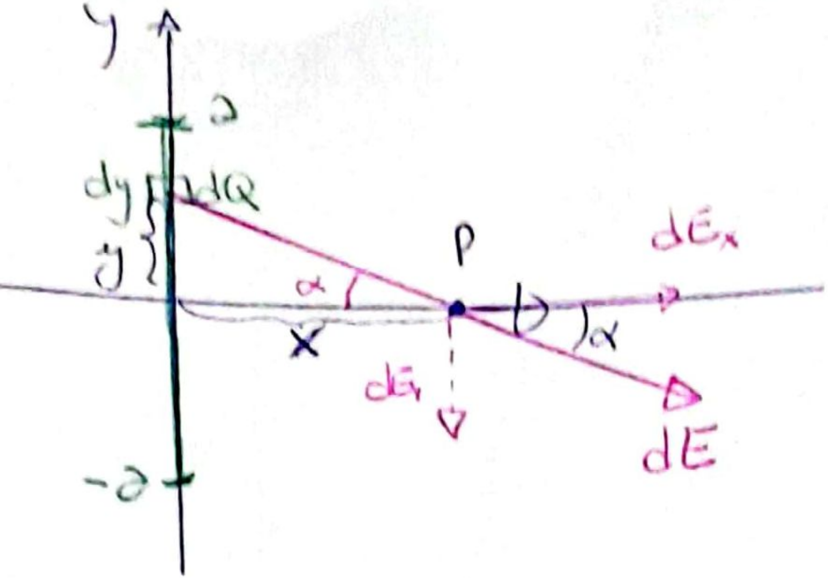
Repaso Clase 1

- Concepto de Carga eléctrica (y distribución de carga)
- Leyes de la electrostática
- Concepto de Campo Eléctrico
- Cálculo de campo para una distribución de carga (lo hacemos en la clase 2)



Densidad lineal de carga homogénea: λ

Q es la carga total de la barra $Q = 2a\lambda$

$$dQ = \lambda dy = \frac{Q}{2a} dy$$

r es la distancia desde ese punto y (dy) hasta P

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dy}{2a\left[(x^2+y^2)^{1/2}\right]^2}$$

$$dE_x = |dE| . \cos\alpha$$

$$dE_y = |dE| \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{op}{hip}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{ady}{hip.}$$

$$\boxed{dE_x =} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2a} \frac{dy}{(x^2+y^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2a} \frac{x\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{dE_x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2a} \frac{dy}{(x^2+y^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2a} \frac{x\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Lo mismo para dE_y

$$dE_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2a} \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} dy$$

Para obtener los totales tenemos que integrar:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2a}\int_{-a}^{a}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dy =$$

$$E_x = \frac{\cancel{x}}{4\pi\varepsilon_0 2a}\cdot\frac{y}{x^{\cancel{2}}\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2a x}\left[\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{(-a)}{\sqrt{x^2+a^2}}\right] =$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{2a} x}\cdot\frac{\cancel{2a}}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, x\sqrt{x^2+a^2}}\,.$$

Si $x \gg a \Rightarrow \quad \bar{E} \propto \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x \sqrt{x^2}}\,\hat{x} \propto \dfrac{Q}{x^2}$

Si $a \to \infty$

$2a\lambda$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x \sqrt{a^2 \underbrace{\left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)}_{1}}}\,\hat{x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x \sqrt{a^2}}\,\hat{x}$$

$$E_x = \frac{2\cancel{a}\lambda\,\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0 x \cdot \cancel{a}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\,\hat{x}.$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2a}\int_{-a}^{a}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy =$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2a}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{-a}^{a}\right] =$$

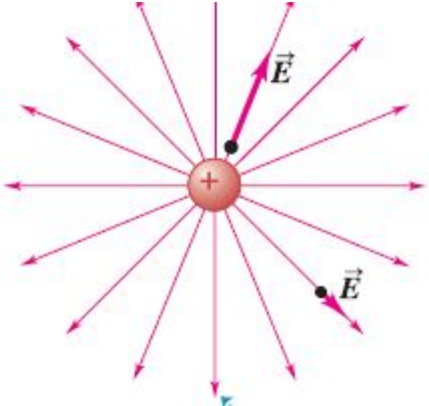
$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2a}\underbrace{\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\right]}_{0} = 0$$

$$\boxed{\bar{E} = (E_x, E_y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, x\sqrt{x^2+a^2}}\,\hat{x}.}$$

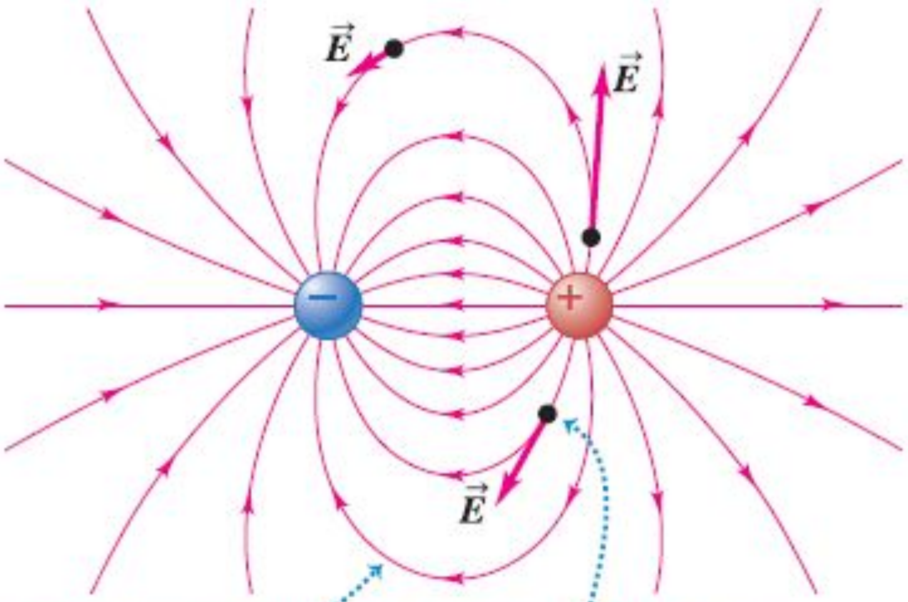
Líneas de Campo Eléctrico

Una **línea de campo eléctrico** es una recta o curva imaginaria trazada a través de una región del espacio, de modo que es tangente en cualquier punto que esté en la dirección del vector del campo eléctrico en dicho punto. La figura 21.28 ilustra la idea básica. (Utilizamos un concepto similar

Las líneas de campo eléctrico muestran la dirección de $\vec{E}$ en cada punto, y su espaciamiento da una idea general de la *magnitud* de $\vec{E}$ en cada punto. Donde $\vec{E}$ es fuerte, las líneas se dibujan muy cerca una de la otra, y donde $\vec{E}$ es más débil se trazan separadas. En cualquier punto específico, el campo eléctrico tiene dirección única, por lo que sólo una línea de campo puede pasar por cada punto del campo. En otras palabras, las *líneas de campo nunca se cruzan.*

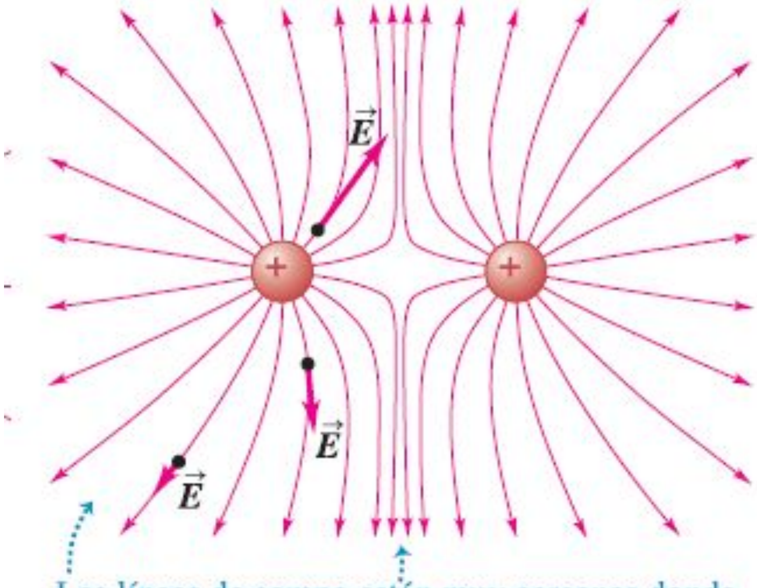


b) Dos cargas iguales y opuestas (un dipolo)



En cada punto en el espacio,
el vector de campo eléctrico
es *tangente* a la línea de campo
que pasa a través de ese punto.

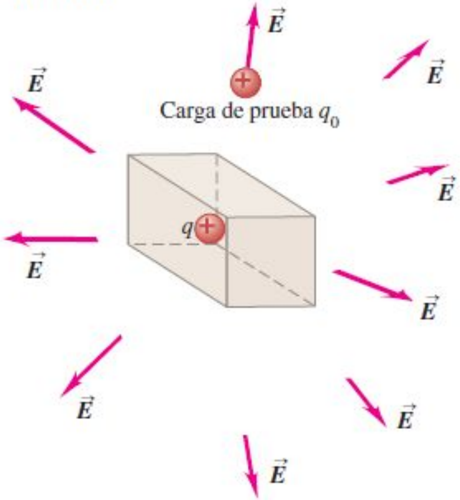
c) Dos cargas positivas iguales



Las líneas de campo están muy cercanas donde el campo es intenso, y más alejadas donde el campo es más débil.

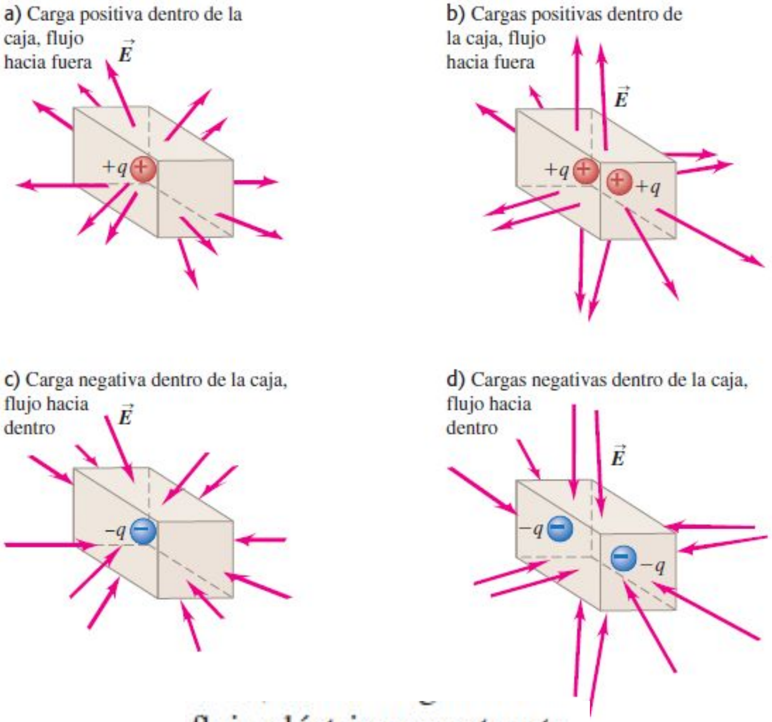
Si conocemos **E** en una región del espacio podemos deducir **cuál** es la Q o $\lambda(\bar{r}), \sigma(\bar{r}), \rho(\bar{r})$.

b) Uso de una carga de prueba fuera de la caja para determinar la cantidad de carga que hay en el interior



Algunos ejemplos

flujo eléctrico saliente.



flujo eléctrico es *entrante*.

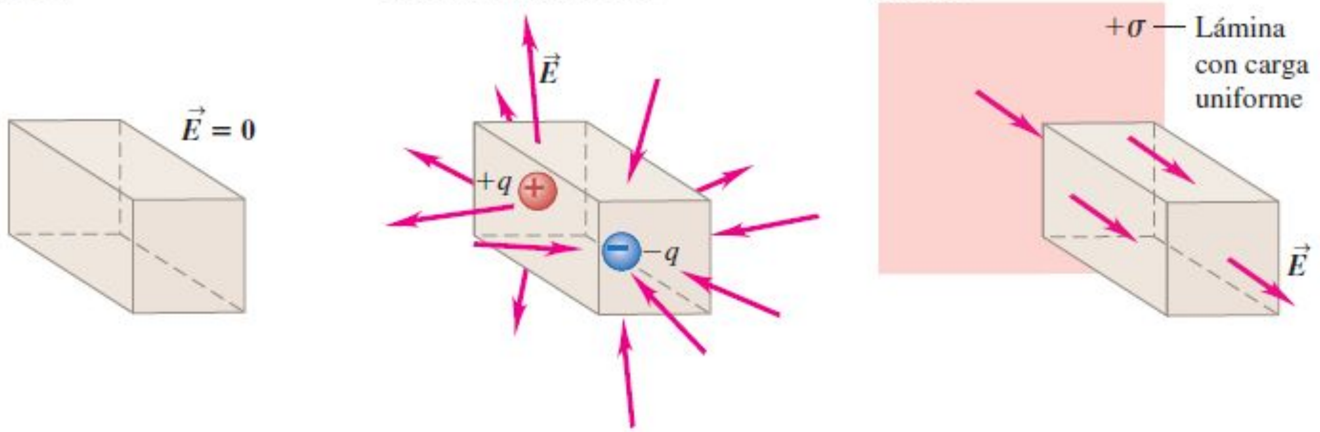
Situaciones en la que el flujo es nulo:

22.3 Tres casos en los que hay una carga *neta* de cero en el interior de la caja, y no hay flujo eléctrico a través de la superficie de ésta. **a)** Caja vacía con $\vec{E} = 0$. **b)** Caja que contiene una carga puntual positiva y una negativa de igual magnitud. **c)** Caja vacía inmersa en un campo eléctrico uniforme.

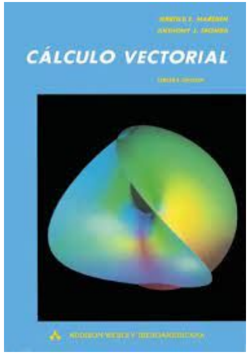
a) Sin carga dentro de la caja, flujo igual a cero

b) Carga *neta* igual a cero en el interior de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente

c) No hay carga dentro de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente

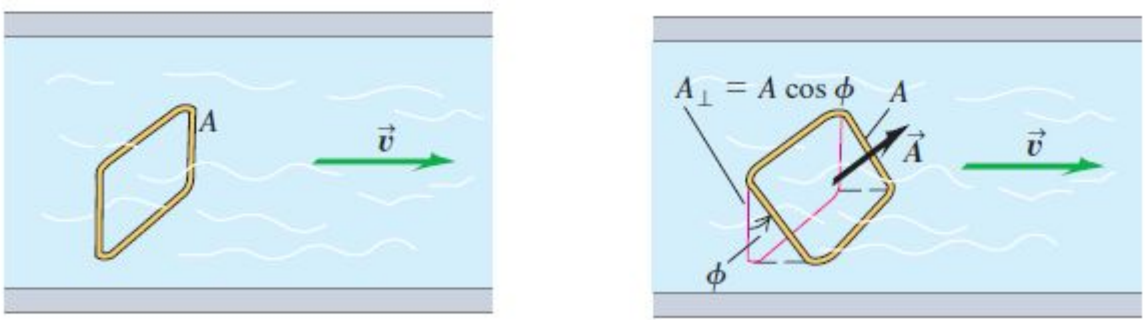


Aquí es el momento de recordar cómo se calcula el flujo (de un vector cualquiera) que atraviesa una superficie:



a) Alambre rectangular en un fluido

b) El alambre rectangular está inclinado un ángulo ϕ



$$\frac{dV}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{A} \quad\longrightarrow\quad \frac{dV}{dt} = vA\cos\phi$$

Ahora trataremos de aplicar esto a $\vec{\mathbf{E}}$

Se define el flujo eléctrico a través de esta área como el producto de la magnitud del campo E por el área A:

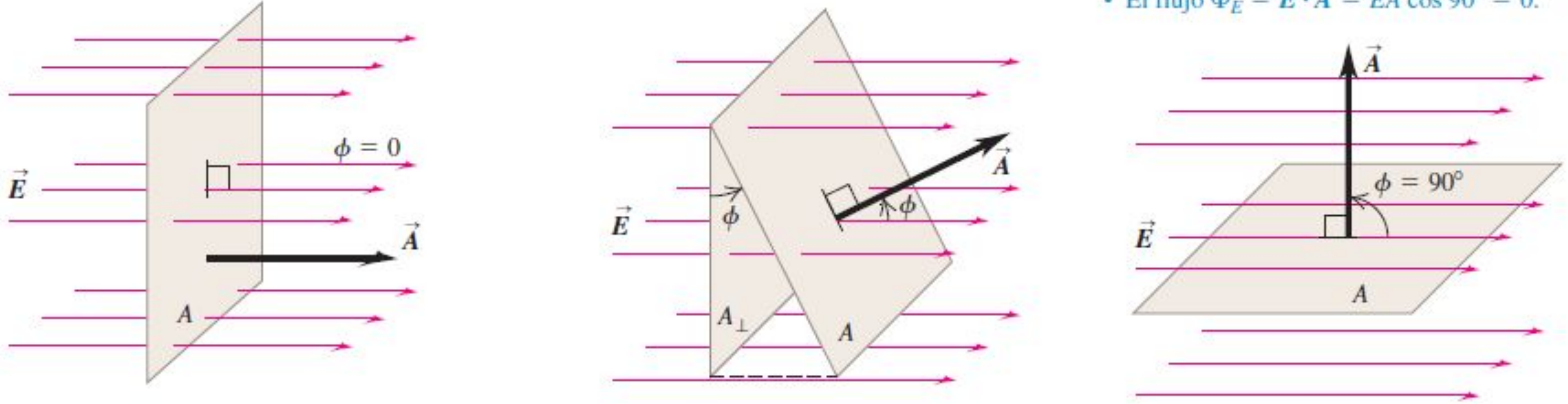
$$\Phi_E = EA$$

En términos aproximados, se puede imaginar Φ_E como las líneas de campo que pasan a través de A. El incremento del área significa que más líneas de $\vec{E}$ cruzan el área, lo que aumenta el flujo; un campo más intenso significa mayor densidad de líneas de $\vec{E}$, por lo que hay más líneas que pasan por unidad de área, lo que también incrementa el flujo.

a) La superficie está de frente al campo eléctrico:
- $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son paralelos (ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 0$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.

b) La superficie está inclinada un ángulo ϕ respecto de la orientación de frente:
- El ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es ϕ.
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$.

c) La superficie está de canto en relación con el campo eléctrico:
- $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares (el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 90°$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90° = 0$.



Si el área A es plana pero no perpendicular al campo $\vec{E}$, entonces son menos las líneas de campo que la atraviesan. En este caso, el área que se toma en cuenta es la silueta que se observa al mirar en dirección de $\vec{E}$. Ésta es el área $A_\perp$ en la figura 22.6b, y es igual a $A \cos \phi$ (compárela con la figura 22.5b). Nuestra definición de flujo eléctrico para un campo eléctrico uniforme se generaliza a

$$\boxed{\Phi_E = EA\cos\phi \equiv \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}}$$

Superficie es **plana**

E es **uniforme**

¿Unidades? En SI:

$$[\boldsymbol{\phi}] = [E].[A]$$

$$[\boldsymbol{\phi}] = [\frac{F}{Q}].[A]$$

$$[\boldsymbol{\phi}] = [\frac{N}{C}].[L^2]$$

Flujo de un **E** (general)

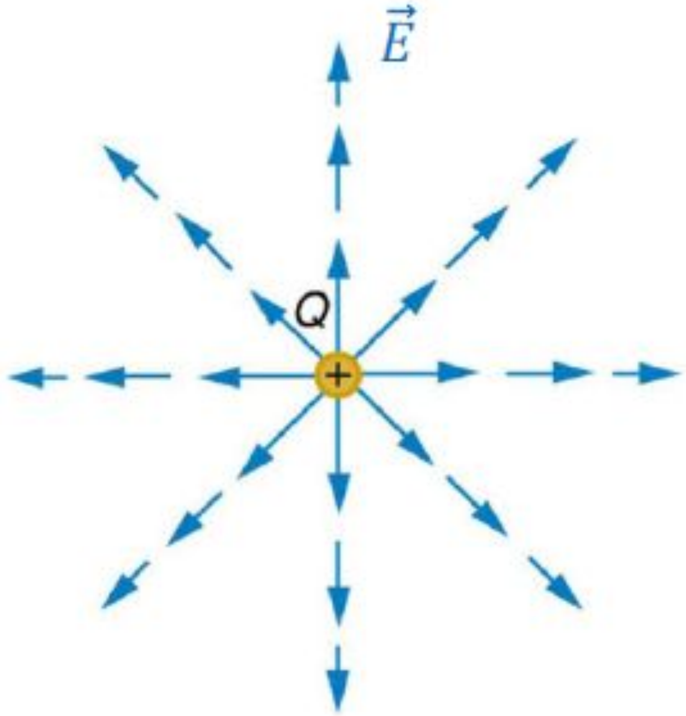
$$\Phi_E = \int E\cos\phi \, dA = \int E_{\perp} \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Es una integral de superficie

Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- En coordenadas esféricas, el campo generado a una distancia r es siempre radial y vale:

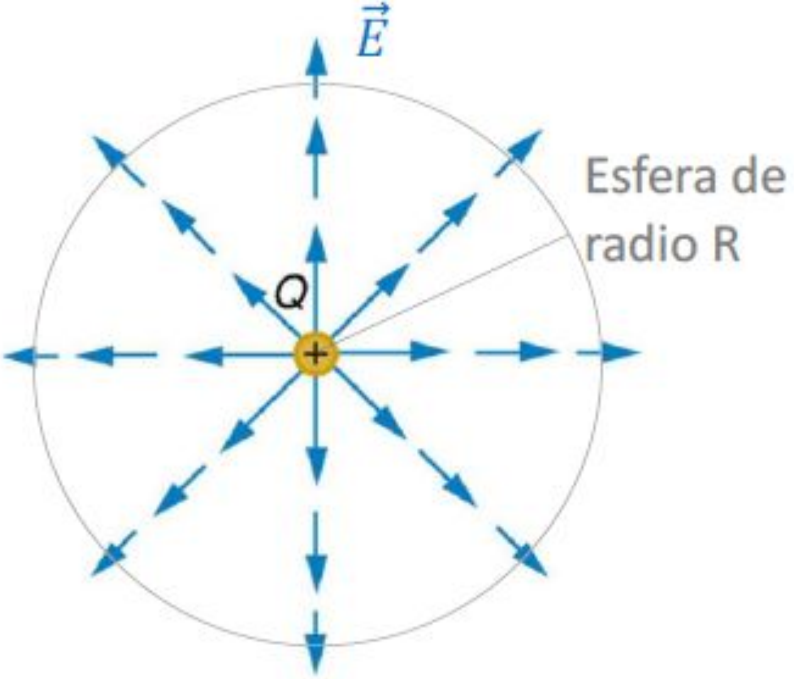
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$



Por la definición que acabamos de ver:

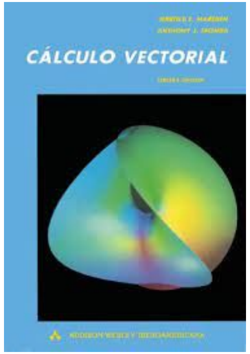
- El flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio R vale:

$$\Phi = \oiint_{\text{Superficie de la esfera}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$



- Sobre la esfera, $\vec{E}$ apunta siempre radialmente y vale lo mismo

$$\Phi = \oiint_{\text{Superficie de la esfera}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot\overrightarrow{ds}$$



- El diferencial de área en la esfera apunta radialmente y vale $R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QR^2}{R^2} \hat{r}\cdot\hat{r}$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}} \hat{r} \cdot \hat{r}$$

- Entonces, como $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\boxed{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}}_{2} \underbrace{\boxed{\int_0^{2\pi} d\varphi}}_{2\pi}$$

$$\Phi = \frac{1}{\cancel{4\pi}\epsilon_0} Q \, \cancel{4\pi} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

NO depende del Radio de la Esfera

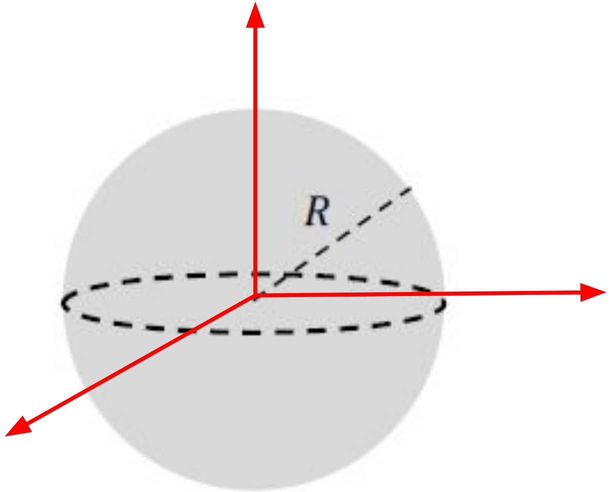
Ley de Gauss

Carl Friederich Gauss
(1777-1855)

Se verifica que en general, ***para toda superficie cerrada*** *S que encierra un volumen V, El flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ a través de S es proporcional a la carga total encerrada*

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dv$$

Campo de una distribución esférica de carga

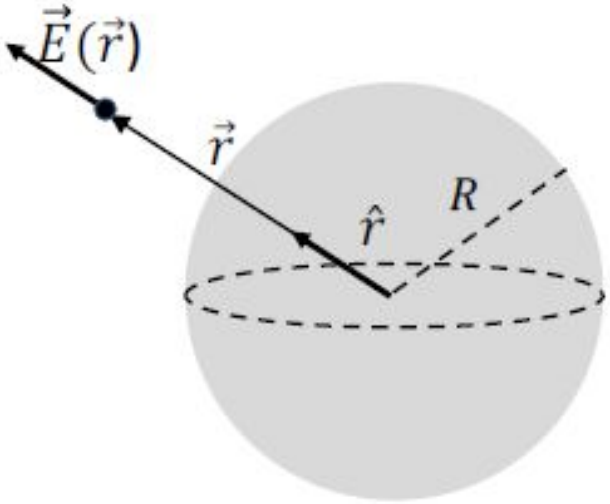


- Supongamos una distribución de carga ρ uniforme, de forma esférica de radio R.

- Calculemos el campo en todo el espacio aprovechando la Ley de Gauss y la simetría del sistema.

- Si colocamos nuestro SC en el centro de la esfera, el sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).

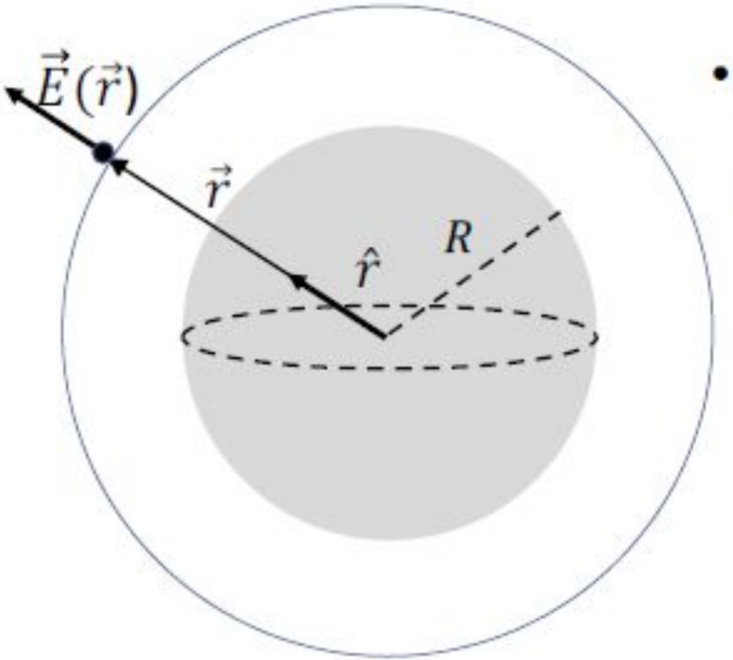
Simetría (esférica) es muy importante



- El campo en un punto cualquiera $\vec{r}$ debe ser radial y depender sólo de la distancia $r = |\vec{r}|$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$$

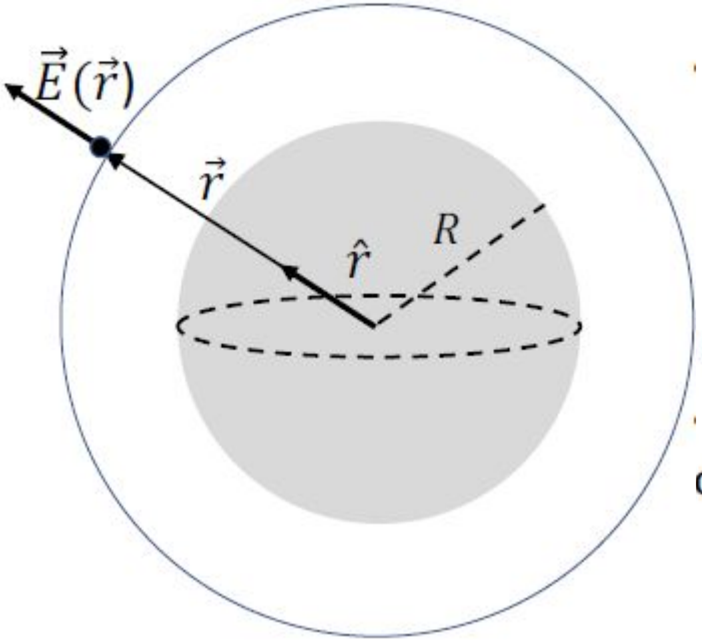
Simetría (esférica) $\Rightarrow$



- Sobre cualquier esfera de radio r centrada en el origen el módulo de E vale siempre lo mismo.

$$\Phi = \int_{S(r)} \vec{E} \cdot \boxed{\overrightarrow{ds}}$$

sobre qué superficie integro



- Si $r > R$ el flujo es:

$$\Phi = \int_{S(r)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = E(r) \int_{S(r)} \hat{r} \cdot \hat{r}\, ds = 4\pi r^2 E(r)$$

Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{carga\ encerrada\ por\ S(r)}{\epsilon_0}$$

¿Cuánta carga hay encerrada?

Si la densidad ρ es constante $\Rightarrow Q_{total} = \rho$.Volumen

El volumen de una esfera de radio R es: $\frac{4}{3}\pi R^3$

$\Rightarrow \quad \rho\frac{4}{3}\pi R^3$ = carga encerrada

- Por la Ley de Gauss

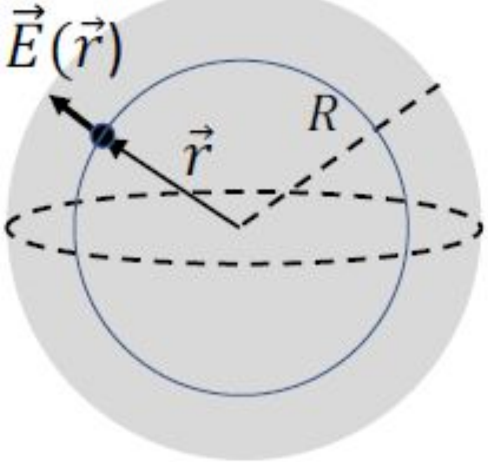
$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{carga\ encerrada\ por\ S(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

- Entonces, para $r > R$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Carga\ total}{r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Carga\ total}{r^2}\hat{r}$$

Es como si toda la carga estuviese en el origen



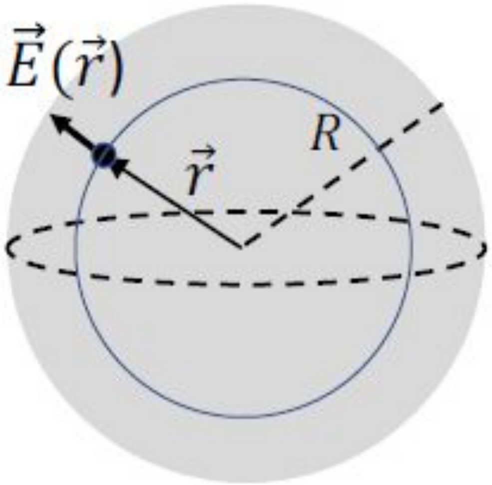
- Para $r < R$ aplicamos un razonamiento similar.
- Por ley de Gauss:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{carga\ encerrada\ por\ S(r)}{\epsilon_0}$$

- Esta vez, la carga encerrada es menor a la total y queda:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Para $r < R$ entonces:

$$E(r) = \frac{1}{3\epsilon_0}\rho r$$

- Lo cual nos dice que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{3\epsilon_0}\rho r\hat{r}$$

El campo crece linealmente con la distancia (hasta R)

¿Qué pasa en **r = R**?