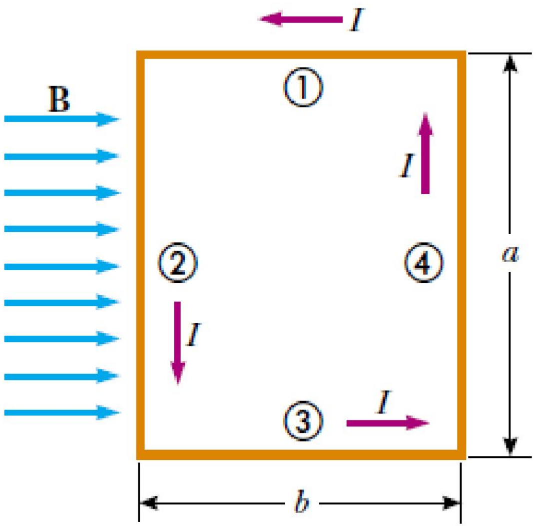
Repaso Clase 7

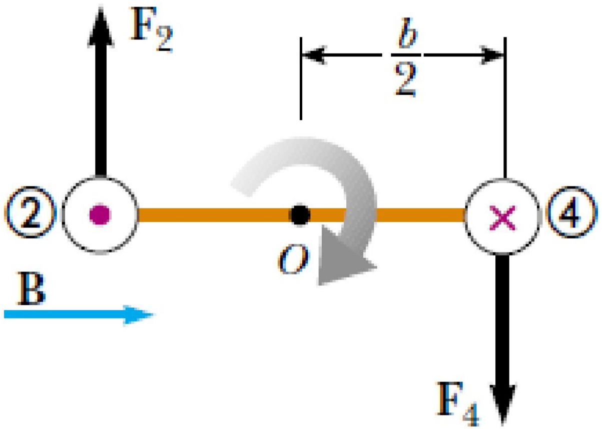
- Intro al Magnetismo
- Fuerza de Lorentz
- Fuerza sobre una carga en movimiento
- Fuerza sobre una espira

Torque sobre una espira en un campo magnético uniforme



Consideramos una espira inmersa en un campo magnético uniforme. Sabemos que la fuerza neta es nula.

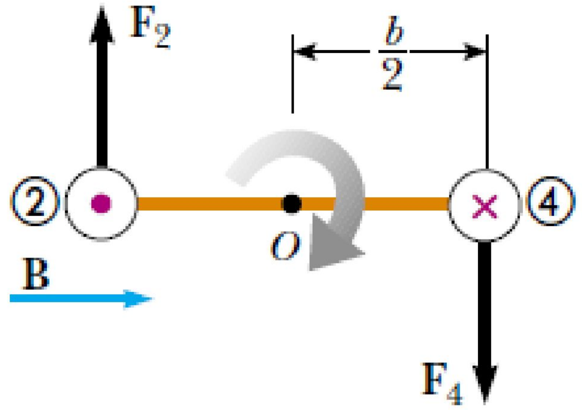
La fuerza sobre los segmentos 1 y 3 es nula.



Las fuerzas sobre los segmentos 2 y 4 son iguales y de sentido opuesto

$$F_2 = F_4 = IaB$$

Si calculamos el momento de las fuerzas con respecto al punto medio O tenemos



$$\tau_{\max} = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = (IaB)\frac{b}{2} + (IaB)\frac{b}{2} = IabB$$

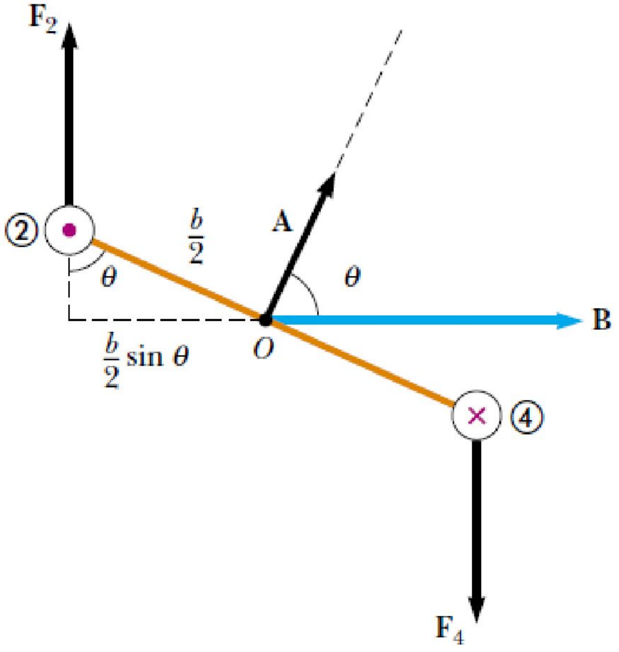
$$\boxed{\tau_{\max} = IAB}$$

Si definimos $\vec{A}$ como un vector perpendicular al área de la espira tendremos

$$\tau = F_2 \frac{b}{2} \sin\theta + F_4 \frac{b}{2} \sin\theta$$

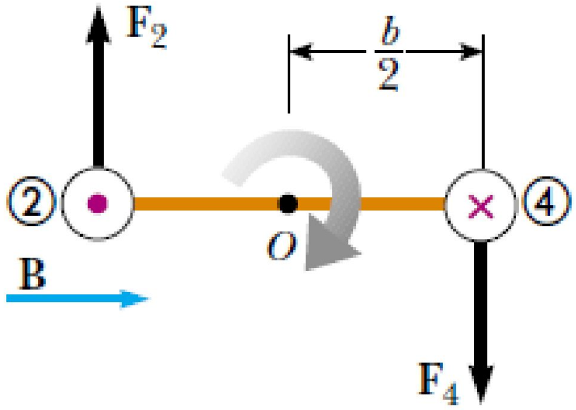
$$= IaB\left(\frac{b}{2}\sin\theta\right) + IaB\left(\frac{b}{2}\sin\theta\right) = IabB\sin\theta$$

$$= IAB\sin\theta$$



El torque es $\vec{\tau} = I\,\vec{A} \times \vec{B}$

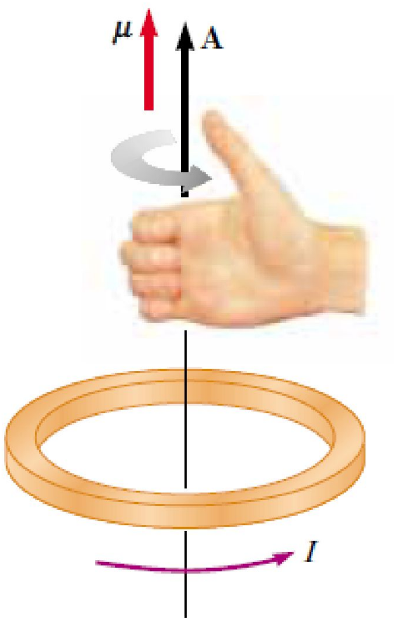
Si calculamos el momento de las fuerzas con respecto al punto medio O tenemos



$$\tau_{\max} = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = (IaB)\frac{b}{2} + (IaB)\frac{b}{2} = IabB$$

$$\boxed{\tau_{\max} = IAB}$$

El vector $\vec{A}$ se define usando la regla de la mano derecha:



Definimos el Momento magnético $\vec{\mu}$ de una espira que lleva una corriente I como $\vec{\mu} = I\,\vec{A}$, con unidades de Ampere $.m^2$.

El torque es entonces $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Este resultado no depende de la forma de la espira.

Si tenemos una bobina con N espiras, el momento magnético es

$$\vec{\mu} = N\mu_{espira}$$

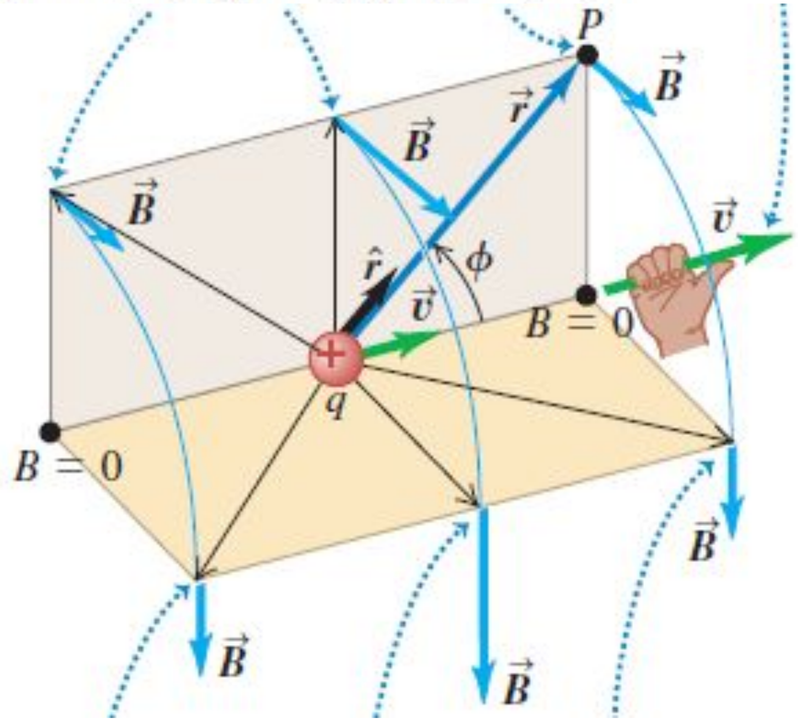
Fuentes de Campo Magnético: q en movimiento

Los experimentos demuestran que la magnitud de $\vec{B}$ también es proporcional a $|q|$ y a $1/r^2$. Pero la *dirección* de $\vec{B}$ *no* es a lo largo de la línea que va del punto de fuente al punto de campo. En vez de ello, $\vec{B}$ es perpendicular al plano que contiene esta línea y al vector velocidad, $\vec{v}$, de la partícula,

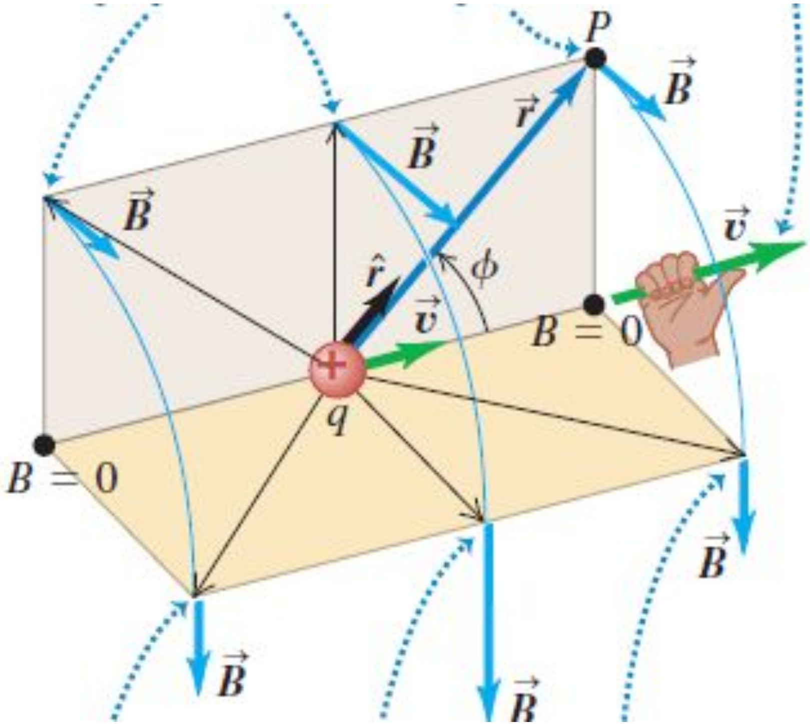
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

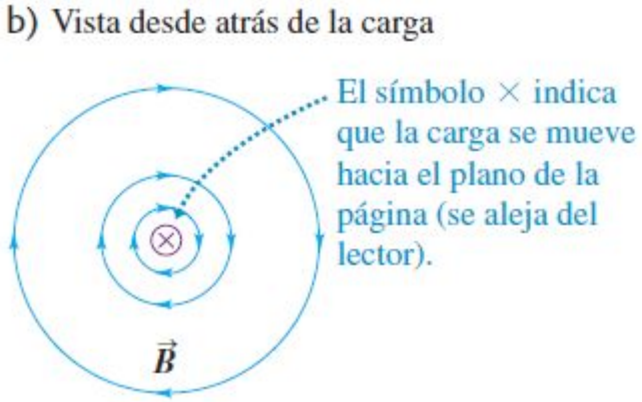
Dirección que va de q a P

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q|v \operatorname{sen}\phi}{r^2}}$$



Si volvemos a mirar el gráfico anterior y recordamos la definición de línea de campo vemos que:





¿Qué sabemos de μ_0 (Permeabilidad Magnética del vacío)

Recordando como se escribe Tesla en MKS llegamos a

$$1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s/C}\cdot\mathrm{m} = 1\,\mathrm{N/A}\cdot\mathrm{m}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2/\mathrm{C}^2\\ &= 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T}\cdot\mathrm{m/A}\end{aligned}}$$

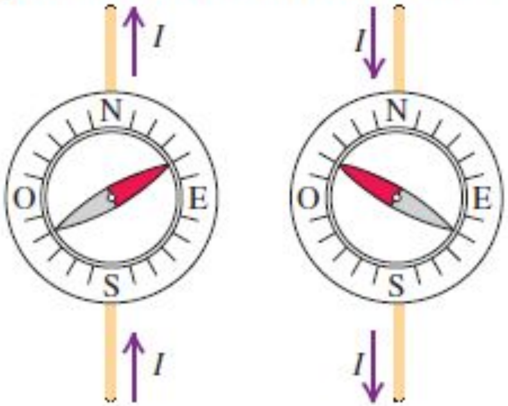
Fuentes de B: un segmento conductor

Principio de Superposición:

El campo magnético total generado por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos generados por las cargas individuales.

+

brújula tiene una desviación, cuya dirección depende de la dirección de la corriente.

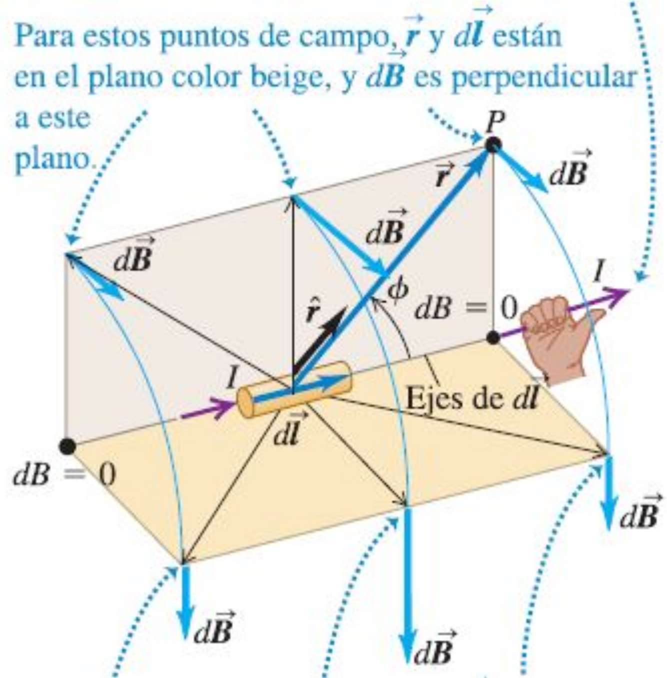


Calculamos el **campo magnético generado por un segmento de un conductor** que transporta corriente $d\vec{l}$

El volumen del segmento es como el de un cilindro (Superficie de la tapa x longitud): A*dl*

Si hay n partículas por unidad de volumen y cada una con una carga q ⇒ la carga total dQ que se mueve en el segmento considerado es:

$$dQ = nqA\,dl$$



Las cargas en movimiento en el segmento ≡ dQ viajando con v_{dsa}

Usando el cálculo anterior

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q|v\,\text{sen}\,\phi}{r^2}}$$

Cambiando q $\leftrightarrow$dQ y v $\leftrightarrow$ v_d obtenemos:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|dQ|v_d \operatorname{sen}\phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n|q|v_d A\, dl \operatorname{sen}\phi}{r^2}$$

$$dQ = nqA\, dl$$

Recordando que: $n|q|v_d A$ **=** a la corriente I **=>**

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, dl \operatorname{sen}\phi}{r^2}$$

Campo Magnético generado por un segmento de un conductor (expresión vectorial)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{(campo magnético de un elemento de corriente)}$$

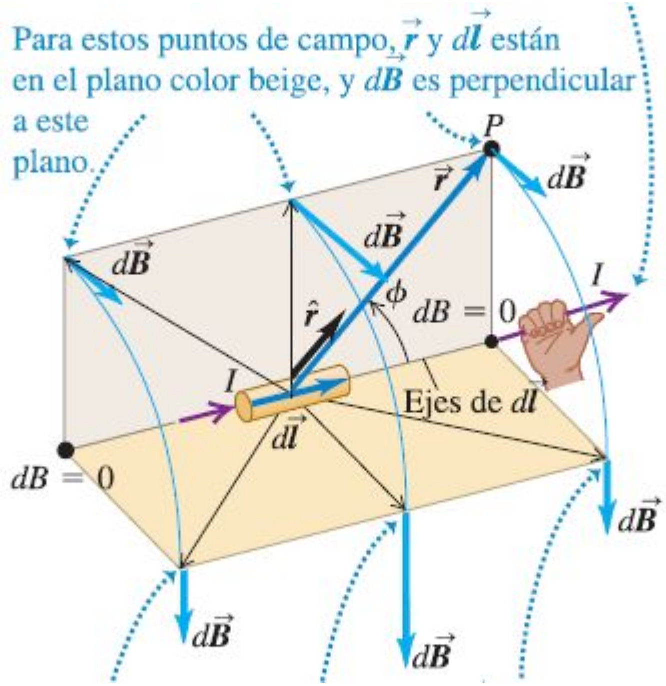
donde $d\vec{l}$ es un vector con longitud dl, en la misma dirección que la corriente en el conductor.

Ley de Biot y Savart

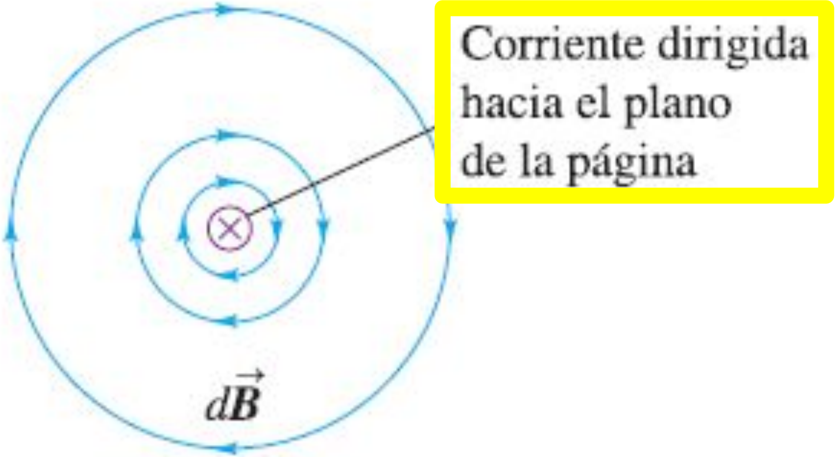
Una generalización de las dos ecuaciones para B calculadas antes:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\, d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Líneas de campo para el segmento conductor

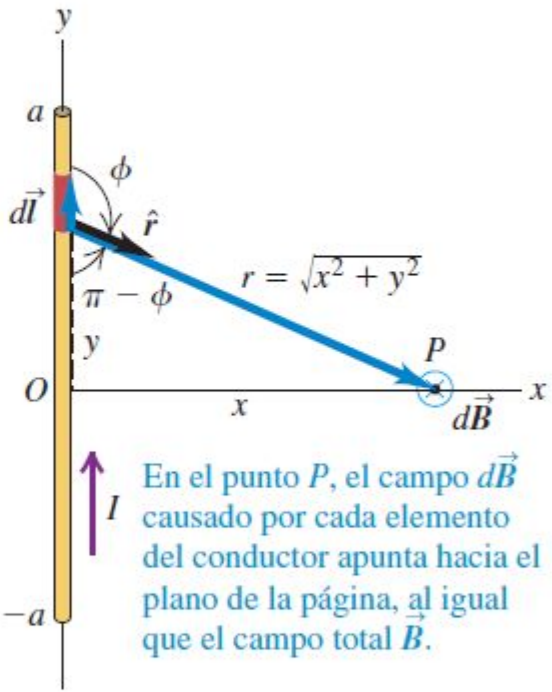


b) Vista a lo largo del eje del elemento de corriente



B en un conductor que transporta corriente: cálculo

28.5 Campo magnético producido por un conductor recto portador de corriente de longitud $2a$.



Queremos escribir algo asi para este caso particular

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\,\mathrm{sen}\,\phi}{r^2}$$

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\boxed{\mathrm{sen}\,\phi = \mathrm{sen}\,(\pi - \phi) = x/\sqrt{x^2 + y^2}.}$$

Ojo que esto nos da el módulo de B pero no su dirección

La dirección de B sale usando la regla de la mano derecha:

dl es en la dirección y
r está en el plano xy

La dirección de B está en la dirección z

Lo único que nos queda para obtener el B total es sumar sobre todos los dl:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{x\, dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Podemos integrar esto por sustitución trigonométrica o con ayuda de una tabla de integrales. El resultado final es

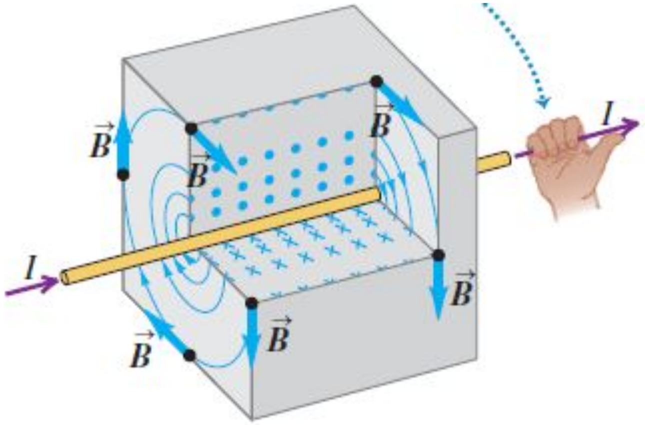
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \tag{28.8}$$

Nos falta analizar los casos extremos: a →∞ y P →∞.

- Si a >>x ⇒ $\boxed{\sqrt{x^2 + a^2} \text{ es aproximadamente igual a } a}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$



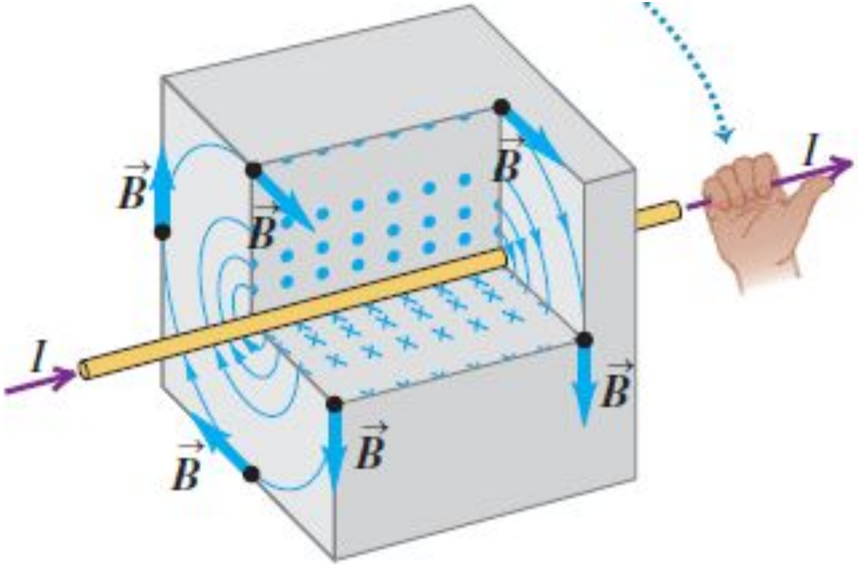
La situación física tiene simetría axial con respecto del eje y. Por lo tanto, $\vec{B}$ debe tener la misma *magnitud* en todos los puntos de un círculo con centro en el conductor y que yace en un plano perpendicular a él, y la *dirección* de $\vec{B}$ debe ser tangente a todo ese círculo. Así, en todos los puntos de un círculo de radio r alrededor del conductor, la magnitud B es

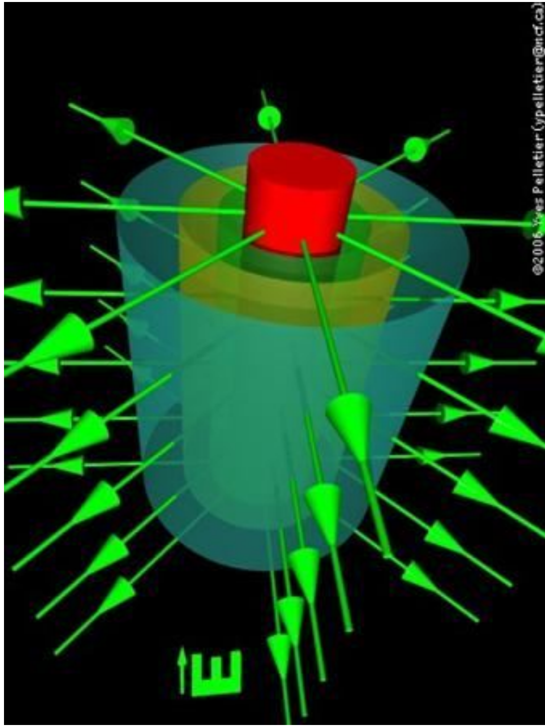
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{(cerca de un conductor largo y recto portador de corriente)} \qquad (28.9)$$

Comparemos líneas de B y E:

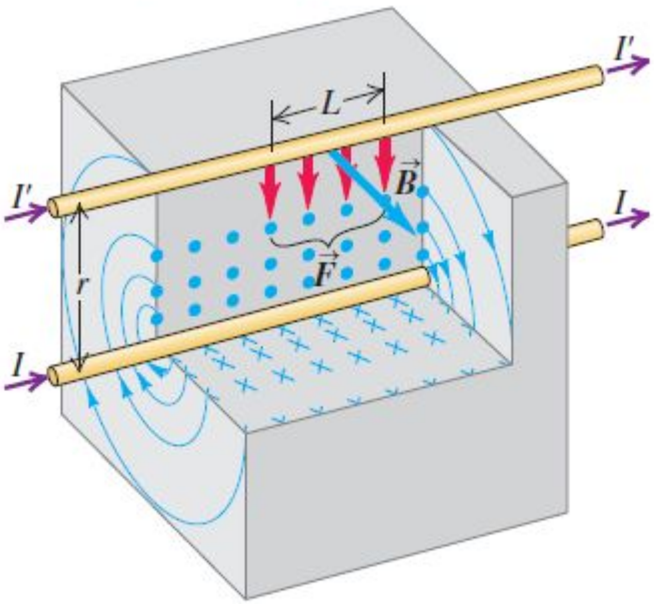
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad \text{(línea infinita de carga)}$$

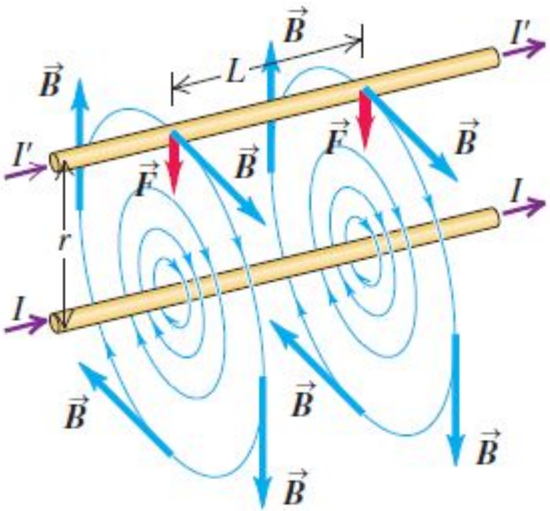
Así, el campo eléctrico debido a una línea de carga de longitud infinita es proporcional a $1/r$, y no a $1/r^2$ como fue el caso para una carga puntual. Si λ es positiva, la dirección de $\vec{E}$ es radial hacia fuera con respecto a la recta, y si λ es negativa es radial hacia dentro.

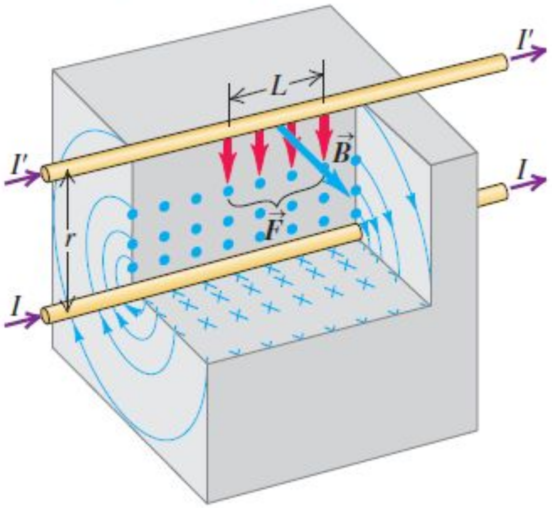




¿Qué pasa si tenemos 2 conductores largos con I?







$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\boxed{\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B},}$$

La fuerza que ejerce el campo sobre una longitud L del conductor

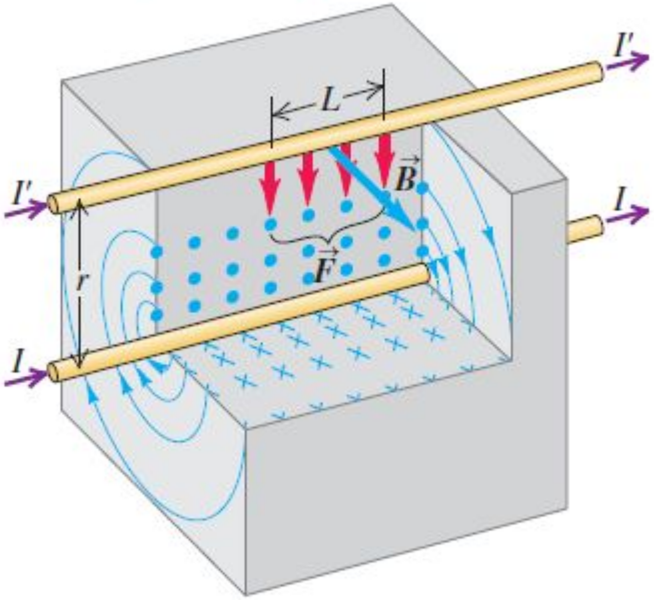
Como $\vec{B}$ es perpendicular a la longitud del conductor y, por lo tanto, a $\vec{L}$, la magnitud de esta fuerza es

$$F = I'LB = \frac{\mu_0 II'L}{2\pi r}$$

La fuerza por unidad de longitud será:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \quad \text{(dos conductores largos, paralelos y portadores de corriente)} \quad (28.11)$$

La fuerza sobre el conductor de arriba va hacia abajo

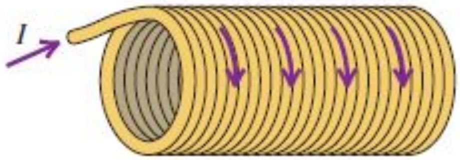


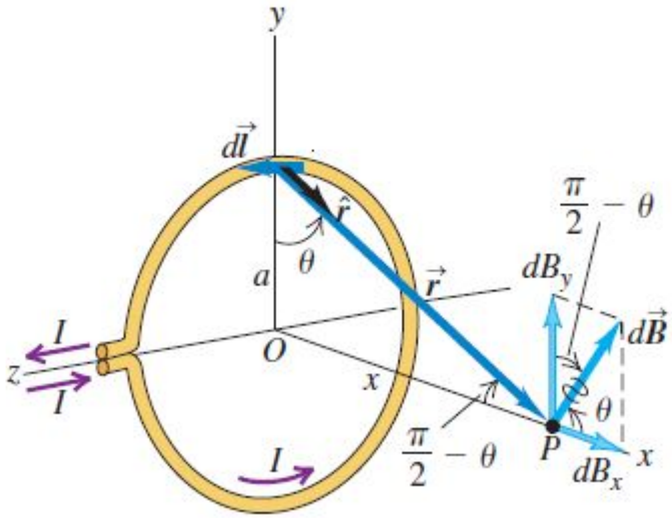
- La corriente en el conductor de arriba también genera un campo (para abajo)
- Si usamos el principio de superposición podemos calcular la fuerza que ejerce el conductor de arriba sobre el de abajo obtenemos que:

  La fuerza sobre el conductor de abajo va hacia arriba

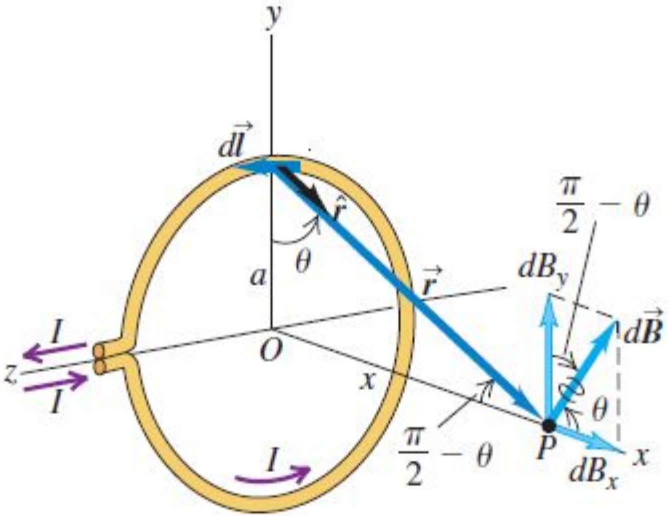
Así, *dos conductores paralelos que transportan corrientes en el mismo sentido se atraen uno al otro*. Si se invierte el sentido de cualquiera de las corrientes, las fuerzas también se invertirán. *Dos conductores paralelos que transportan corrientes en sentido opuestos se repelen entre sí.*

Campo Magnético Espira Circular





La corriente es llevada hacia dentro y fuera de la espira a través de dos alambres largos y rectos colocados lado a lado; las corrientes en estos alambres rectos van en sentidos opuestos, y sus campos magnéticos casi se cancelan entre sí (véase el ejemplo 28.4 en la sección 28.3).



- P está sobre el eje x.
- Sino se complica

Para encontrar el campo magnético en el punto P sobre el eje de la espira, a una distancia x del centro, se usa la ley de Biot y Savart, ecuación (28.5) o (28.6). Como se observa en la figura, $d\vec{l}$ y $\hat{r}$ son perpendiculares, y la dirección del campo $d\vec{B}$ generado por este elemento $d\vec{l}$ en particular yace en el plano xy. Como $r^2 = x^2 + a^2$, la magnitud dB del campo debido al elemento $d\vec{l}$ es

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \qquad (28.12)$$

Las componentes del vector $d\vec{B}$ son

$$dB_x = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}\underbrace{\boxed{\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}}}_{\cos(\Theta)}$$

$$dB_y = dB\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}\underbrace{\boxed{\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}}}_{\mathrm{sen}(\Theta)}$$

- Hay simetría rotacional respecto del eje x.
- Para cada dl en un lado de la espira hay otro dl “opuesto”. Cada uno de ellos hace contribuciones iguales y de sentido opuesto ⇒ se cancelan todas las componentes y. Sólo quedan las x.

Para obtener la componente x del campo total $\vec{B}$, se integra la ecuación (28.13), incluyendo todos los elementos $d\vec{l}$ alrededor de la espira. Todos los elementos de esta expresión son constantes, excepto dl, por lo que se pueden sacar de la integral para obtener

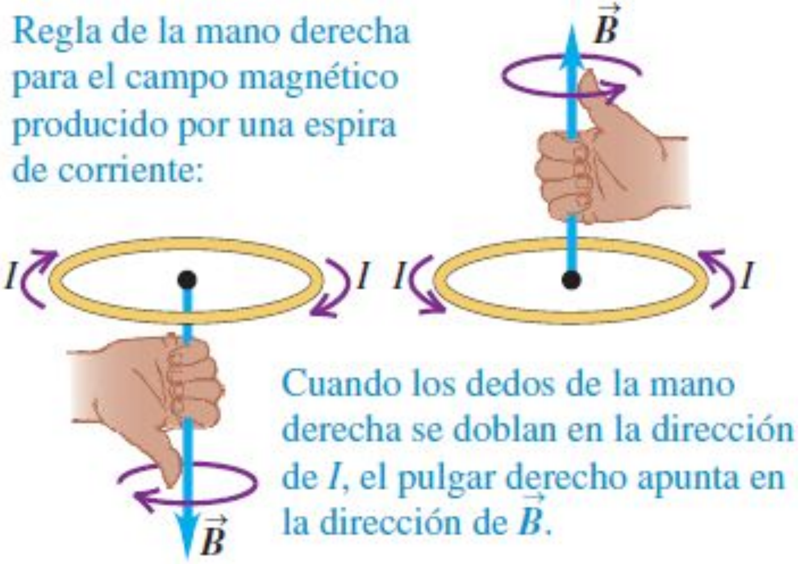
$$B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\,dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \boxed{\int dl}$$

$$\boxed{\int dl = 2\pi a}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad \text{(sobre el eje de una espira circular)}$$

¿En qué dirección apunta B?

28.13 Regla de la mano derecha para la dirección del campo magnético producido sobre el eje de una bobina que conduce corriente.



Podemos definir un ampere como la corriente que circula por dos cables separados por un metro de distancia que se generan mutuamente una fuerza por unidad de longitud de $F = 2 \times 10^{-7} N/m$

B sobre el eje de una bobina

La separación entre las espiras es tan pequeña que el plano de cada una está prácticamente a la misma distancia x del punto de campo P. Cada espira contribuye por igual al campo, y el total es N veces el campo producido por una sola espira:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad \text{(sobre el eje de } N \text{ espiras circulares)} \qquad (28.16)$$

¿El valor máximo donde se alcanza?

en $x = 0$, el centro de la espira o bobina:

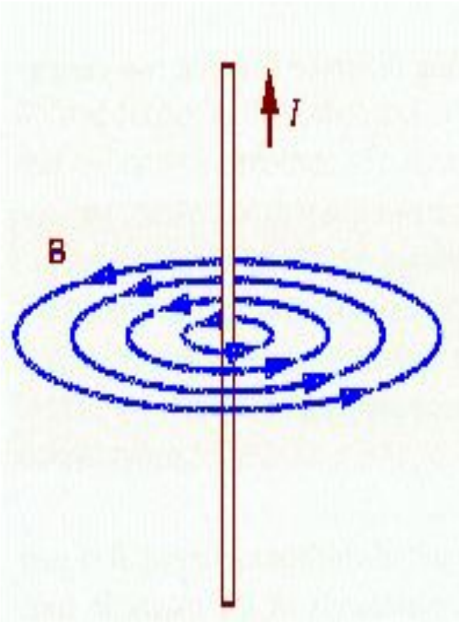
$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \qquad \text{(en el centro de } N \text{ espiras circulares)}$$

Ley de Ampère

Consideramos un hilo infinito con corriente I

Sea una circunferencia de radio r con centro en el hilo, en un plano perpendicular al mismo; queremos calcular $\oint \vec{B}.d\vec{l}$, la integral sobre todo el círculo del campo magnético.

Sabemos que sobre el círculo el campo es uniforme, entonces $\vec{B}.d\vec{l} = Bdr$, porque B es uniforme y tangencial al círculo.



$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = B\oint ds = B2\pi r$$

pero $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ entonces

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I$$

Este resultado se generaliza a cualquier tipo de curva cerrada

La integral del campo magnético sobre cualquier curva cerrada es proporcional a la corriente que atraviesa cualquier superficie cuya frontera es dicha curva

$$\boxed{\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I}$$

Si para una distribución de corrientes podemos encontrar por simetría una curva sobre la cual B es uniforme, podemos usar la ley de Ampere para calcular B.

Ley de Ampère, forma diferencial

Si definimos la densidad de corriente como la corriente por unidad de área, podemos escribir

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}.d\vec{s}$$

Donde S es una superficie cuya frontera es la curva sobre la cual se integra el campo magnético.

El teorema de Stokes nos permite escribir

$$\boxed{\oint \vec{B}.d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{s}}$$

Tenemos entonces

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B} \; - \mu_0 \vec{J}) d\vec{s} = 0$$

Para cada punto del espacio tendremos

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$