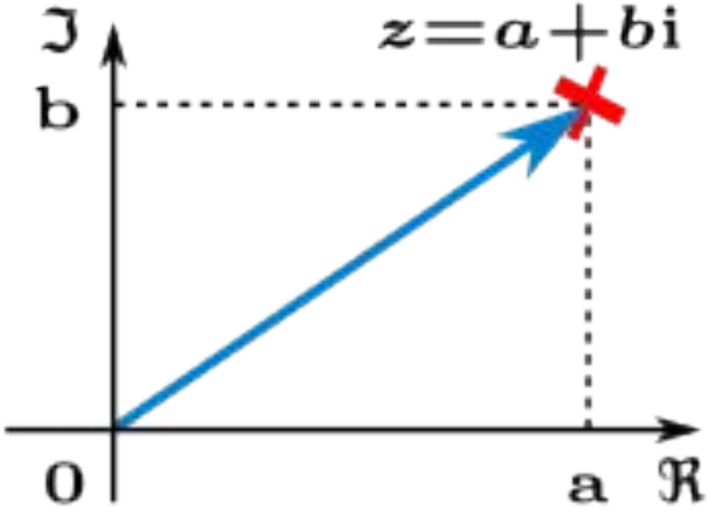
Repaso de números complejos

$$z = a + \boxed{i}\, b$$

Con a,b reales y $i = \sqrt{-1}$

$$a = Re(z)$$

$$b = Im(z)$$

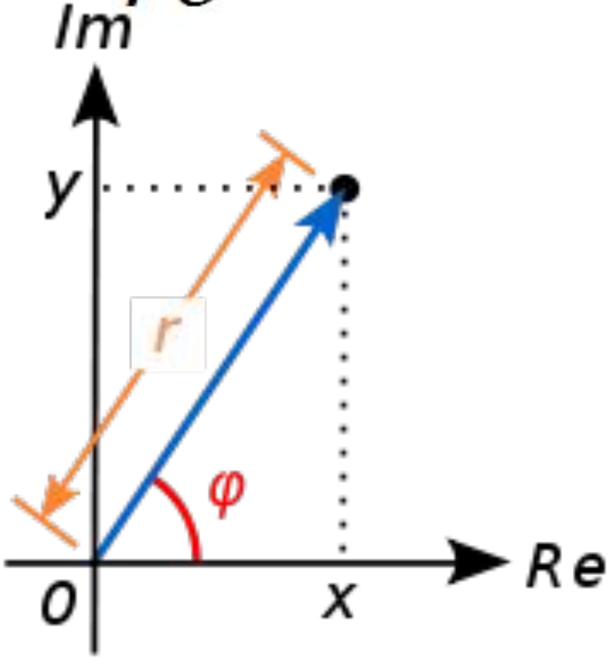


Más repaso

Identidad de Euler:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Representación polar: $z = re^{i\theta}$



Donde: $r = |z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

Además: $\theta = arctg\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$

$$z = r\,cos\theta + i\,r\,sin\theta$$

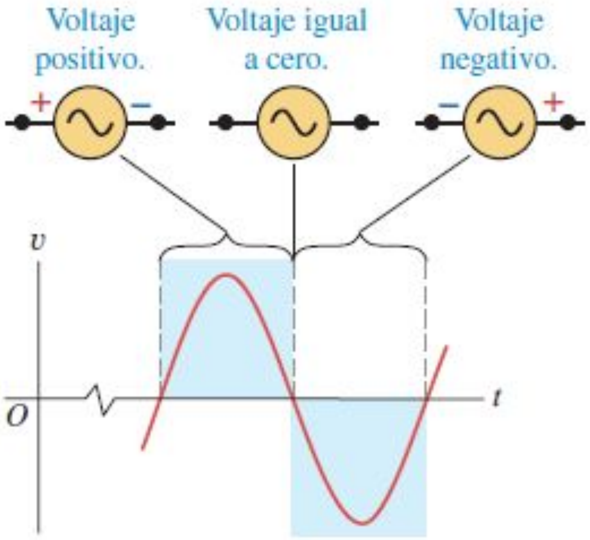
Circuitos de corriente alterna
Representación compleja

Una fuente CA puede representarse de la siguiente forma:

$$\Delta v(t) = \Delta V_{max}\cos(\omega t)$$

$$\Delta v(t) = \mathrm{Re}(\Delta V_{max}e^{i\omega t})$$

31.1 Voltaje a través de una fuente de ca sinusoidal.



En general vamos a operar con números complejos y al final tomamos la parte real.

Para evitar confusiones, **<u>se utilizará la j</u>** para representar la unidad imaginaria i.

$$\boxed{z = re^{j\theta}}$$

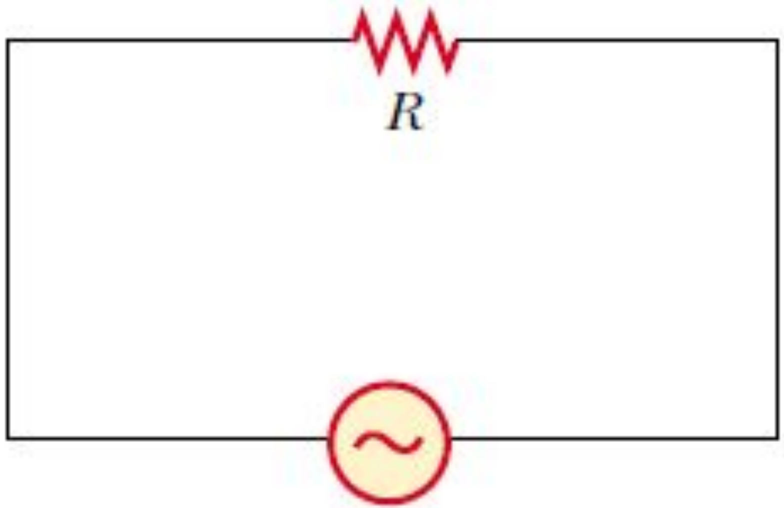
Impedancia

Llamamos Impedancia (Z) de un circuito al cociente entre las formas complejas de v(t) e i(t).

La impedancia es un número complejo: $\boxed{Z = \frac{v(t)}{i(t)}}$

La representación compleja se utiliza también para visualizar el comportamiento dinámico del circuito a través del diagrama de fases, una representación en el plano complejo.

Circuito puramente resistivo



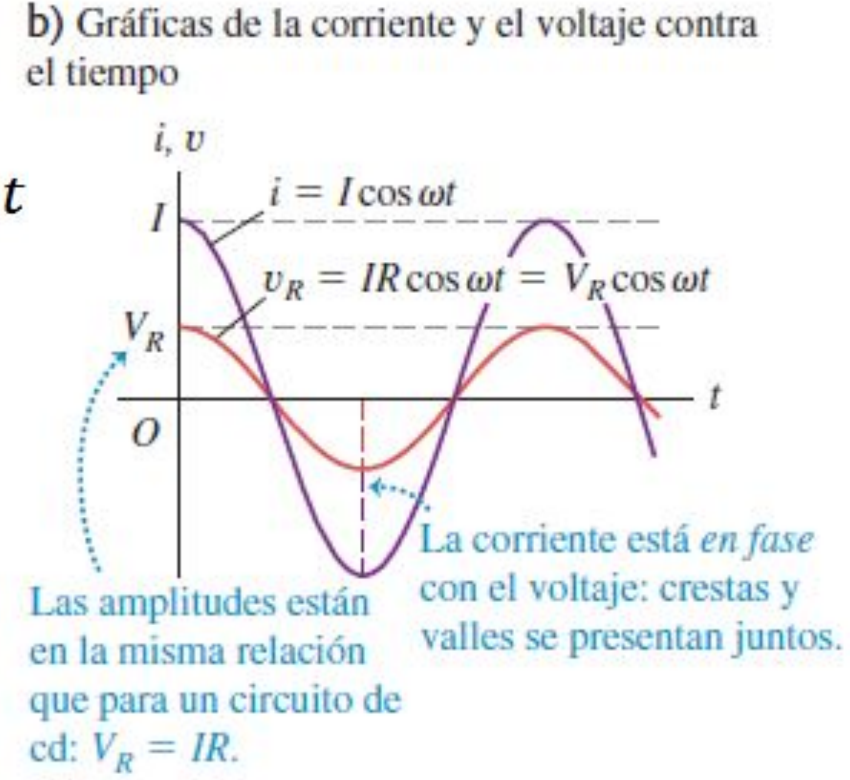
La ley de Ohm es **universalmente** válida, por lo que para un circuito CA tendremos también:

$$v(t) = i(t)R$$

La impedancia de una resistencia será entonces: $\boxed{Z = \frac{v(t)}{i(t)} = R}$

tenemos:

$$i(t) = \frac{\Delta V_{max} e^{j\omega t}}{R} = I_{max} e^{j\omega t}$$



$$I_{max} = \frac{\Delta V_{max}}{R}$$

La **impedancia** de una **resistencia es siempre real**, por lo que v(t) e i(t) no se **desfasan**

Voltaje y Corriente Eficaces

Una forma más útil de describir una cantidad positiva o negativa es el *valor eficaz* o *valor cuadrático medio* (*rms*, por las siglas de *root mean square*).

Se *eleva al cuadrado* la corriente instantánea i, se obtiene el valor *promedio* (media) de i^2 y, por último, se saca la *raíz cuadrada* de ese valor. Este procedimiento define la **corriente eficaz**, que se denota con I_{rms} (figura 31.4). Aun cuando i sea negativa, i^2 siempre será positiva, por lo que I_{rms} nunca es igual a cero (a menos que i fuera cero en todo instante).

Si la corriente instantánea está dada por $i = I \cos \omega t$, entonces

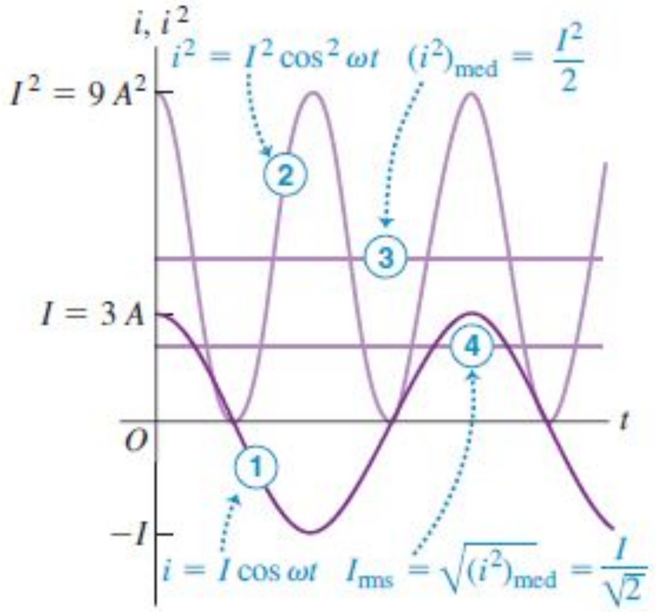
$$\boxed{i^2 = I^2 \cos^2 \omega t}$$

Recordando que:

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$$

$$i^2 = I^2\cos^2\omega t$$

$$i^2 = I^2\frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) = \frac{1}{2}I^2 + \frac{1}{2}I^2\cos 2\omega t$$



El promedio de $\cos 2\omega t$ es igual a cero porque la mitad del tiempo tiene un valor positivo y la otra mitad tiene un valor negativo. Así, el promedio de i^2 simplemente es $I^2/2$. La raíz cuadrada de esto es I_{rms}.

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad \text{(valor cuadrático medio de una corriente sinusoidal)} \qquad (31.4)$$

El valor medio de la corriente que circula sobre el circuito en un ciclo completo es nulo

Como en general, las frecuencias de trabajo son altas (decenas de ciclos por segundo) resulta más razonable medir los valores eficaces.

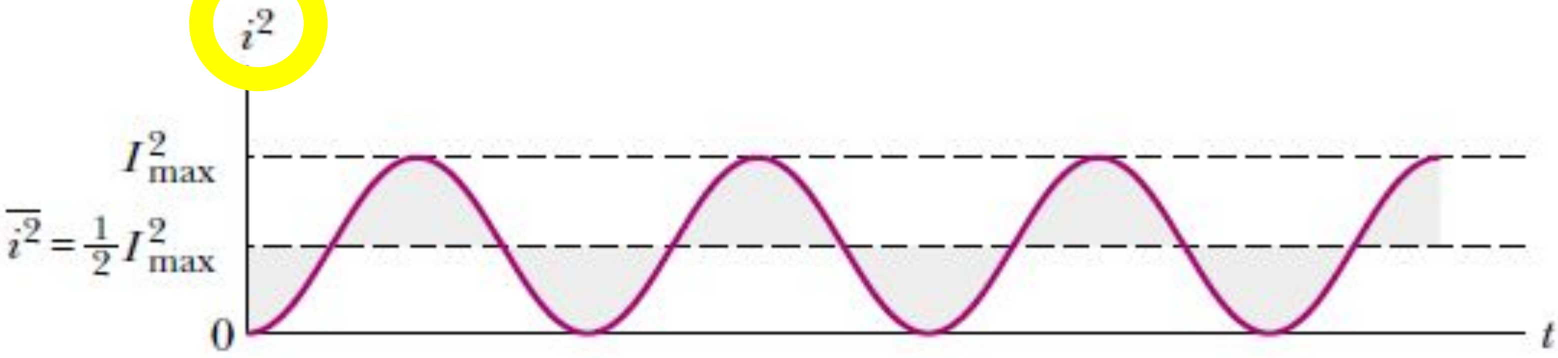
➡ La corriente eficaz (o cuadrática media) es el valor de la corriente continua que disiparía la misma potencia que la corriente alterna.

Repetimos: para una alimentación sinusoidal, se tiene:

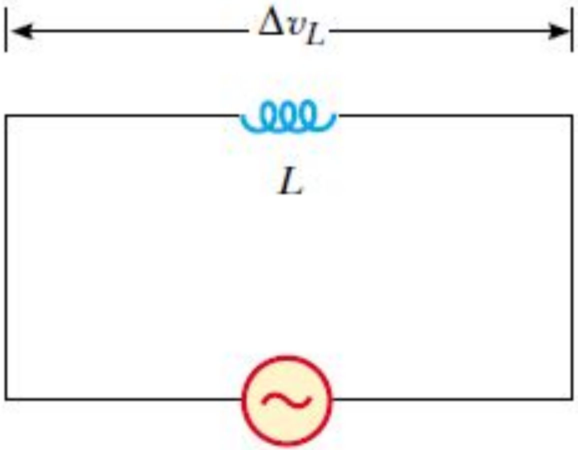
$$\boxed{I_{prom} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = 0.707 I_{max}}$$

$$\boxed{\Delta V_{prom} = \frac{\Delta V_{max}}{\sqrt{2}} = 0.707 \Delta V_{max}}$$

$$I_{prom} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = 0.707 I_{max}$$



Circuito puramente inductivo



El potencial que entrega la fuente debe ser igual a la caída sobre el inductor:

$$v(t) + v_L(t) = 0$$

Considerando que: $v(t) = \Delta V_{max} e^{j\omega t}$ y que: $v_L(t) = -L\frac{di(t)}{dt}$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \longrightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt$$

$$i(t) = \frac{\Delta V_{max}}{L}\int e^{j\omega t}dt = \frac{\Delta V_{max}}{j\omega L}\, e^{j\omega t}$$

Recordando la definición de impedancia: $\boxed{Z = \frac{v(t)}{i(t)}}$

$$\mathrm{v(t)} = \Delta \mathrm{V_{max}} e^{j\omega t}$$

$$\mathrm{i(t)} = \frac{\Delta \mathrm{V_{max}}}{j\omega \mathrm{L}} e^{j\omega t}$$

$$\mathrm{Z_L} = j\omega \mathrm{L}$$

La impedancia de una inductancia es imaginaria pura.

Definimos la **Reactancia Inductiva:** $\mathrm{Z_L} = j\mathrm{X_L}$

repetimos:

Identidad en C	$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$$i(t) = \frac{\Delta V_{max}}{j\omega L}\, e^{j\omega t}$$

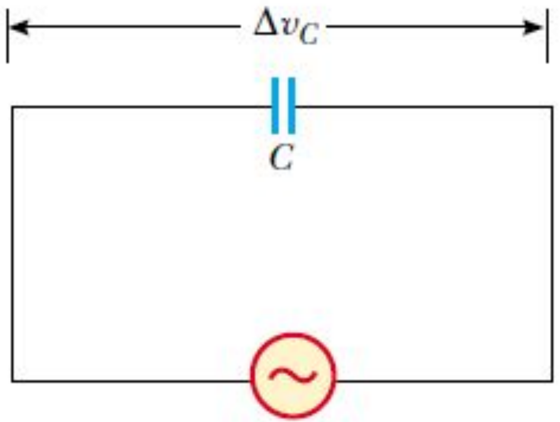
$$i(t) = \frac{\Delta V_{max}}{\omega L}\, e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\Delta V_{max}}{\omega L}\, e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

La corriente en una inductancia está **atrasada en 90 grados** respecto al voltaje

$$I(t) = \mathrm{Re}\big(i(t)\big) = \frac{\Delta V_{max}}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Circuito puramente capacitivo



El potencial que entrega la fuente debe ser igual a la caída sobre el capacitor:

$$v(t) + v_C(t) = 0$$

Considerando que: $v(t) = \Delta V_{max} e^{j\omega t}$ y que: $v_C(t) = -\frac{Q(t)}{C}$

$$Q(t) = C\Delta V_{max} e^{j\omega t} \longrightarrow i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = j\omega C\Delta V_{max} e^{j\omega t}$$

Recordando la definición de impedancia: $Z = \frac{v(t)}{i(t)}$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

definimos: $X_C = \frac{1}{\omega C}$ $\Rightarrow$ $Z_C = -j\,X_C$

La impedancia de un capacitor también es imaginaria pura

$$i(t) = j\omega C\Delta V_{max} e^{j\omega t}$$

Identidad en C $\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$$i(t) = \omega C\Delta V_{max} e^{j\omega t} e^{j\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

sólo nos molesta el signo menos (pero se cambia y listo)

$$i(t) = \omega C\Delta V_{max} e^{j\left(\omega t + \left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

La corriente en un capacitor está adelantada 90 grados respecto del voltaje:

$$i(t) = \omega C\Delta V_{max} \cos\left(\omega t + \left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Hasta ahora vimos que los campos $\boxed{\vec{E}(\vec{r},t)}$ y $\boxed{\vec{B}(\vec{r},t)}$ pueden originarse en la existencia de cargas eléctricas y sus movimientos.

¿Cuál es su origen? $\rightarrow$ cargas

$\rightarrow$ corrientes

- C_1 es una curva cerrada que es el límite de una superficie S_1.
- dl_1 son los vectores infinitesimales tangentes a C_1
- dS_1 son los vectores infinitesimales normales a S_1
- dl_1 y dS_1 satisfacen la regla de la mano derecha

$$\boxed{\int\int \vec{\nabla} \times \vec{E} . d\vec{s} = -\int\int \frac{d\vec{B}}{dt} . d\vec{s}} \longrightarrow \text{Clase 10}$$

Ley de Faraday $\longrightarrow$

$$\boxed{\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = -\frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1}$$

En palabras, la ley de Faraday nos dice que la circulación del campo eléctrico sobre la curva C_1, es proporcional a la variación temporal del flujo magnético a través de la superficie S_1.

$$\boxed{\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 \;=\; \mu_0 \left[\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \right]}$$

Ley de Ampère - Maxwell

Por su parte, la ley de Ampère-Maxwell expresa que la circulación del campo de inducción magnética a lo largo de la curva C_1 es proporcional a la suma de la corriente de conducción y la corriente de desplazamiento a través de la superficie S_1.

. Sea S_2 una superficie cerrada que limita una región del espacio V_2. Supongamos que $d\vec{S}_2$ representa cada vector infinitesimal normal exterior a la superficie S_2, mientras que dV_2 se refiere a cada elemento de volumen de la región V_2.

Ley de Gauss

$$\boxed{\begin{aligned} \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \rho \, dV_2 \\ \oint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 &= 0 \end{aligned}}$$

Formas Diferenciales (Ec. de Maxwell)

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = -\frac{d}{dt}\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1$$

Si las curvas son fijas
(no varían en el tiempo)

$$\boxed{\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = -\int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_1}$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 \left[\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 + \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1\right]$$

Curvas fijas

$$\boxed{\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \int_{S_1} \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}_1}$$

Si aplicamos el teorema de Stokes $\longrightarrow$ $\boxed{\oint_{C_1} \vec{\eta} \cdot \vec{dl}_1 = \int_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{\eta}\right) \cdot \vec{dS}_1}$

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot \vec{dl}_1 = -\int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}_1 \xrightarrow{\text{Stokes}} \boxed{\int_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \cdot \vec{dS}_1 = -\int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}_1}$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot \vec{dl}_1 = \int_{S_1} \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}_1$$

Stokes

$$\boxed{\int_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{dS}_1 = \int_{S_1} \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}_1}$$

Vemos que los dominios de integración son iguales y entonces:

$$\int_{S_1} \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S}_1 = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$$

$$\int_{S_1} \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] \cdot d\vec{S}_1 = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0}$$

Ahora veamos las leyes de Gauss para E y B:

$$\boxed{\oint_{S_2} \vec{\eta} \cdot d\vec{S}_2 = \int_{V_2} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\eta} \right) dV_2}$$

$$\int_{V_2} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dV_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Curvas fijas

$$\int_{V_2} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) dV_2 = \int_{V_2} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV_2$$

$$\int_{V_2} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) dV_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Resumen: Ecs. de Maxwell en forma diferencial

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}
$$

$\xrightarrow{\text{Libre de cargas y corrientes}}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}
$$