Repaso Clase 3

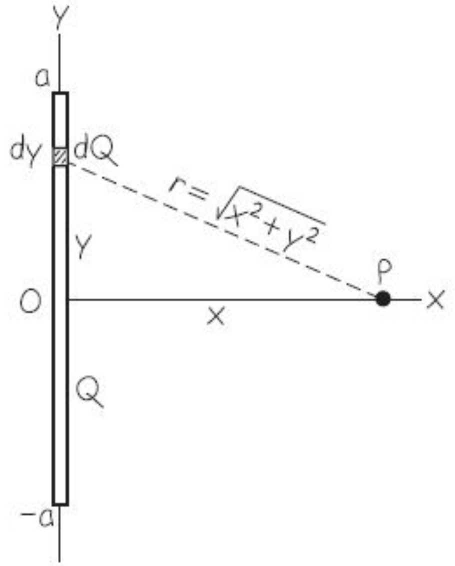
- Energía Potencial Eléctrica
- Potencial (unidades y cálculo)
- Relación entre el gradiente de V y E

Un ejemplo: Carga lineal acotada

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \qquad \text{(potencial debido a una carga puntual)}$$

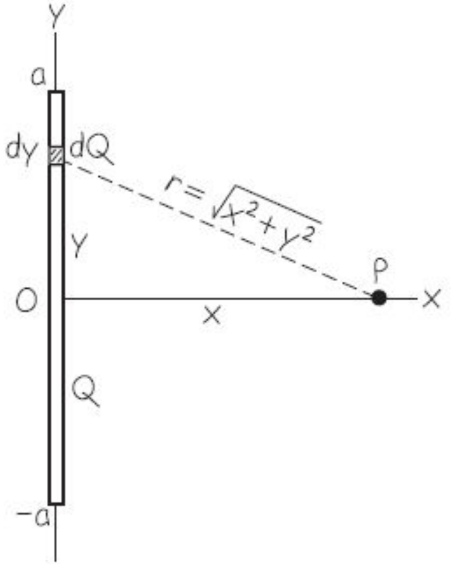
Recordemos que para calcular el campo E en este ejemplo pensamos en una carga dQ Y luego integramos a lo largo de la distribución de carga. De modo que para una dQ podremos decir que:

$$dV \propto \frac{dQ}{\text{(distancia entre P y dQ)}}$$



Un ejemplo: Carga lineal acotada

Determinar el potencial en un punto P:



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{43. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}$$

+

BARROW

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{\sqrt{a^2+x^2}-a}\right)$$

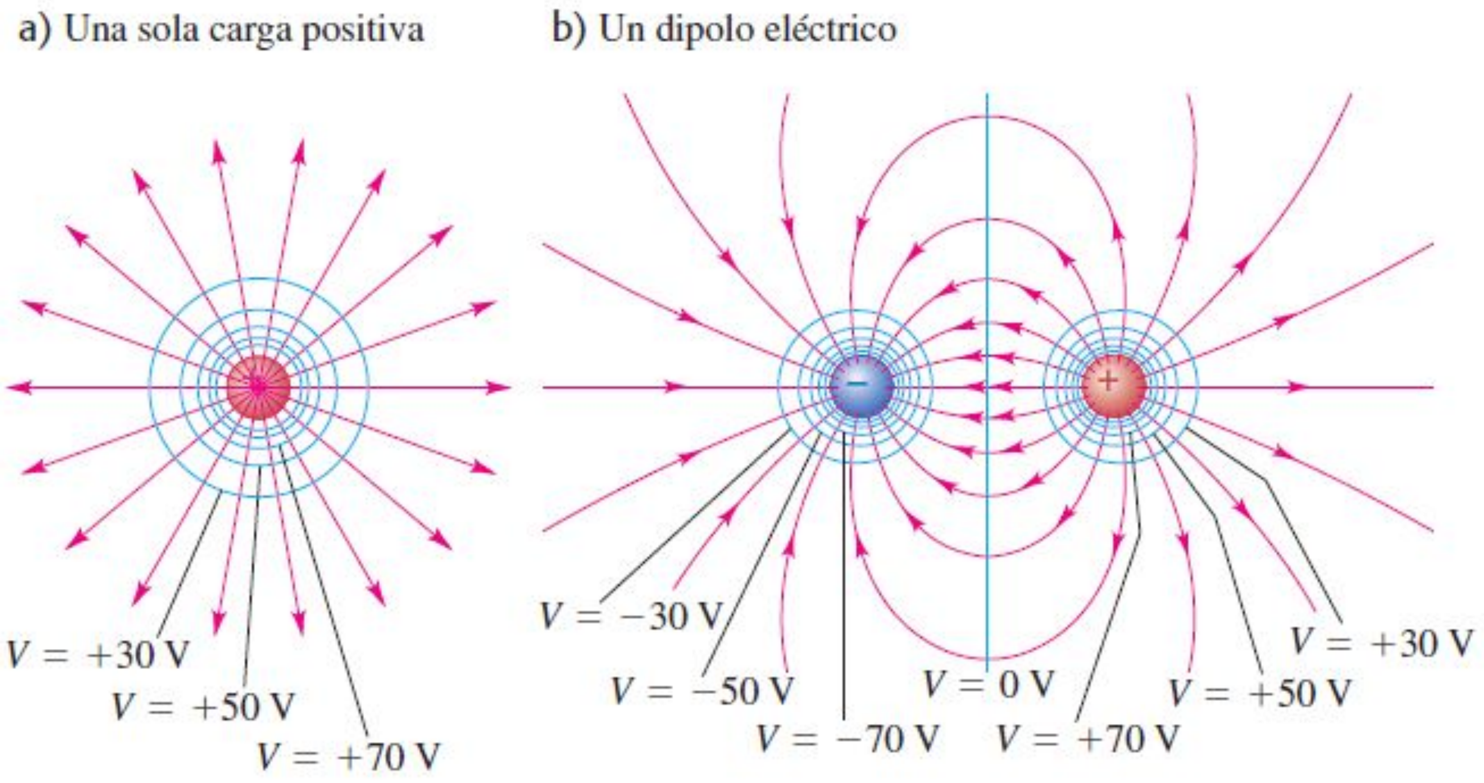
¿Cómo se visualiza el potencial?

Una superficie equipotencial es una superficie 3D donde se cumple que V es igual en todos los puntos.
Si q_0 se mueve sobre esa superficie ⇒ la energía potencial eléctrica es Constante

Superficies equipotenciales y líneas de campo

Como la energía potencial no cambia a medida que una carga de prueba se traslada sobre una superficie equipotencial, el campo eléctrico no realiza trabajo sobre esa carga. De ello se deriva que $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la superficie en cada punto, de manera que la fuerza eléctrica $q_0\vec{E}$ siempre es perpendicular al desplazamiento de una carga que se mueva sobre la superficie. **Las líneas de campo y las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares entre sí.**

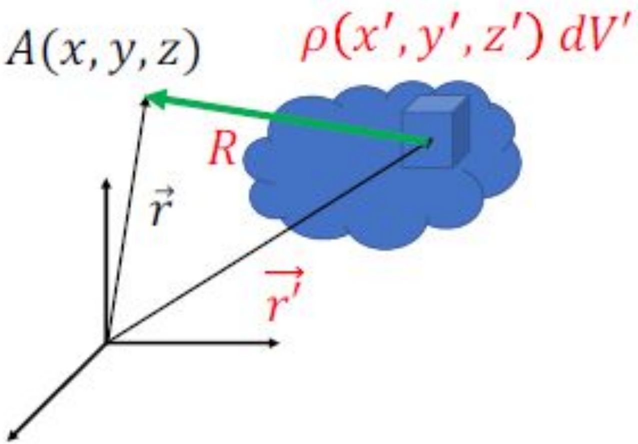
Superficies Equipotenciales:



Momentos de una distribución de carga

• Un átomo o molécula consta de cargas en disposiciones complejas en volúmenes del orden de 10-24 cm.

• ¿Qué aspectos de la estructura de la carga son los más importantes cuando vemos el potencial/campo a grandes distancias de las distribuciones de carga?



- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

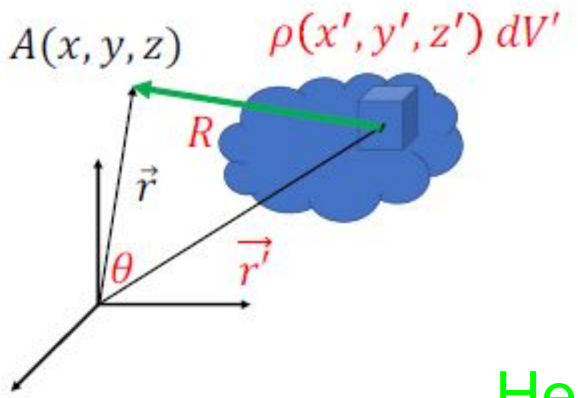
- Supongamos una distribución de cargas acotada $\rho\,(x', y', z')$ un punto A exterior a ρ.

$$\varphi_A\,(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(x', y', z')dV'}{R}$$

- Expresamos R en función de las distancias r y r' desde el origen del sistema de coordenadas. Por el teorema del coseno

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{1/2}$$

¿Qué pasa si estamos muy lejos de la distribución?



- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

- La idea es ver qué pasa cuando r >> r'. Veamos un poco el factor 1/R:

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2}$$

Herramienta de siempre: Desarrollo de Taylor

- Podemos hacer el desarrollo en Taylor de 1/R para r'/r << 1. Tomando el desarrollo

$$(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{3}{8}\delta^2 \ \dots$$

para $\delta \ll 1$

- Tomando esta expansión el factor 1/R queda:

$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \begin{pmatrix}\text{términos de}\\ \text{grado superior}\end{pmatrix}\right]$$

más grande >>>>>>>>>>> más chico

- Entonces, reemplazando en $\varphi_A\,(x, y, z)$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\underbrace{\int r' \cos\theta\, \rho\, dv'}_{K_1}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2 (3\cos^2\theta - 1)\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots$$

- Entonces $\varphi_A\,(x,y,z)$ lejos de la distribución puede escribirse como una serie de términos de importancia decreciente (fijarse el exponente de 1/r)

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\underbrace{\int r' \cos\theta\, \rho\, dv'}_{K_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2(3\cos^2\theta - 1)\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots$$

- La clave es calcular los coeficientes $\boxed{K_0, K_1, K_2,}$ etc. Cada término se denomina momento.

Pesa la importancia de c/u

- ¿Hace falta calcular todos los K_i?
- No! El comportamiento del potencial a grandes distancias de la fuente estará determinado por el **primer término no nulo** de la serie:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots\right]$$

Los coeficientes K_0 y K_1

- $K_0 = \int \rho \, dv'$ es simplemente la carga total de la distribución (da cero para moléculas y átomos neutros)
- ¿Cuánto vale K_0 para en cada una de estas distribuciones ?

Los coeficientes K_0 y K_1

- Si $K_0 = 0$, calcularemos $K_1 = \int r' \cos\theta \, \rho \, dv'$

- Para simplificar esta expresión consideremos el vector
$$\vec{p} = \int \overrightarrow{r'} \rho(x', y', z') dv' \qquad \text{Momento dipolar}$$

- Usando $\vec{p}$, tenemos: $\hat{r} \cdot \vec{p} = \hat{r} \cdot \int \overrightarrow{r'} \rho(x', y', z') dv' =$
$\int \hat{r} \cdot \overrightarrow{r'} \rho(x', y', z') dv' = \int r' \cos\theta \, \rho(x', y', z') dv' = K_1$

- Por lo tanto: $K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p}$

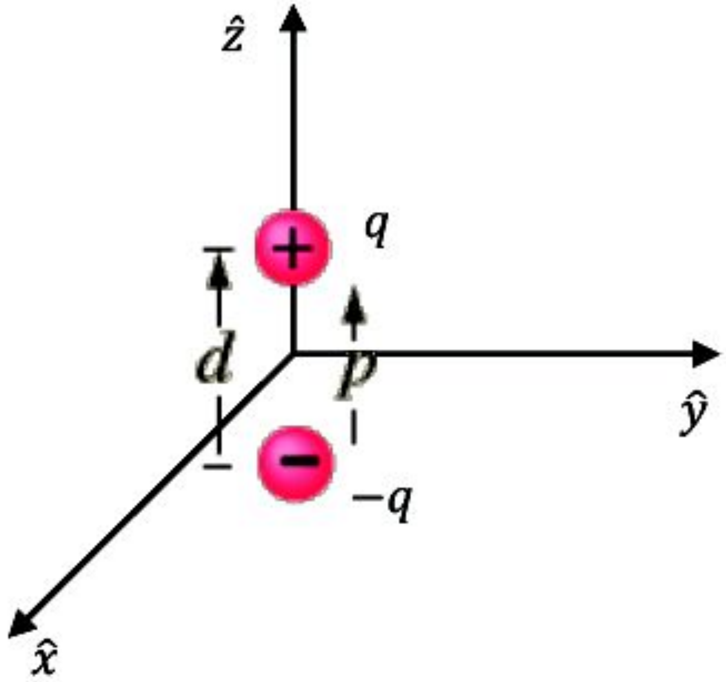
- Resumiendo, para un punto A en dirección $\hat{r}$ y a una distancia r de una distribución acotada $\rho(x', y', z')$, el potencial viene dado por:

$$\varphi_A = \frac{Q}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots .$$

$$Q = K_0 = \int \rho \, dv' \quad \text{y} \quad \vec{p} = \int \overrightarrow{r'} \, \rho(x', y', z') dv'$$

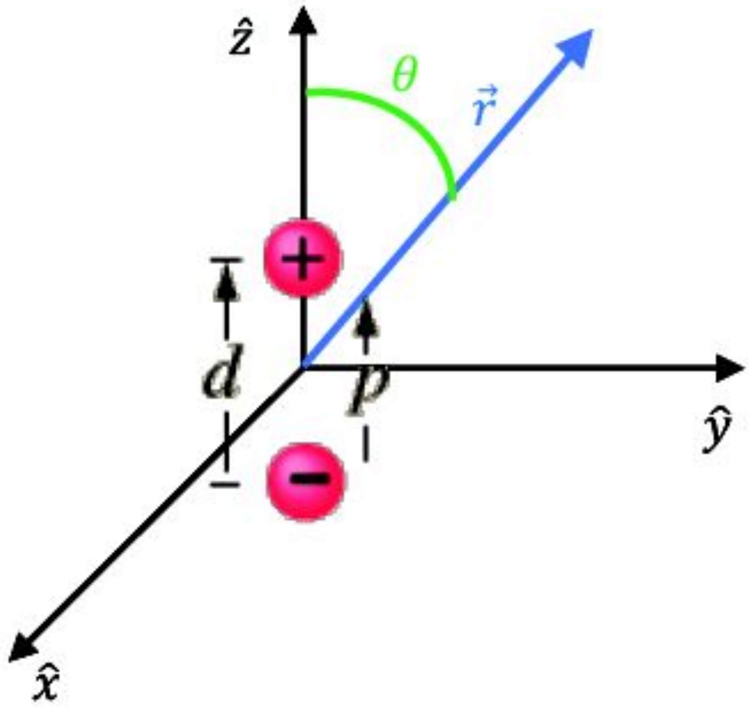
Recordar que φ es el potencial (también podemos llamarlo V)

Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- Dos cargas puntuales $\pm q$ en $\mathrm{z} = \mp\frac{d}{2}$
- $K_0 = 0$
- Veamos K_1. Para cargas puntuales

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{r'}_i \, q_i$$



- Centro del SC equidistante de las cargas:

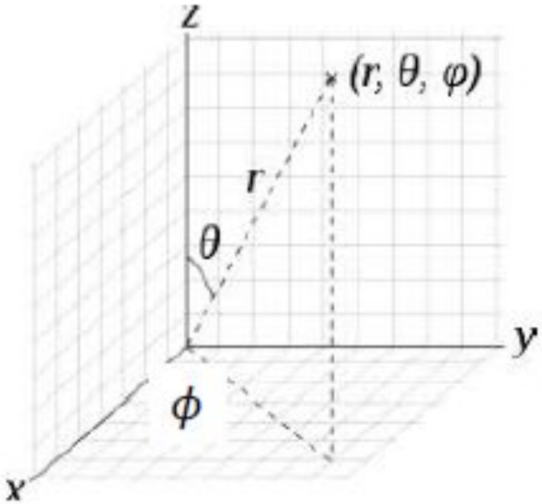
$$\vec{p} = \frac{d}{2} q\hat{z} + \left(-\frac{d}{2}\right)(-q)\hat{z} = qd\ \hat{z}$$

- Por lo tanto

$$K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p} = qd \cos\theta$$

- Y entonces, lejos del dipolo

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd\cos\theta}{r^2}$$



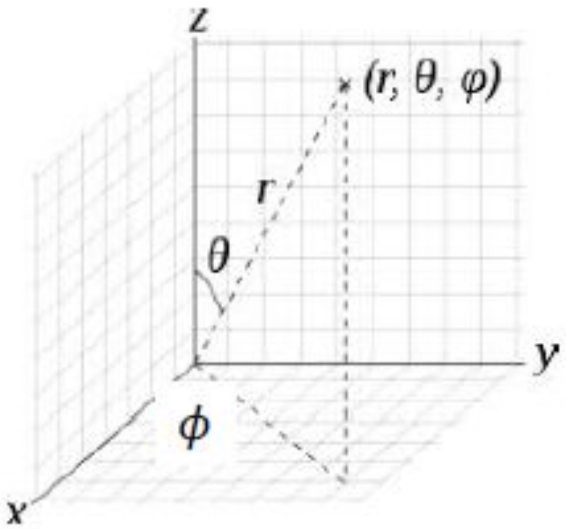
- Calculemos el campo $\vec{E}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

- Podemos hacer el cálculo del campo en esféricas.

- El gradiente en esféricas es:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\ \hat{\theta}$$



- Usando

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{K_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

- El campo en esféricas es:

$$\vec{E} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3}\,\hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}\,\hat{\theta}$$

- Poloidal, decae como r^{-3}

CONDUCTORES + DIELÉCTRICOS

- Conductores: Alta movilidad de portadores de carga (electrones y protones). Las cargas sobre ellos se pueden mover libremente.

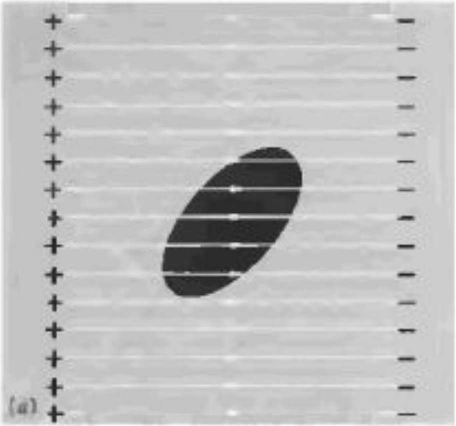
- Aislantes: baja movilidad de portadores de carga. Las cargas no se mueven a través de ellos

CONDUCTORES (aproximación electrostática)

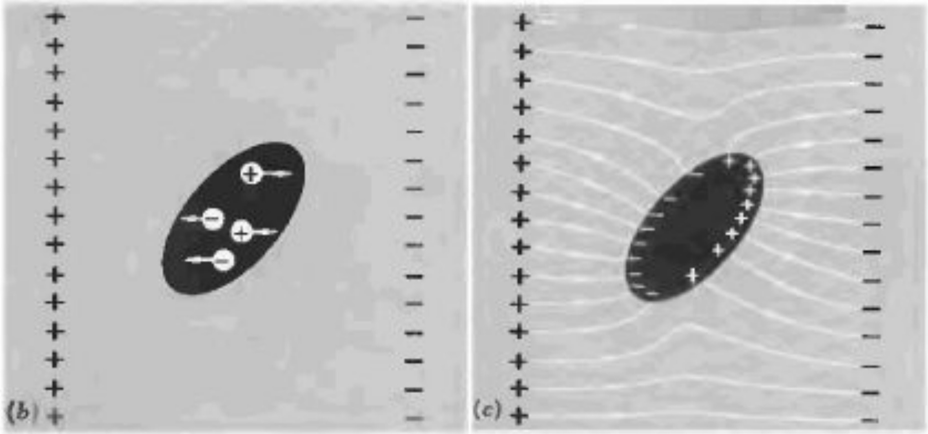
- Las cargas pueden reacomodarse libremente en un conductor.
- Este reacomodamiento se realiza de acuerdo a ciertas reglas.
- En electrostática, vamos a considerar las propiedades de los conductores una vez que se haya alcanzado el estado estacionario (es decir, cuando las cargas ya se hayan acomodado).

Aislantes y conductores en campo externo

Aislante: el campo en el interior es prácticamente el del exterior



Conductor: las cargas se van a la superficie y dejan campo nulo en el interior

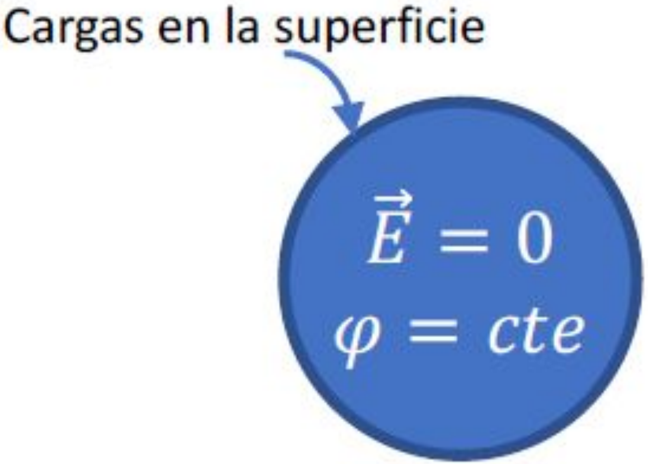


Transitorio

Estacionario

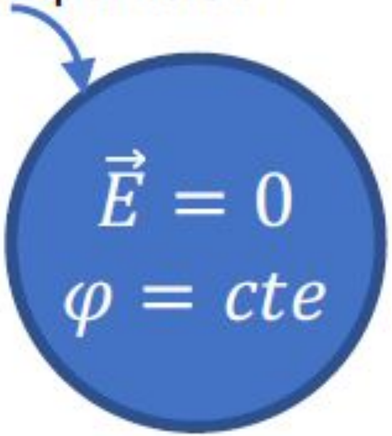
https://www.youtube.com/watch?v=TtzfDFdwvAg&ab_channel=Aryank26

CONDUCTORES: Propiedad Fundamental

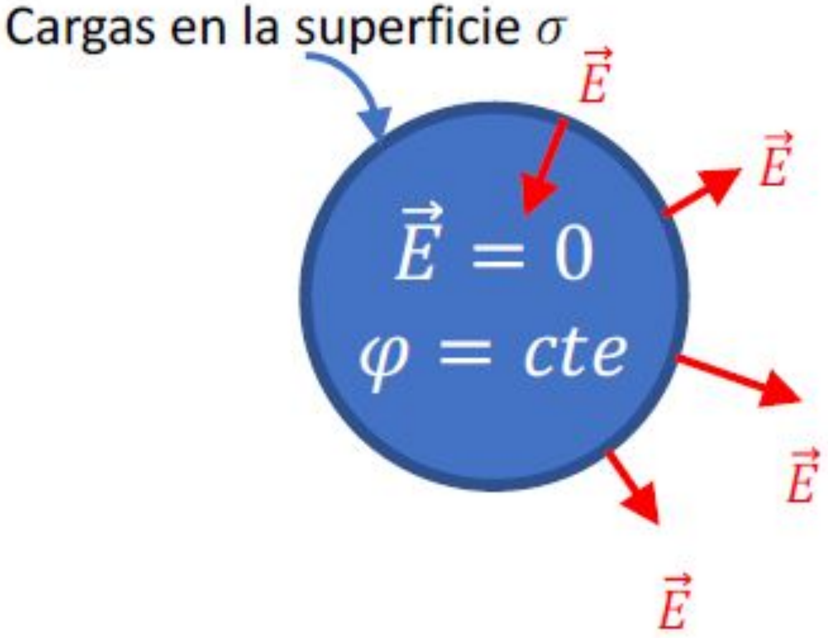


- La idea de que todas las cargas van hacia la superficie y que en el interior el campo es nulo es la correcta si se tiene en cuenta que no existe otro tipo fuerza que mueva las cargas.
- Las cargas se mueven hasta llegar al borde del conductor del que no pueden salir

Cargas en la superficie σ

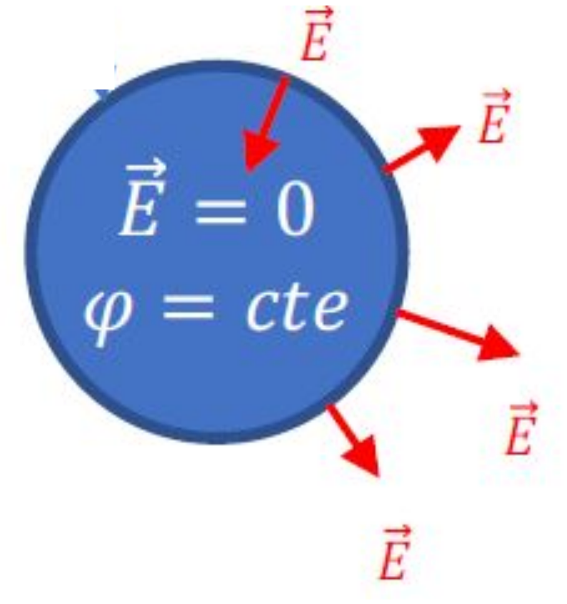


- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el potencial ahí es constante al igual que en su superficie.



- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el **potencial ahí es constante al igual que en su superficie**.

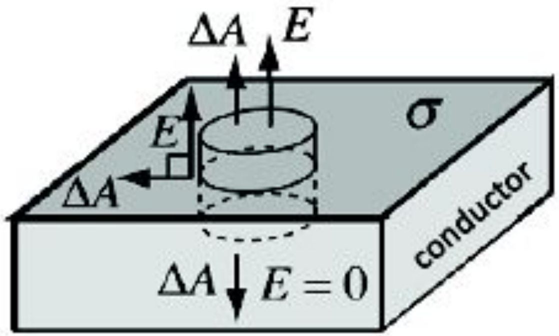
- Como la **superficie es equipotencial**, el **campo en esa superficie sólo puede ser normal a ella**.



¿Qué pasa con el campo eléctrico (justo) en la superficie?

Aparece una discontinuidad (un salto)

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie

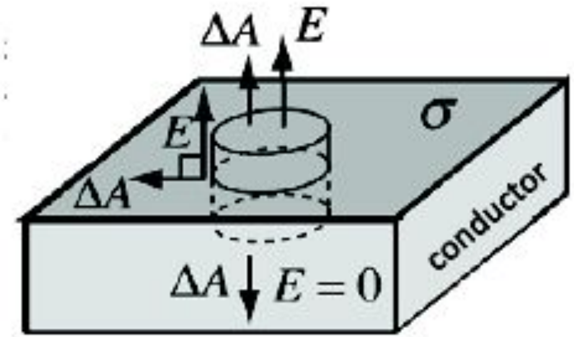


- El salto de un campo eléctrico nulo en el interior de un conductor a uno no nulo y normal en su superficie se debe a la presencia de la carga acumulada ahí.
- Apliquemos la Ley de Gauss en un cilindro alineado con la normal a la superficie de un conductor donde hay una carga superficial de densidad σ (C/m^2)

Usábamos la **Ley de Gauss** para calcular el flujo de un campo a través de una **superficie cerrada** (en este caso el cilindro)

- El único flujo que sobrevive es el que se da a través de la tapa externa de área ΔA

$$\int_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{carga\ encerrada}{\epsilon_0}$$



$$E\ \Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- De los puntos anteriores se deduce que la carga total Q sobre la superficie de un conductor S se puede escribir como:

$$Q = \int \sigma \, da = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{da}$$