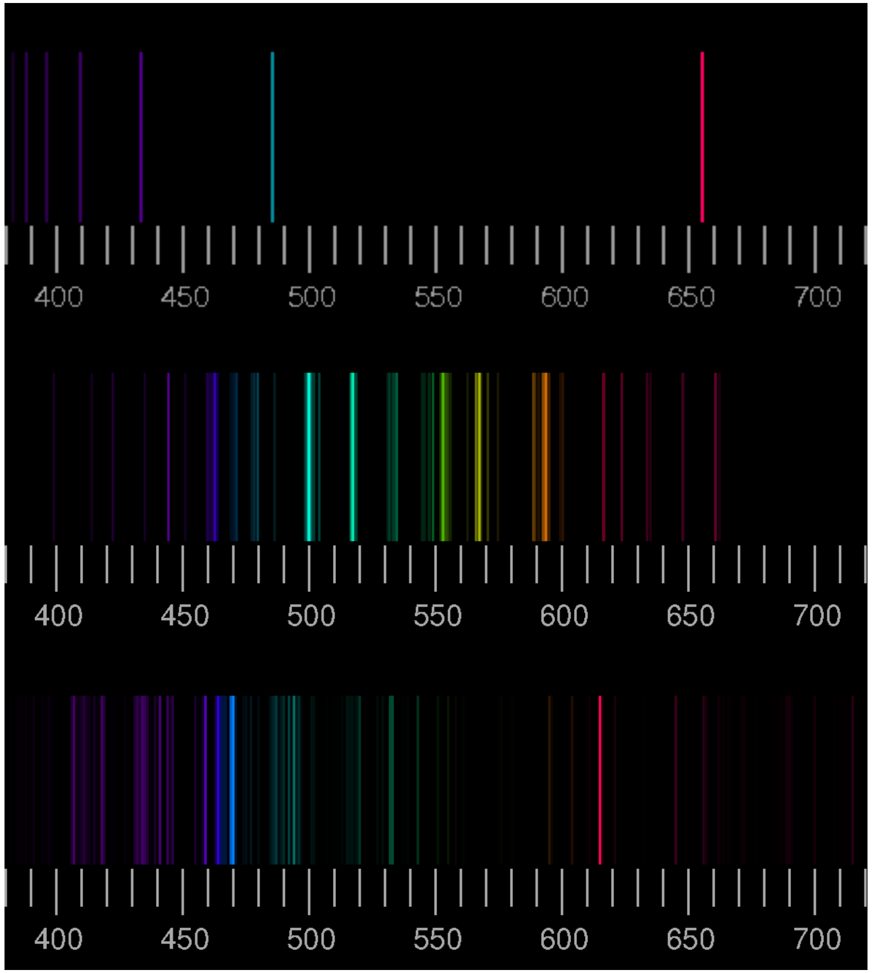


Espectros de emisión (rango visible)

Hidrógeno

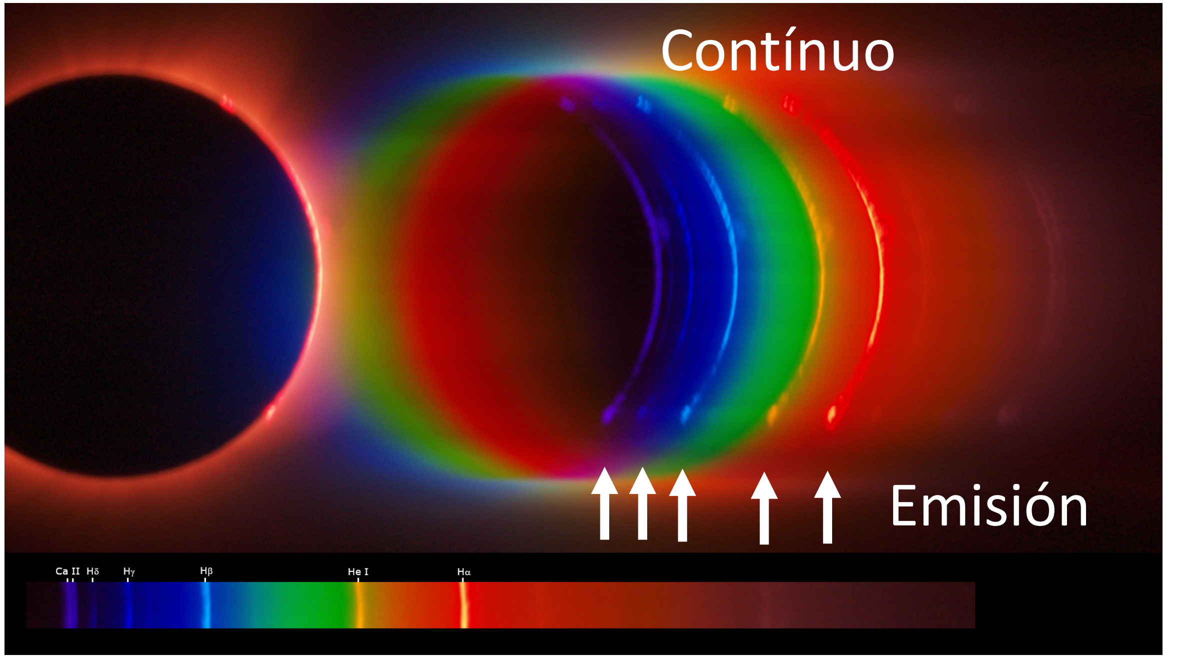
Nitrogeno

Oxígeno



Espectro cromosférico solar en eclipse (2017)

- Espectro flash de la cromósfera solar (parte externa) durante eclipse total de sol en EEUU
- El espectro fue tomado durante 33 ms luego de la totalidad
- A la izquierda es el máximo central que concentra todas las longitudes de onda.
- A la derecha está el primer máximo principal de la red, el cual consta de un contínuo más líneas de emisión
- Las líneas de emisión corresponden a:
  - Calcio (Violeta)
  - Hidrógeno (Violeta, Azul y Rojo)
  - Helio (Amarillo)



¿Cómo identificamos dos líneas espectrales vecinas?

Doblete del Sodio
589 y 589,6 nm

Poder resolvente y el criterio de Rayleigh

- Cuando la diferencia entre las λs de dos líneas espectrales es tan pequeña que se superponen en parte, el pico resultante de cada una se vuelve ambíguo.
- El ***poder resolvente cromático*** de un espectrómetro se define como:

$$\mathcal{R} \equiv \lambda/(\Delta\lambda)_{\mathrm{min}}$$

donde $\Delta\lambda_{min}$ es la menor diferencia de longitud de onda discernible y λ la longitud media

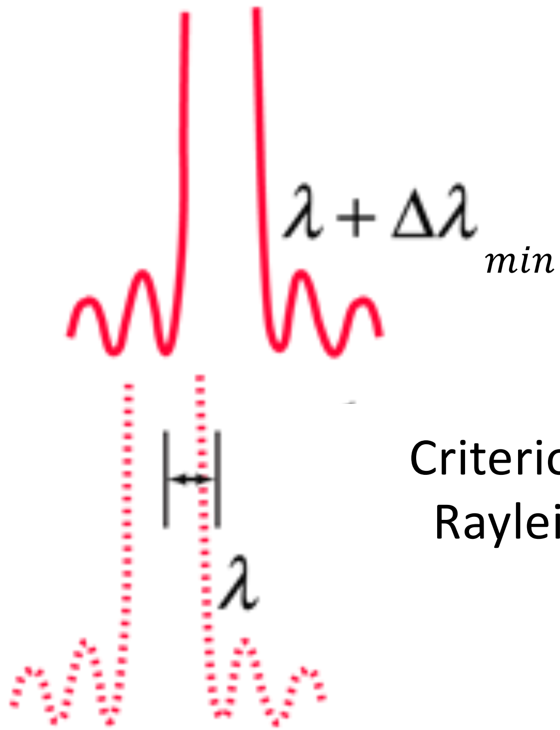
Poder resolvente y el criterio de Rayleigh

- El **criterio de Lord Rayleigh** para la resolución de dos líneas de igual densidad de flujo requiere que el máximo principal de una coincida en posición con el **mínimo adyacente al máximo** de la otra.
- Siendo el ancho de una línea

$$\Delta\theta = 2\lambda/(Na \cos \theta_m)$$

- La distancia de una línea al primer mínimo adjacente es la mitad:

$$(\Delta\theta)_{\min} = \lambda/(Na \cos \theta_m)$$



Criterio de Rayleigh

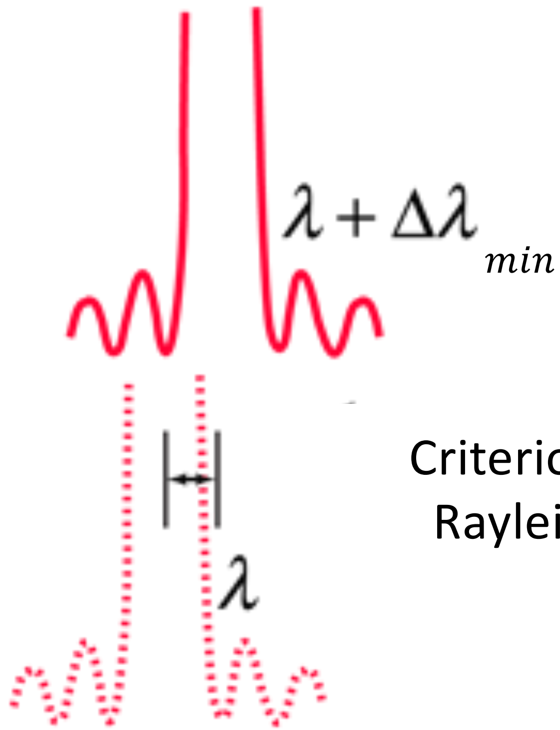
Poder resolvente y el criterio de Rayleigh

- Aplicando la definición anterior a la dispersión tenemos:

$$(\Delta\theta)_{\min} = (\Delta\lambda)_{\min}\, m/(a \cos \theta_m)$$

- Dividiendo las dos ecuaciones anteriores llegamos al poder resolvente:

$$\lambda/(\Delta\lambda)_{\min} = mN$$



Criterio de Rayleigh

Poder resolvente y el criterio de Rayleigh

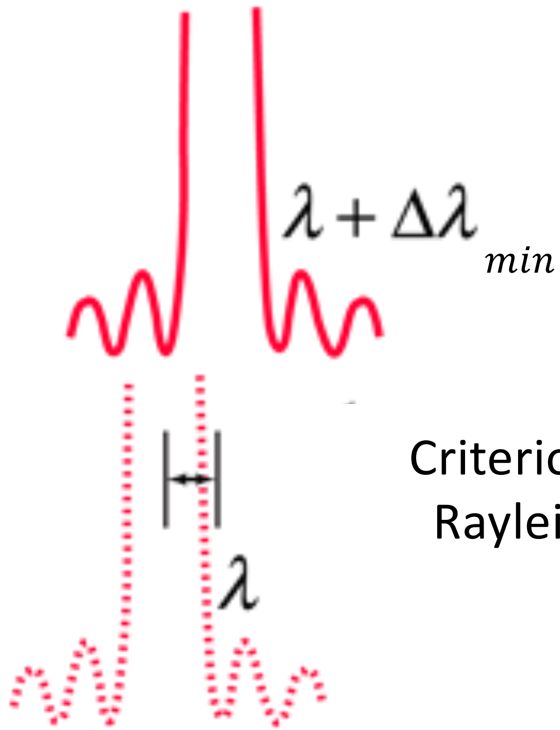
- Pero por la ecuación de red general:

$$a(\sin\theta_m - \sin\theta_i) = m\lambda$$

- Entonces, el poder resolvente en función de la posición queda:

$$\mathcal{R} = \frac{Na(\sin\theta_m - \sin\theta_i)}{\lambda}$$

- Aumenta con Na, el ancho de la red.
- Aumenta con el orden
- Disminuye con λ



Criterio de Rayleigh

Pregunta

- ¿Qué poder resolvente aproximado necesitamos para discernir las dos líneas del doblete del Sodio ?