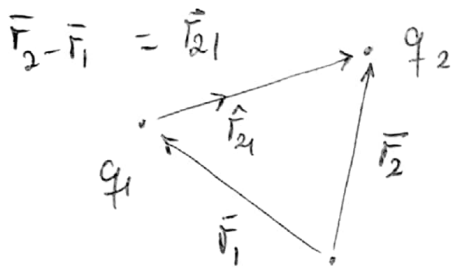


Electrostática (cargas fijas en el espacio)

Fuerza de Coulomb:



$$\vec{F}_{21} = \frac{k \cdot q_2 \cdot q_1 \cdot \hat{r}_{21}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}$$

fuerza sobre 2 por 1.

O: origen del sist. de ref.

$$= k \cdot q_2 \cdot q_1 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

- proporcional a $k \cdot q_1 \cdot q_2$; $q_1, q_2 \geq 0$: igual signo se repelen, \neq signos se atraen
 - de. eléctrica
 - carga que ejerce \vec{F}
 - carga que sufre \vec{F}

sobre la línea que une las cargas 1 y 2 : \hat{r}_{21}

inversamente prop. al cuadrado de la distancia entre sí

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} ; N = \text{Newton}, m = \text{metro}$$

$$e^- = -1.6 \times 10^{-19} C \quad C = \text{Coulomb}$$

Guía 1: Electrostatica

P1) a) Calcular $\frac{q}{m}$ de 2 partículas idénticas para las cuales

$$|F_{\text{electr.}}| = |F_{\text{grav.}}|$$

$$\frac{k \cdot q \cdot q}{d^2} = \frac{G \cdot m \cdot m}{d^2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{q}{m} \right] = \sqrt{\frac{G}{k}} = \sqrt{\frac{6.7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}}{9 \times 10^9 \text{ N kg}^2 \text{ m}^{-2}}} \approx 8.6 \times 10^{-11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

Comparar con : $\frac{e}{m_e} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} \approx 1.8 \times 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$

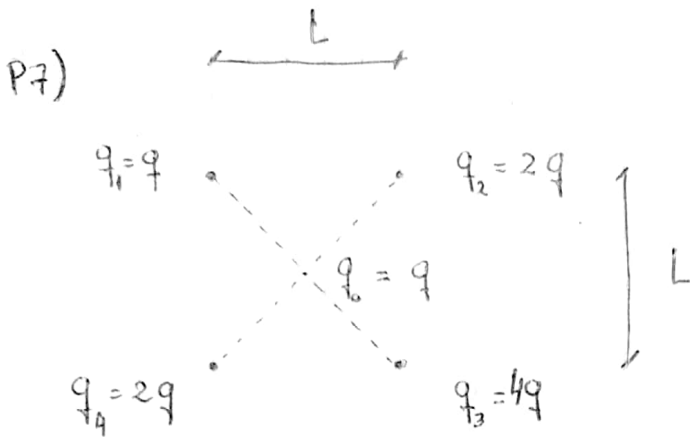
electrón

Condición : $|F_e| = |F_g|$ Si $\frac{q}{m} \approx \left(\frac{e}{m_e} \right) 10^{-22}$

Si tomamos al electrón como referencia (partícula portadora típica) :

$$\frac{|F_{e^-}|}{|F_{g_{e^-}}|} = \frac{e^2 \cdot k}{m_e^2 \cdot G} \sim 10^{42}$$

la fuerza eléctrica es típicamente 42 órdenes de magnitud superior a la gravitatoria



$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \vec{F}_{03} + \vec{F}_{04}$$

fuerza sobre q_0

$$\vec{F}_{0i} = k q_i q_0 \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3}$$

Fuerza electrostática sobre ' q_0 ' debido a ' q_i '

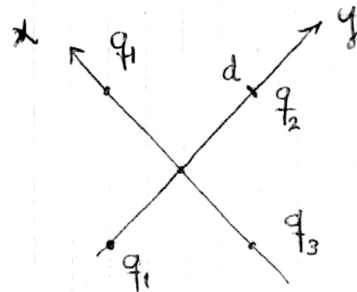
Obs: 1) $\vec{F}_{02} + \vec{F}_{04} = \vec{0}$

$|\vec{F}_{02}| = |\vec{F}_{04}|$ y opuestas

2) $|\vec{F}_{03}| > |\vec{F}_{01}| \Rightarrow \vec{F}_0 \parallel (\vec{r}_0 - \vec{r}_3)$



Sistema de referencia:



$$\vec{r}_0 = 0, \vec{r}_1 = d\hat{x}, \vec{r}_3 = -d\hat{x}$$

$$\vec{F}_{03} = k q_0 q_3 \frac{d\hat{x}}{d^3} = k \frac{4q^2}{d^2} \hat{x}$$

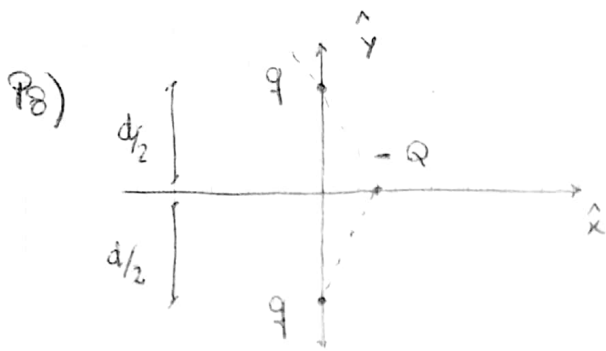
$$\vec{F}_{01} = -k \frac{q^2}{d^2} \hat{x}$$

$\otimes z$

$$d = \frac{\sqrt{L^2 + L^2}}{2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F}_0 = \frac{3kq^2}{d^2} \hat{x}$$

$$[F_0] = [k] \frac{[q]^2}{[L]^2} = \text{Newton}$$



▶ las cargas q están fijas

▶ $-Q$ libre, inicialmente en reposo en x

▶ Mostrar que si $x \ll d$ se tiene movimiento armónico simple en " x "

Ley de Newton:

$$m \cdot \ddot{x} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{\text{electricas}} = \vec{F}$$

masa y aceleración de la partícula en $-Q$.

posición de $-Q$

$$\vec{r}_- \equiv \vec{r} = x \cdot \hat{x} \quad ; \quad \vec{r}_{\pm} = \pm \frac{d}{2} \hat{y} \quad ; \quad \text{posición fija de } q \text{ y } q$$

Slo mov. en x



la fuerza resultante es en dirección " x ".

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = -2Qq \cdot k \cdot x \cdot [x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{-3/2} \hat{x}$$

$$\vec{F}_+ = -Q \cdot q \cdot k \left(\frac{x \hat{x} \mp \frac{d}{2} \hat{y}}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{3/2}} \right)$$

Fuerza restitutiva hacia el eje y . ✓

• Si $x \ll d$: $\vec{F} \approx -\frac{2kQq}{(d/2)^3} x \hat{x} + O\left[\left(\frac{x}{d}\right)^2\right]$

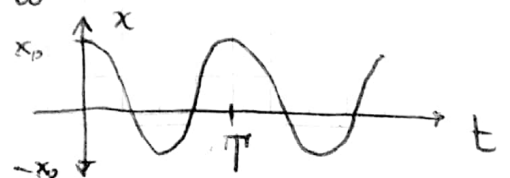
∴ $m \cdot \ddot{x} = -\alpha \cdot x$; $\alpha = 16kQq/d^3 > 0$

Ec. oscilador armónico

∴ $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$; $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

Sol. gral: $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$: período de oscil.

Condiciones iniciales: $x(t=0) = x_0$ $\left\{ \begin{array}{l} A = x_0 \\ \varphi = 0 \end{array} \right.$
 $\dot{x}(t=0) = 0$



Campo Eléctrico :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{q \neq 0} k \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{r^2}$$

(donde "q" es una carga de prueba)

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

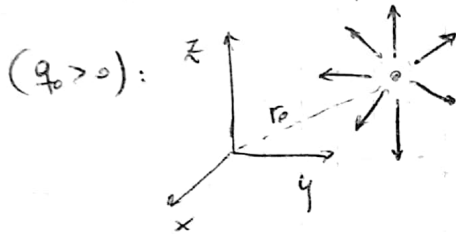
Campo \vec{E} $\forall \mathbb{R}^3$ (generado por q_i)

\vec{r} : punto campo

\vec{r}_i : punto fuente

• Campo de q_0 en \vec{E} :

$$\vec{E}(\vec{r}) = k q_0 \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$



($q_0 > 0$):

líneas de campo

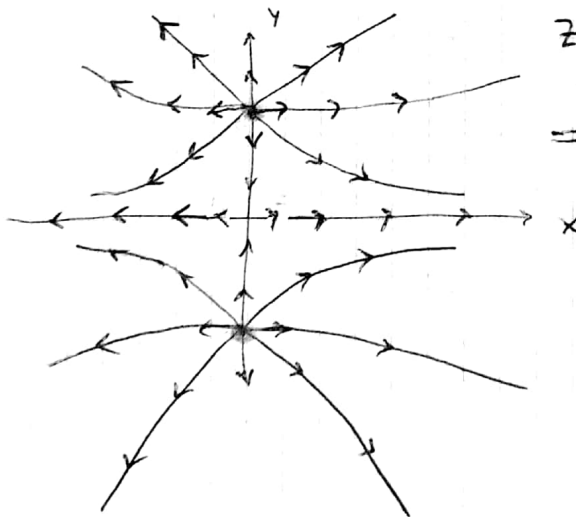
eléctrico : radiales desde la carga

si $q_0 > 0$ son salientes

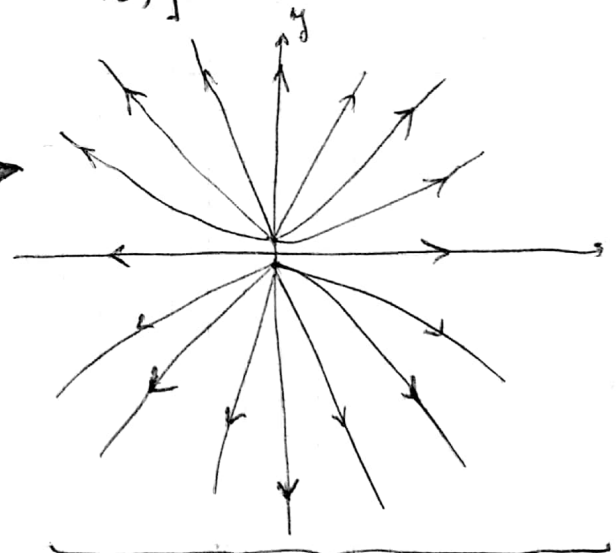
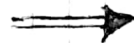
si $q_0 < 0$ son entrantes

Si $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0|$: $\vec{E} \approx \frac{k q_0 \hat{r}}{r^2}$

• 2 Cargas $q > 0$ [Cargas en P_8]



Zoom OUT

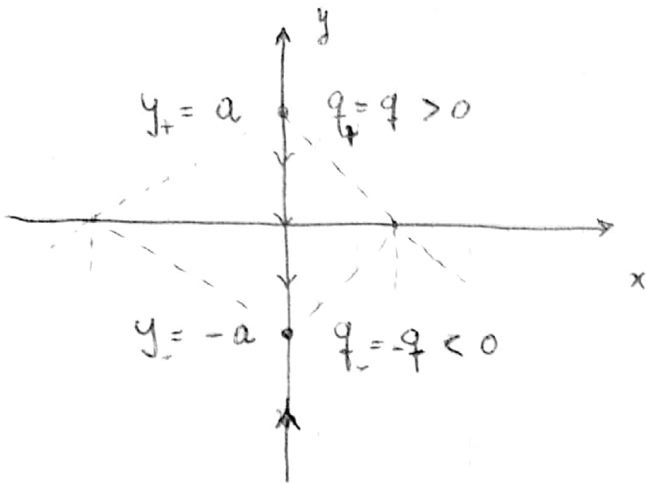


Si $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_+|, |\vec{r}_-|$

De lejos parece una carga puntual $2q$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r}) \approx \frac{k q \hat{r}}{r^2} + \frac{k q \hat{r}}{r^2} = \frac{k (2q) \hat{r}}{r^2}$$

P6) 2 cargas de signo opuesto : (1) Calcular campo sobre los ejes "x" e "y"



(2) ¿Cómo es el campo visto desde lejos?

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- : \text{campo total}$$

$$\vec{r}_\pm = \pm a \hat{y} : \text{puntos fuente}$$

(1) Campo sobre eje x : $\vec{E}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} = x \cdot \hat{x}} = \vec{E}(x, 0, 0) = \vec{E}(x \hat{x})$

$$\vec{E} \Big|_{x \hat{x}} = kq \left[\frac{(x \hat{x} - a \hat{y})}{[x^2 + a^2]^{3/2}} + (-1) \frac{(x \hat{x} + a \hat{y})}{[x^2 + a^2]^{3/2}} \right] = \frac{-2kqa \hat{y}}{[x^2 + a^2]^{3/2}}$$

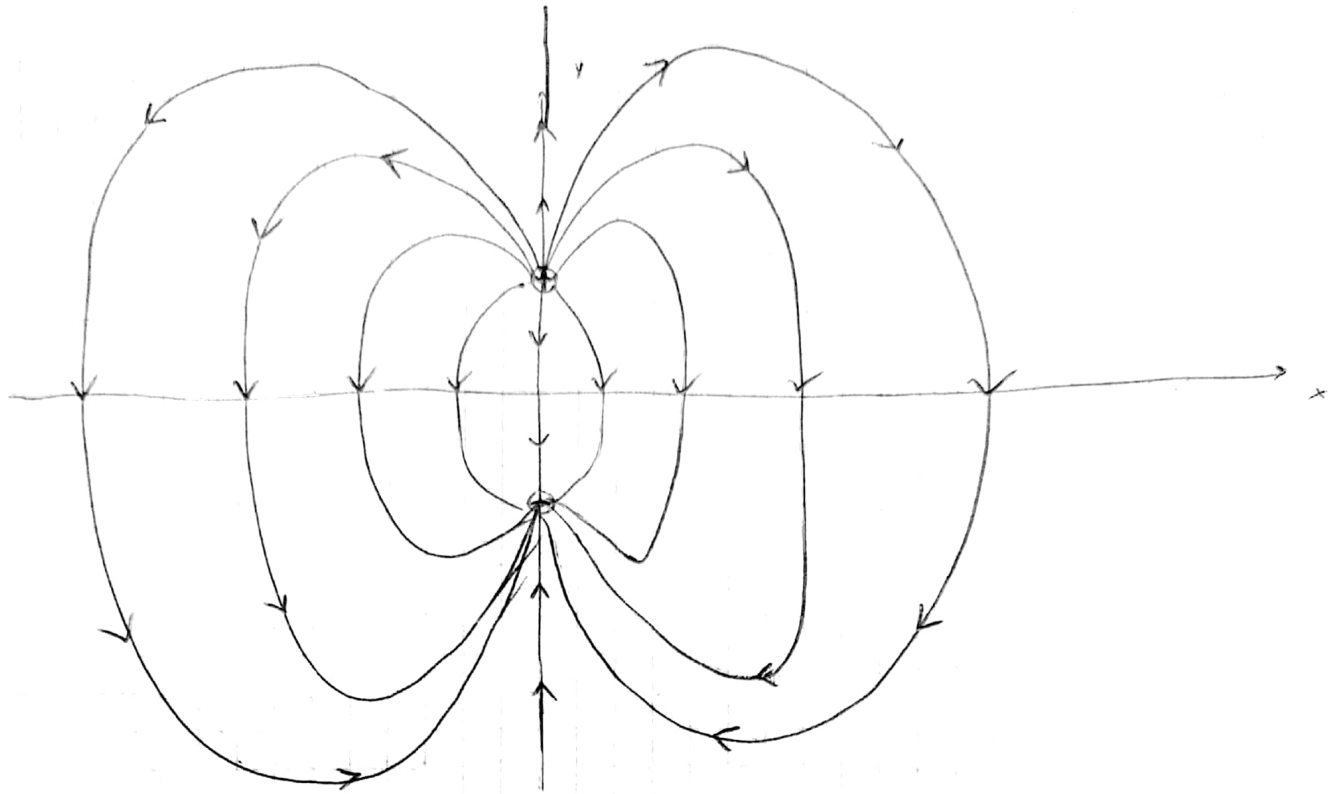
• Si $x \gg a$: $\left[\vec{E}(x \hat{x}) = -2kqa \frac{\hat{y}}{x^3} + 0 \left[\left(\frac{a}{x} \right)^{-5} \right] \sim \frac{1}{x^3} \right]$

c.a. : $(x^2 + a^2)^{-3/2} = \frac{1}{x^3} (1 + \alpha^2)^{-3/2} = \frac{1}{x^3} (1 + 0 \cdot \alpha + \dots) \approx \frac{1}{x^3}$
 $\alpha = \frac{a}{x} \ll 1$ Taylor $\alpha = 0$

Campo sobre eje y : $\vec{E}(y \hat{y}) = kq \cdot \hat{y} \left[\frac{1}{(y-a)^2} - \frac{1}{(y+a)^2} \right]$
 $\vec{r} - \vec{r}_\pm = y \hat{y} \mp a \hat{y}$

• Si $y \gg a \Rightarrow \frac{a}{y} \ll 1$: c.a. : $(y \mp a)^{-2} = \frac{1}{y^2} (1 \mp \beta)^{-2} \approx \frac{1}{y^2} [1 \pm 2\beta + \dots]$
 $\beta = a/y$

$\therefore \left[\vec{E}(y \hat{y}) \approx \frac{kq \cdot \hat{y}}{y^2} \left[1 + 2\frac{a}{y} - (1 - 2\frac{a}{y}) \right] = \frac{4kqa \cdot \hat{y}}{y^3} \sim \frac{1}{y^3} \right]$
 (con $y \gg a$)



Configuración dipolar : \oplus
 \ominus

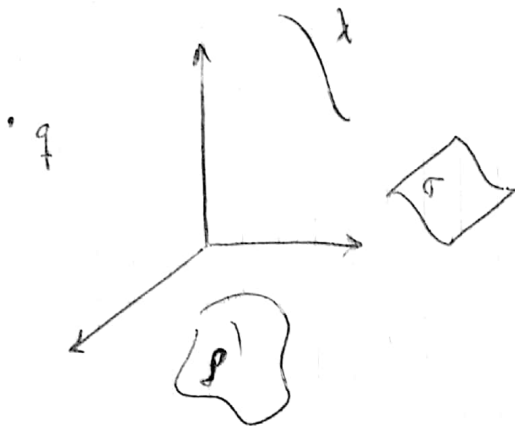
$[Q_{\text{total}} \equiv \text{momento monopolar}]$

Desde lejos : no se ve carga total : $Q_{\text{tot}} = +q - q = 0$

" " aparece el campo de un dipolo ideal :

$$E_{\text{dip}} \sim \frac{k \cdot p}{r^3}$$

con $p = (\text{carga}) \times (\text{distancia})$
 \downarrow
 $[\text{momento dipolar}]$



Superposición de campos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_q(\vec{r}) + \vec{E}_\lambda(\vec{r}) + \vec{E}_\sigma(\vec{r}) + \vec{E}_\rho(\vec{r})$$

$$\vec{E}_q(\vec{r}) = kq \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q) / |\vec{r} - \vec{r}_q|^3$$

Campo de una carga puntual q

$$\vec{E}_\lambda(\vec{r}) = k \int dl' \lambda(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

campo de densidad lineal de carga: λ

$$\vec{E}_\sigma(\vec{r}) = k \iint ds' \sigma(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

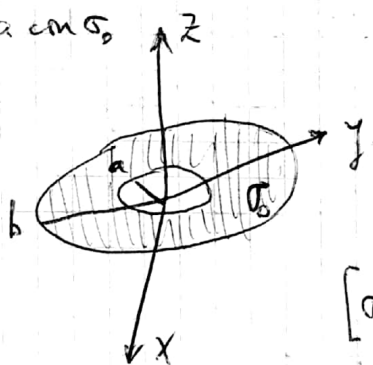
campo de una dens. superficial de carga: σ

$$\vec{E}_\rho(\vec{r}) = k \iiint dv' \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

campo de una densidad volumétrica: ρ

P12) corona en σ_0

a)



$$\sigma(\vec{r}) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } z=0, a \leq \rho \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

coord. cilíndrica

$[\sigma_0$: dens. sup. de carga]

dp', dp', p' : dif. en coords. cil. (para recorrer la corona)

$$\vec{E}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} = z \hat{z}} = k \iint ds' \frac{\sigma(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Big|_{\vec{r} = z \hat{z}}$$

integral de sup. en la variable primada:

quiero calcular

punto fuente: $\vec{r}' = \rho' \hat{\rho}'$; $\rho' \in [a, b]$

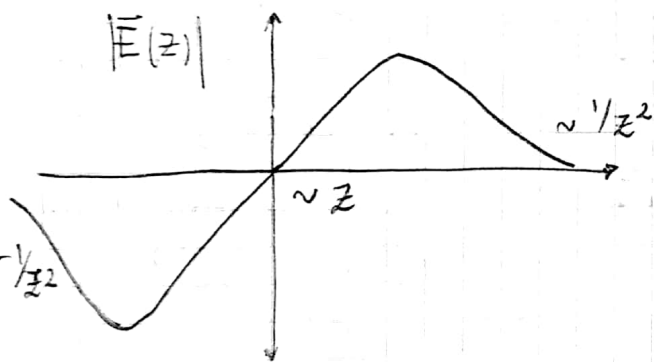
el campo sobre el eje z : punto campo $\vec{r} = z \hat{z}$

$$\vec{E}(z) = k \int_a^b \int_0^{2\pi} \sigma_0 \rho' \frac{z \hat{z} - \rho' \hat{\rho}(\varphi')}{[\rho'^2 + z^2]^{3/2}} \cos \rho' \hat{x} + \sin \rho' \hat{y}$$

$$= k \sigma_0 2\pi \int_a^b \rho' \frac{z \hat{z}}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi \sigma_0 k \cdot z \hat{z} \left(\frac{-1}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \right) \Big|_a^b$$

$$= k \cdot 2\pi \sigma_0 \cdot z \hat{z} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right)$$



Coro: $(a/z \ll 1)$
 $(a^2 + z^2)^{1/2} \approx \frac{1}{|z|} - \frac{a^2}{2z^3} + O(z^{-5})$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) \sim k \cdot 2\pi \sigma_0 \left(\frac{-a^2 + b^2}{z^2} \right) \text{sg}(z) \hat{z} \quad (z \gg a, b)$$

Obs: $Q_{\text{tot}} = \iint \sigma(\vec{r}) ds' = (\pi b^2 - \pi a^2) \sigma_0 = Q_0$: carga de la corona

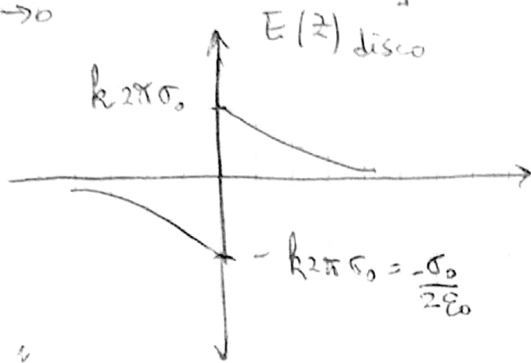
∞ $|\vec{E}(z \gg b, a)| \sim k \frac{Q_0}{z^2}$

b) Si $a \rightarrow 0$: disco : $\vec{E}_{\text{disco}}(z) = k \cdot 2\pi \sigma_0 \cdot z \hat{z} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{b^2 - z^2}} \right)$
 $\downarrow z \gg b$ $k \frac{Q_{\text{disco}}}{z^2} \text{sg}(z) \hat{z}$ ✓

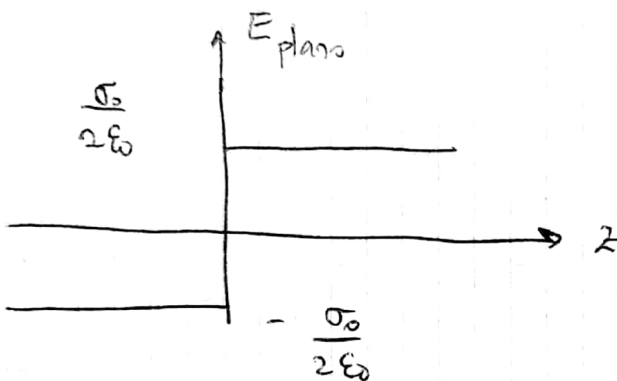
Si además $b \rightarrow \infty$: $\vec{E}_{\text{plano}} = k \cdot 2\pi \sigma_0 \text{sg}(z) \hat{z}$ (Obs. $\forall \mathbb{R}^3$)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{|z|} - (b^2 + z^2)^{-1/2} \right] z = \text{sg}(z) - 0$$

disco:



plano "inf":



• discontinuidad del campo (en el eje) sobre la distrib. de carga superficial σ_0

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{z}$$

$$\vec{E}(z \rightarrow 0^+) - \vec{E}(z \rightarrow 0^-) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{z}$$

obs: El "salto" (discontinuidad) de la comp. normal del campo al atravesar una sup. cargada con σ

es siempre:

$$\boxed{\frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

$$\hat{n} \cdot [\vec{E}_2(\text{sup}^+) - \vec{E}_1(\text{sup}^-)] = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

