



# ONDAS

posición, velocidad  
campo E, campo B,

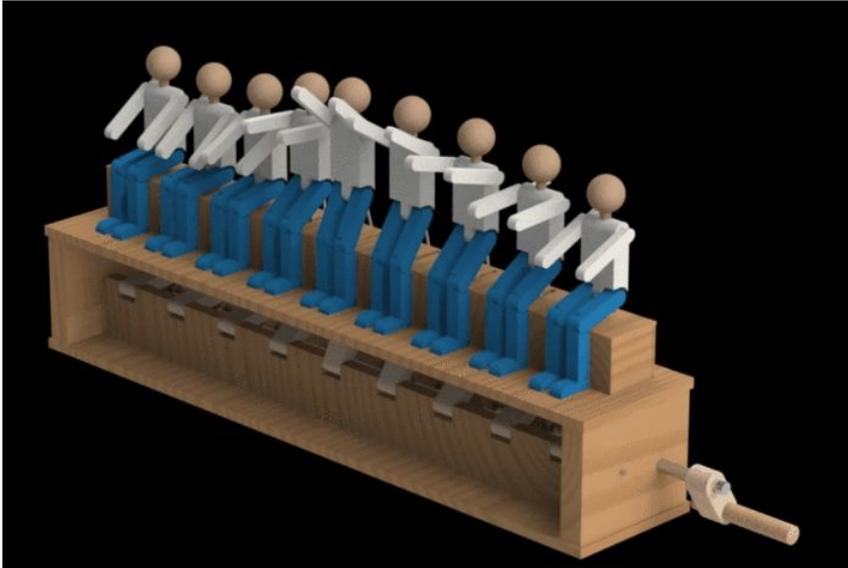
presión  
densidad

Una primera definición: **Una perturbación que se propaga**

Se mide con respecto de una  
posición de referencia (equilibrio)

Mejoramos la definición: **no hay transporte neto de materia**

**Onda: propagación de una perturbación, con transporte de energía pero sin transporte de materia**



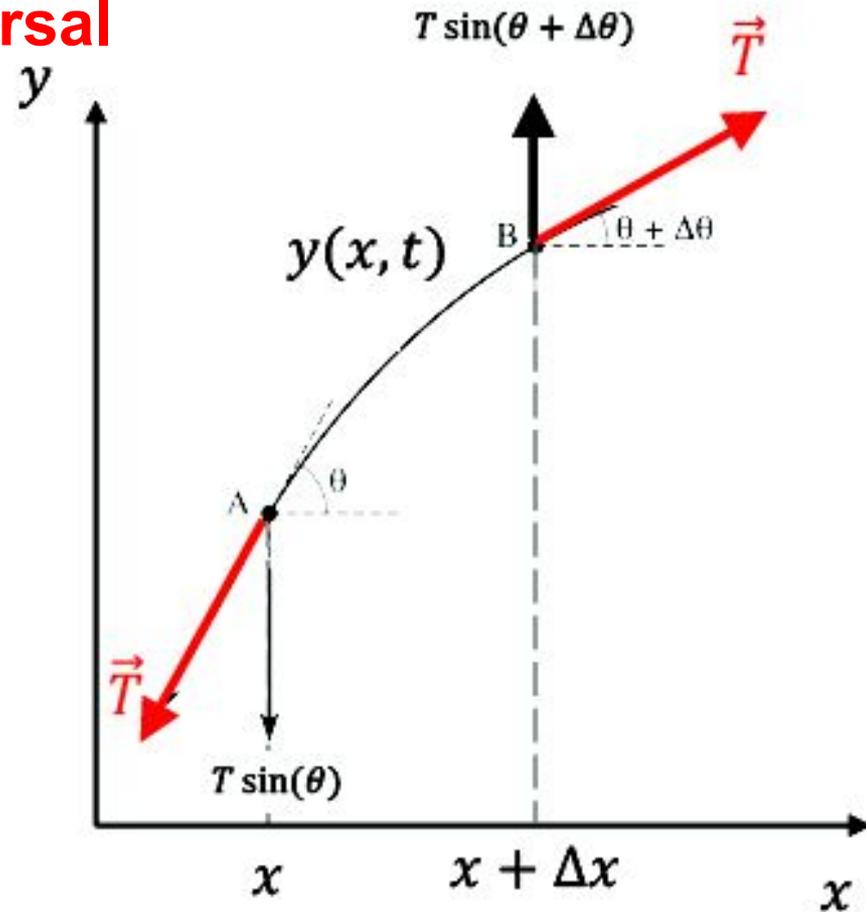
# Ondas mecánicas transversales: una cuerda



[https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string\\_all.html?locale=es](https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_all.html?locale=es)

## Cuerda con oscilación transversal

- Cuerda de densidad de masa  $\mu$  por unidad de distancia.
- Sometida a una tensión  $\vec{T}$
- $\vec{T}$  es tangente a la forma de la cuerda
- Forma de la cuerda en un instante dado es  $y(x)$
- Inextensible (el módulo de la tensión  $T$  es el mismo en toda la cuerda).
- Consideremos un tramo de la cuerda entre los puntos A y B (entre  $x$  y  $x + \Delta x$ ).

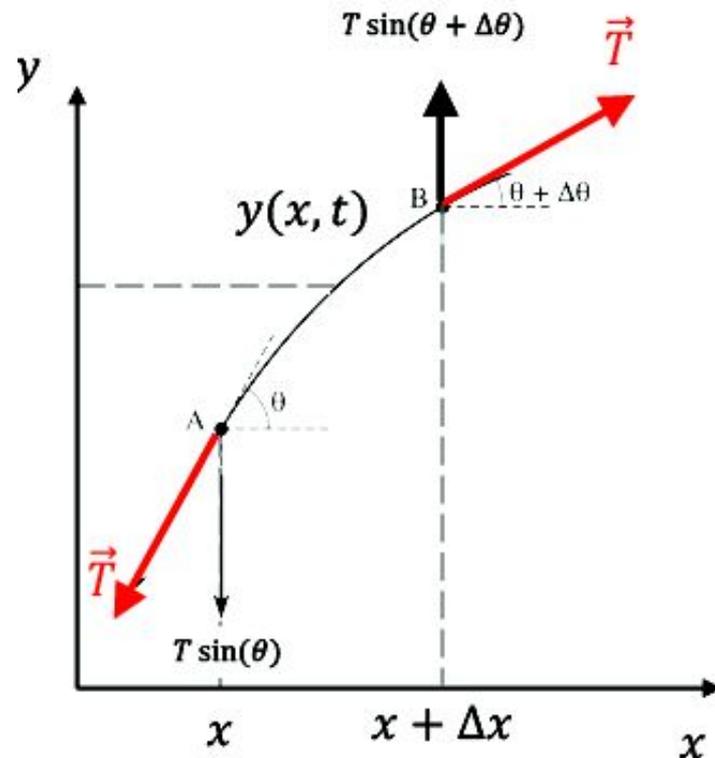


- Consideremos ahora movimiento en la componente  $y$ .

$$F_y = -T \sin \theta + T \sin(\theta + \Delta\theta)$$

- Si llamamos  $\Delta L$  al largo del segmento, por segunda ley de Newton tenemos:

$$\mu \Delta L \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \sin \theta + T \sin(\theta + \Delta\theta)$$



- Para pequeños apartamientos ( $\Delta y$  y  $\theta$  pequeños)

$$\Delta L \cong \Delta x$$

$$\sin \theta \cong \tan \theta \cong \theta$$

- Entonces

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T\theta + T(\theta + \Delta\theta) = T\Delta\theta$$

- Hagamos ahora tender  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Derivando respecto a  $x$  tenemos

$$\frac{\partial \tan \theta}{\partial x} = \frac{1}{(\cos \theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Para  $\theta \cong 0$ ,  $(\cos \theta)^2 \cong 1$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\mu \Delta L \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \sin \theta + T \sin(\theta + \Delta \theta)$$

- Entonces, retomando, tenemos

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T d\theta$$

- Divido por  $dx$  (que no nos vea unx matemáticx)

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

- y reemplazo  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ :

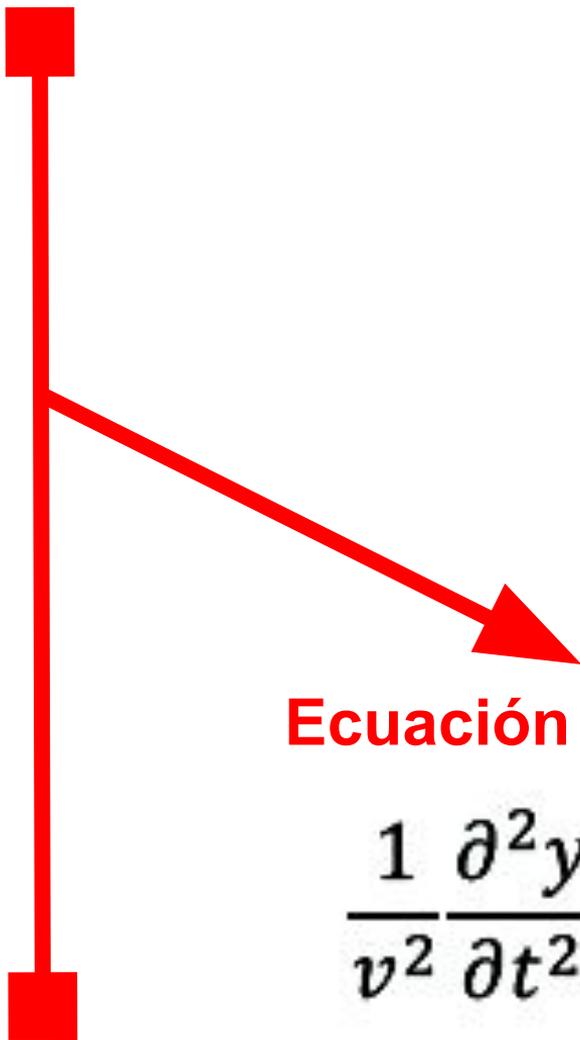
$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- $\sqrt{\frac{\mu}{T}}$  tiene unidades de inversa de la velocidad, entonces, tomando una velocidad  $v$  tal que

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



**Ecuación de Onda**

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

# La ecuación de onda y su solución

- La ecuación de onda

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Tiene como solución cualquier función  $y = f(x, t)$  del tipo

$$y(x, t) = f(x, t) = f(x \pm vt)$$

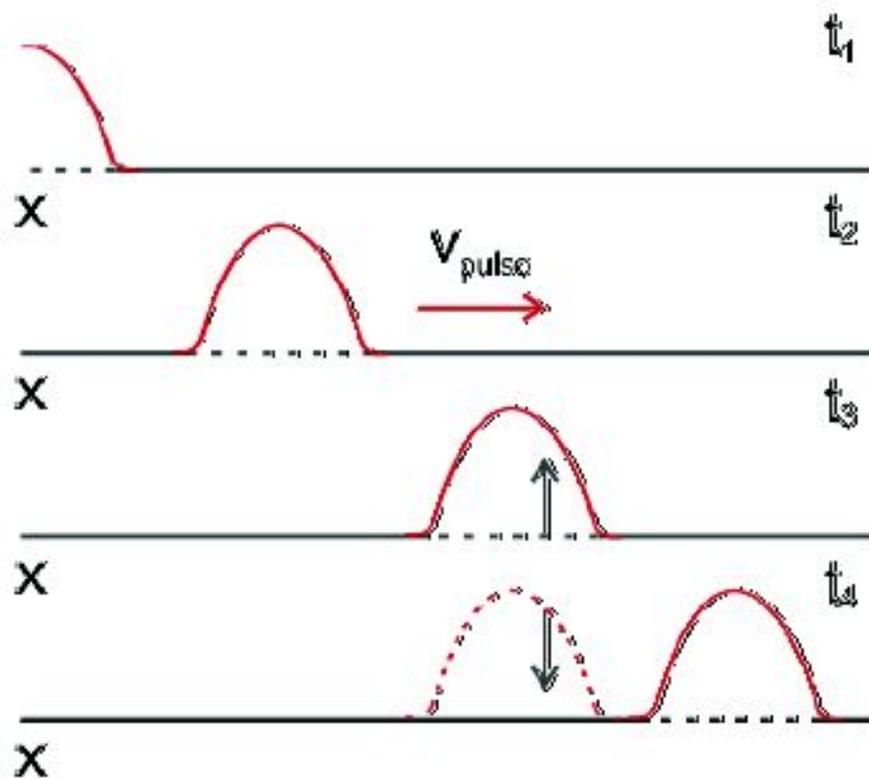
- Como es **lineal**, una combinación lineal de soluciones también es una solución.

# Definiciones: velocidad de fase

- En la ecuación de onda,  $v$  es la velocidad a la que cambia el argumento de  $f$  (lo que está entre paréntesis) es decir, la fase de la oscilación.
- Se denomina velocidad de fase.
- Tanto  $+v$  como  $-v$  son válidas en la ecuación de onda
- En el caso de la cuerda, reemplazar  $f(x \pm vt)$  en la ecuación de onda nos da:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

# Signos de $v$ en un pulso $f(x \pm vt)$



Si  $v > 0$

$$y = f(x \pm vt)$$

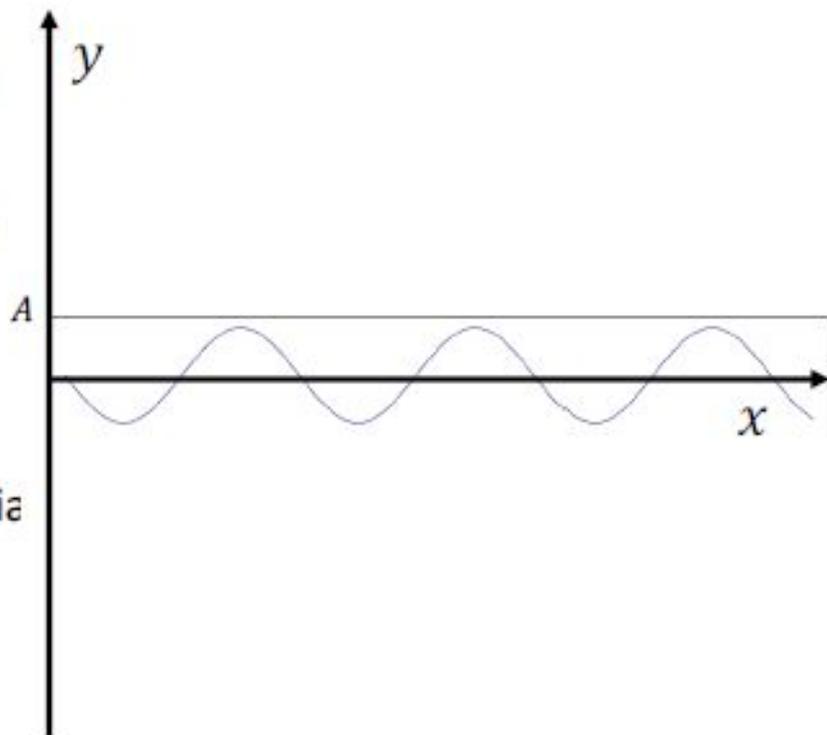
- $\rightarrow$  propagación de izda a dcha
- +  $\leftarrow$  propagación de dcha a izda

- Una de las soluciones de la ecuación de onda es la función:

$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

- Moviendo el extremo de la cuerda de arriba hacia abajo con una frecuencia angular  $\omega$  la puedo generar (también le doy amplitud  $A$ )
- Viaja hacia la derecha con velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



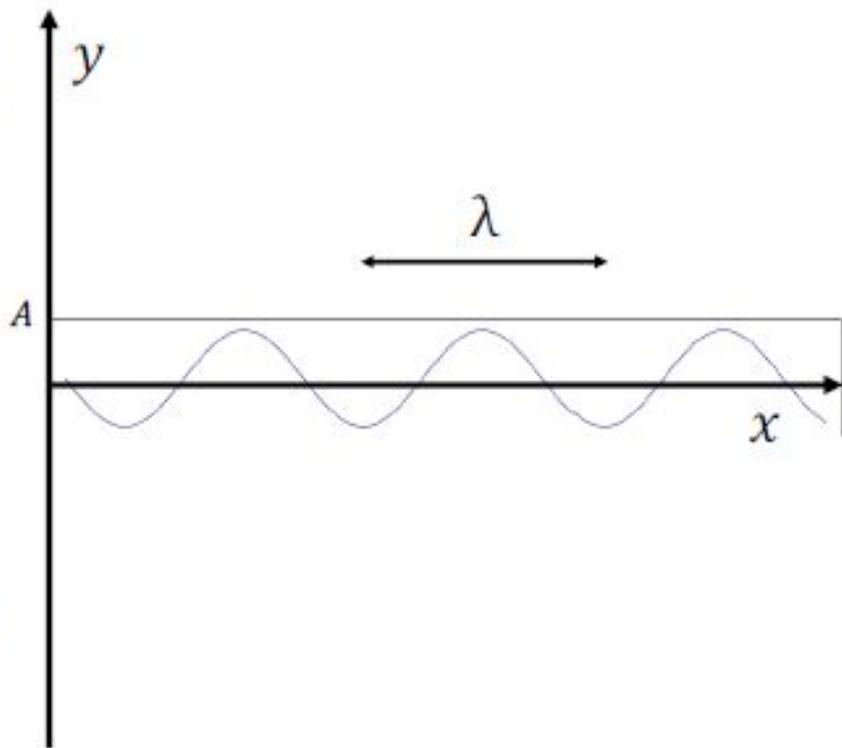
- Si sacamos una foto de la cuerda a un instante dado  $t_0$ , la forma de la onda es:

$$f(x, t_0) = A \cos(kx - \omega t_0)$$

- Es fácil ver que esta forma se repite cada distancia  $\lambda$  tal que

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- A  $\lambda$  se la denomina longitud de onda y  $k$  se denomina número de onda

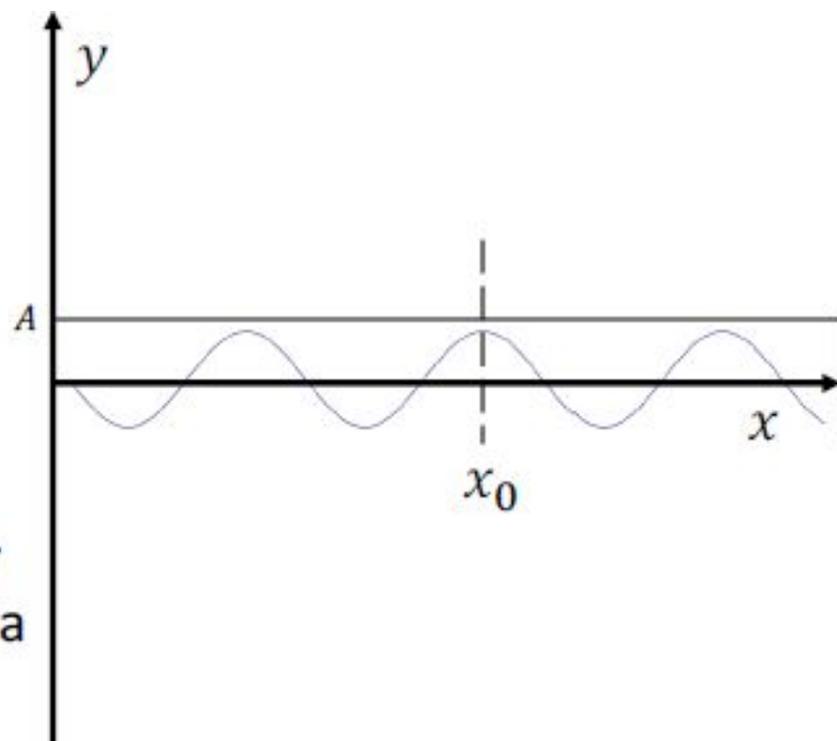


- Si ahora nos paramos a una distancia  $x_0$

$$f(x_0, t) = A \cos(kx_0 - \omega t)$$

- Vemos el punto de la cuerda subir y bajar con frecuencia  $\omega$ . La oscilación se vuelve a repetir al cabo de un período  $\tau$  tal que

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$



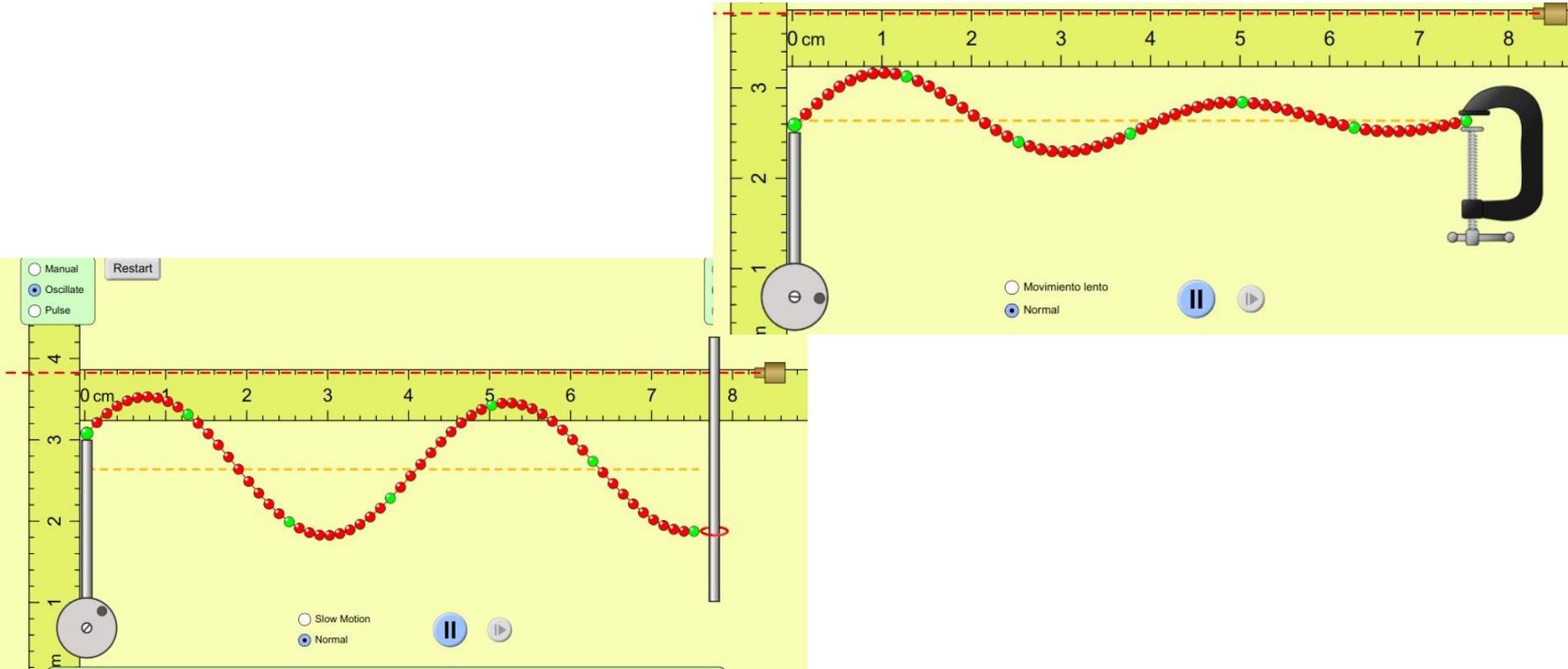
- Es fácil ver reemplazando en la ecuación o sacando factor común  $k$  que

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\omega}{k} \quad \leftarrow \text{Ecuación de dispersión de la onda}$$

- En este caso,  $v$  no depende de  $\omega$  ni de  $k$  y estas se acomodan de manera de siempre cumplir con la ec. de dispersión.
- En este caso la velocidad de fase es igual la velocidad con la que se propaga la energía (cinética) a lo largo de la cuerda.

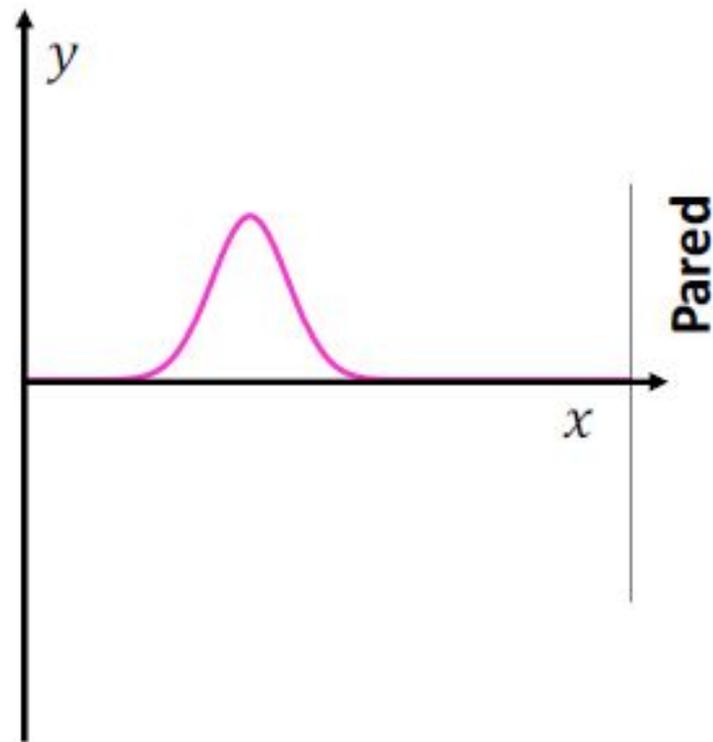
# ¿Qué papel juegan las condiciones de contorno?

[https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string\\_all.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_all.html)



## Condiciones de contorno: extremo fijo

- Experimento: Fijamos un extremo de la cuerda de una pared (condición de extremo fijo).
- Esto quiere decir que en la pared, siempre:
  - $y = \text{constante}$ ,
  - En particular  $y = 0$
- Notamos que pulso se 'refleja' y vuelve con la amplitud invertida.
- La pared genera un pulso igual pero opuesto en amplitud y velocidad de modo que  $y = 0$  en la pared siempre.



## Condiciones de contorno: extremo libre

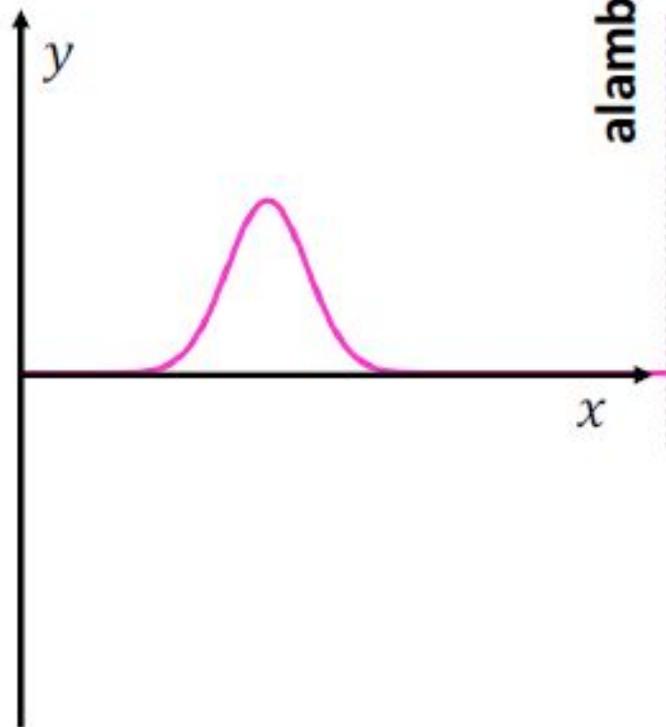
- Experimento: En un extremo ponemos un anillo anclado a un alambre vertical sin rozamiento (condición de extremo libre).

- Esto quiere decir que en ese extremo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

- Notamos que pulso se 'refleja' y vuelve con la amplitud sin invertir.

- El alambre genera un pulso igual pero opuesto en velocidad de modo de que  $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$  en ese extremo.

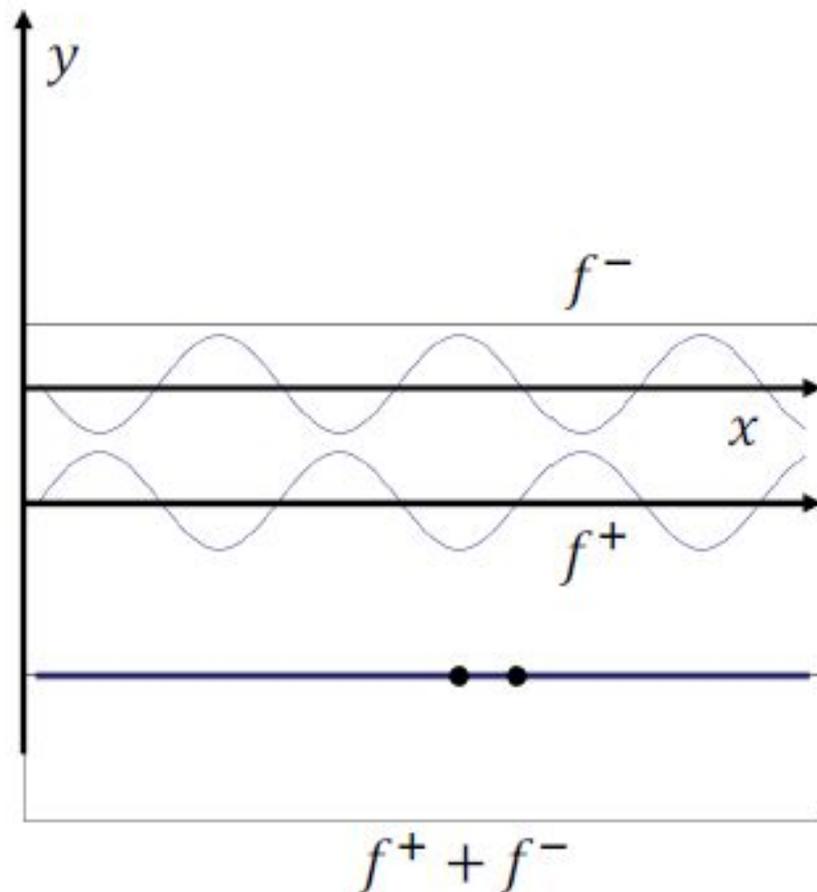


# Ondas Estacionarias

- Vimos que la ecuación de onda admitía soluciones viajeras en ambos sentidos de propagación.
- Supongamos entonces dos ondas

$$f^{\pm}(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t)$$

- La suma de ambas es también una solución



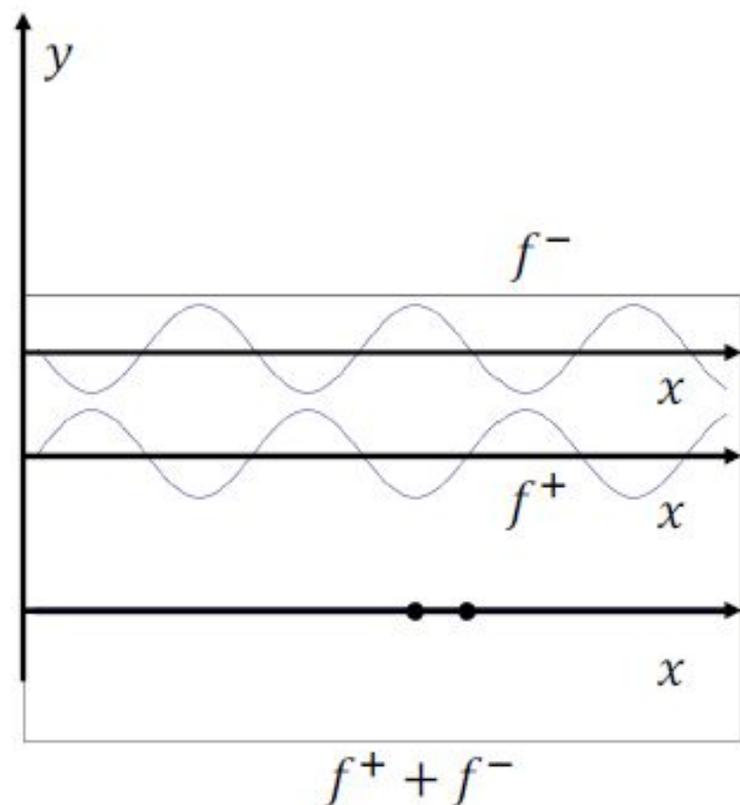
- Sumemos  $f^+ + f^-$

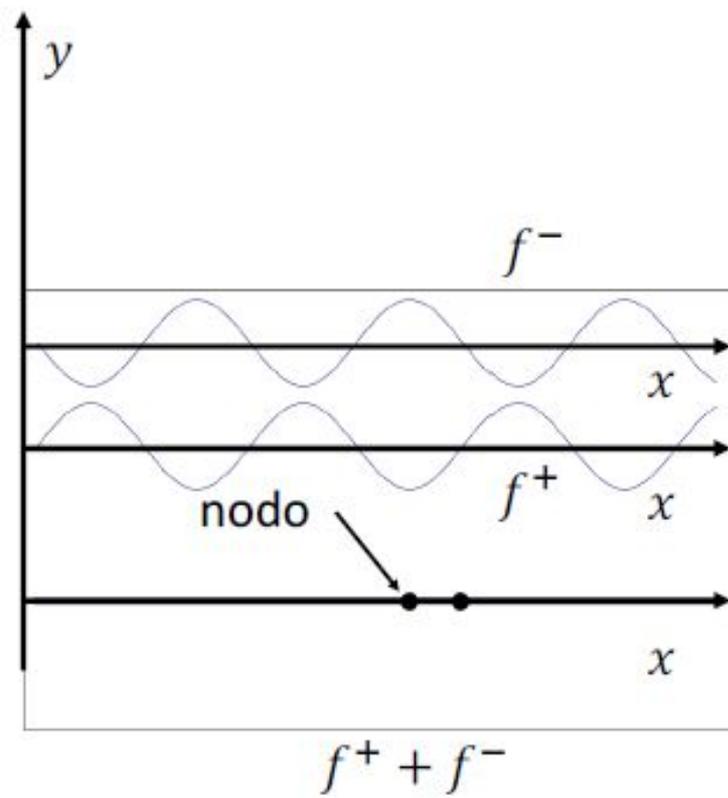
$$\begin{aligned}
 &A(\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)) = \\
 &A(\sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \\
 &+ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t) =
 \end{aligned}$$

- El resultado da una onda estacionaria

$$f^+ + f^- = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Parte espacial    Parte temporal





- Los nodos son los lugares donde la onda siempre es cero.
- Estos son los valores de  $x_n$  tales que:

$$\sin kx_n = 0$$

- Esto equivale a que para un  $n$  natural o cero

$$kx_n = n\pi$$

- O bien

$$x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}$$

**Condiciones de contorno**



Reflexión

Una onda sinusoidal en  
una cuerda de largo  $L$  con  
condiciones de contorno  
en los extremos tendrá  
soluciones

# **ONDAS ESTACIONARIAS**

La pregunta deja de ser por el **origen** de la onda y se transforma en una pregunta por **cómo oscila** (modos)

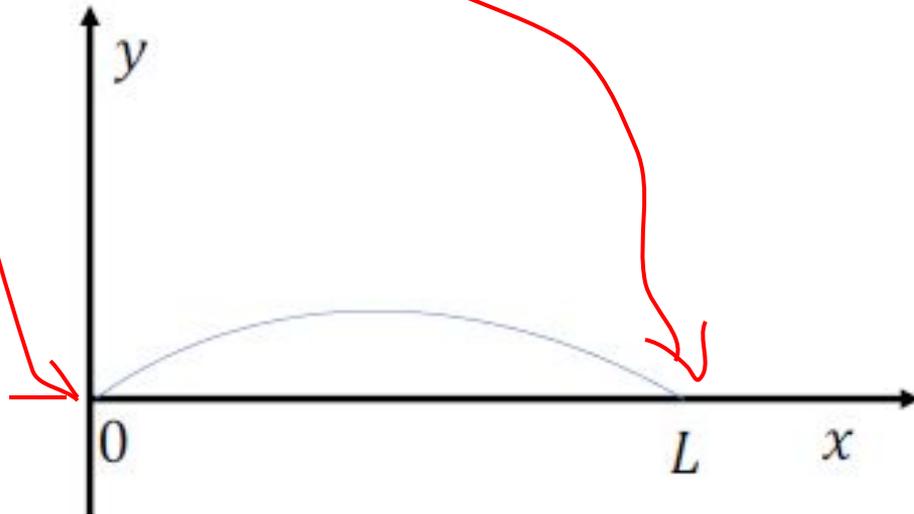
**Caso 1: Cuerda de largo  $L$   
con extremos fijos**

- Las **condiciones de contorno** son:

**Condición 1:**  $y(0, t) = 0$

**Condición 2:**  $y(L, t) = 0$

- Estas condiciones van a hacer que la solución estacionaria tenga **nodos en lugares bien específicos.**



- Tomemos una solución de tipo estacionaria:

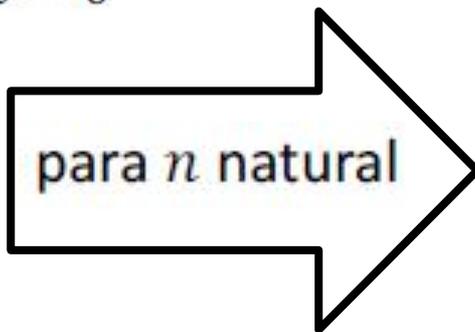
$$y_n(x, t) = A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

- La condición 1 se satisface automáticamente pues:

$$y_n(0, t) = A_n \sin k_n 0 \cos \omega_n t = 0$$

- La condición 2 pide que:

$$\sin k_n L = 0$$



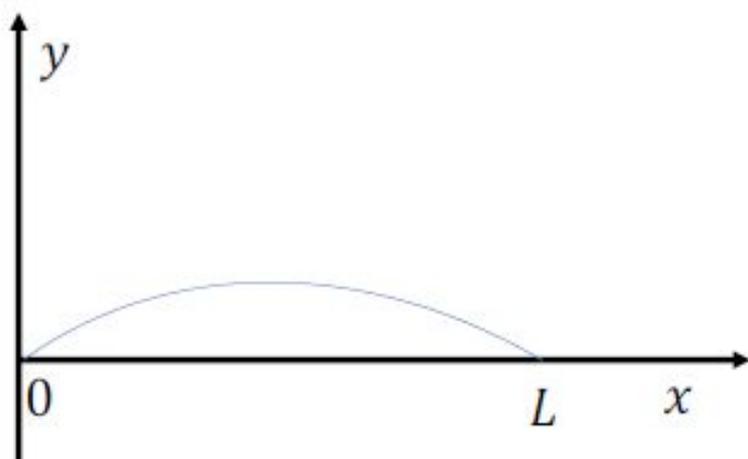
luego

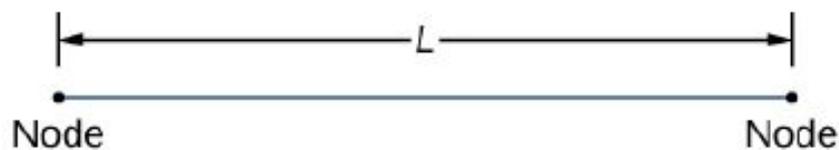
o

$$k_n L = n\pi$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$





Modo fundamental o primer armónico  $n = 1$    $\frac{1}{2}\lambda_1 = L$   $\lambda_1 = \frac{2}{1}L$

segundo armónico  $n = 2$    $\lambda_2 = L$   $\lambda_2 = \frac{2}{2}L$

tercer armónico  $n = 3$    $\frac{3}{2}\lambda_3 = L$   $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$

cuarto armónico  $n = 4$    $\frac{4}{2}\lambda_4 = L$   $\lambda_4 = \frac{2}{4}L$

Estos son los modos naturales de oscilación de una cuerda de largo L

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Todas son soluciones  $\Rightarrow$  la solución general es:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

Suma de las soluciones  
para cada valor de  $n$

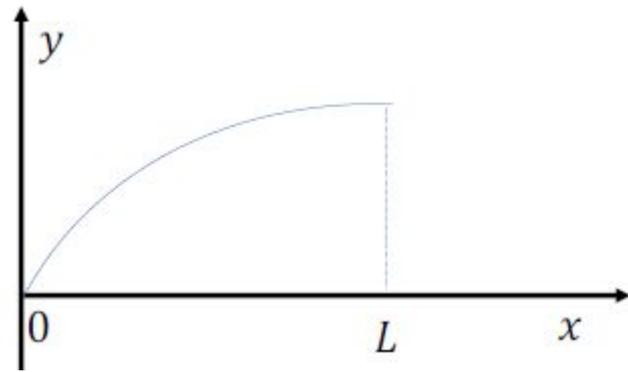
donde  $k_n = \frac{n\pi}{L}$  y  $\omega_n = vk_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{n\pi}{L}$

## **Caso 2: Cuerda de largo L con 1 extremos fijo y otro libre**

- Las condiciones de contorno son:

Condición 1:  $y(0, t) = 0$

Condición 2:  $\frac{dy}{dx}(L, t) = 0$



- Tomemos una nuevamente una solución de tipo estacionaria:

$$y_n(x, t) = A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

- La condición 1 se satisface automáticamente pues:

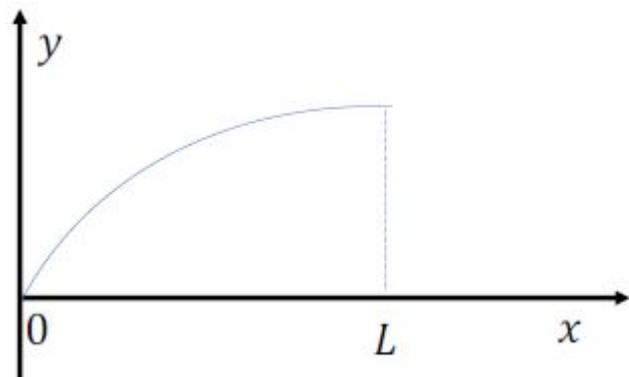
$$y_n(0, t) = A_n \sin k_n 0 \cos \omega_n t = 0$$

- La condición 2 pide que:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = k_n A_n \cos k_n L \cos \omega_n t = 0$$

- Es decir

$$\cos k_n L = 0$$

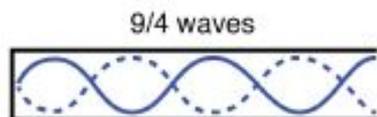
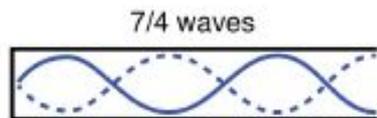
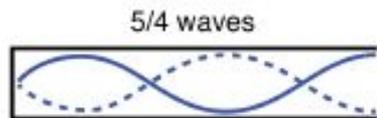
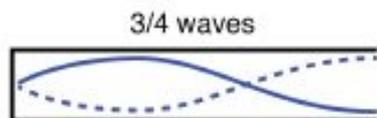
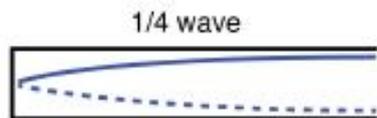


- Esto implica que, para  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

$$k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi(2n + 1)}{2}$$

luego

$$k_n = \frac{\pi(2n + 1)}{2L}$$



$n$	$\lambda_n = \frac{4L}{(2n + 1)}$
0	$\lambda_0 = 4L$
1	$\lambda_1 = \frac{4L}{3}$
2	$\lambda_2 = \frac{4L}{5}$
3	$\lambda_3 = \frac{4L}{7}$
4	$\lambda_4 = \frac{4L}{9}$



Todas son soluciones  $\Rightarrow$  la solución general es:

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

Suma de las soluciones  
para cada valor de  $n$

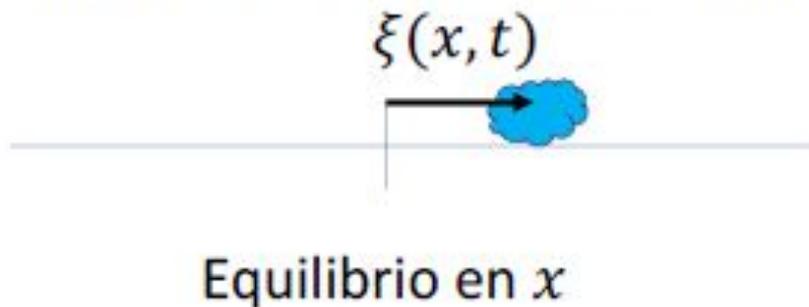
$$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L} \quad \text{y} \quad \omega_n = vk_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{\pi(2n+1)}{2L}$$

# Ondas Longitudinales

[https://www.youtube.com/watch?v=7cDAYFTXq3E&ab\\_channel=AnimationsforPhysicsandAstronomy](https://www.youtube.com/watch?v=7cDAYFTXq3E&ab_channel=AnimationsforPhysicsandAstronomy)

# Ejemplo: Ondas Sonoras

- Son ondas en las que las moléculas de aire se mueven alrededor de una posición de equilibrio. Para cada posición de equilibrio  $x$  la posición  $\xi(x, t)$  de una parcela de aire va a oscilar en el tiempo:



- Son longitudinales porque la onda se propaga en la misma dirección que la coordenada  $\xi(x, t)$

Apartamiento de la posición de equilibrio

- Entonces  $\xi(x, t)$  cumple la ecuación de onda para apartamientos pequeños:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

donde  $c_s$  es la llamada velocidad del sonido.

- Suponiendo parcelas de gas adiabáticas (en el tiempo de oscilación la parcela no alcanza a intercambiar energía con su entorno) y el gas es ideal,  $c_s$  depende de la presión del gas  $P_0$  y de su densidad  $\rho_0$ :

$$c_s^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$$

$\gamma$  es la constante adiabática del gas

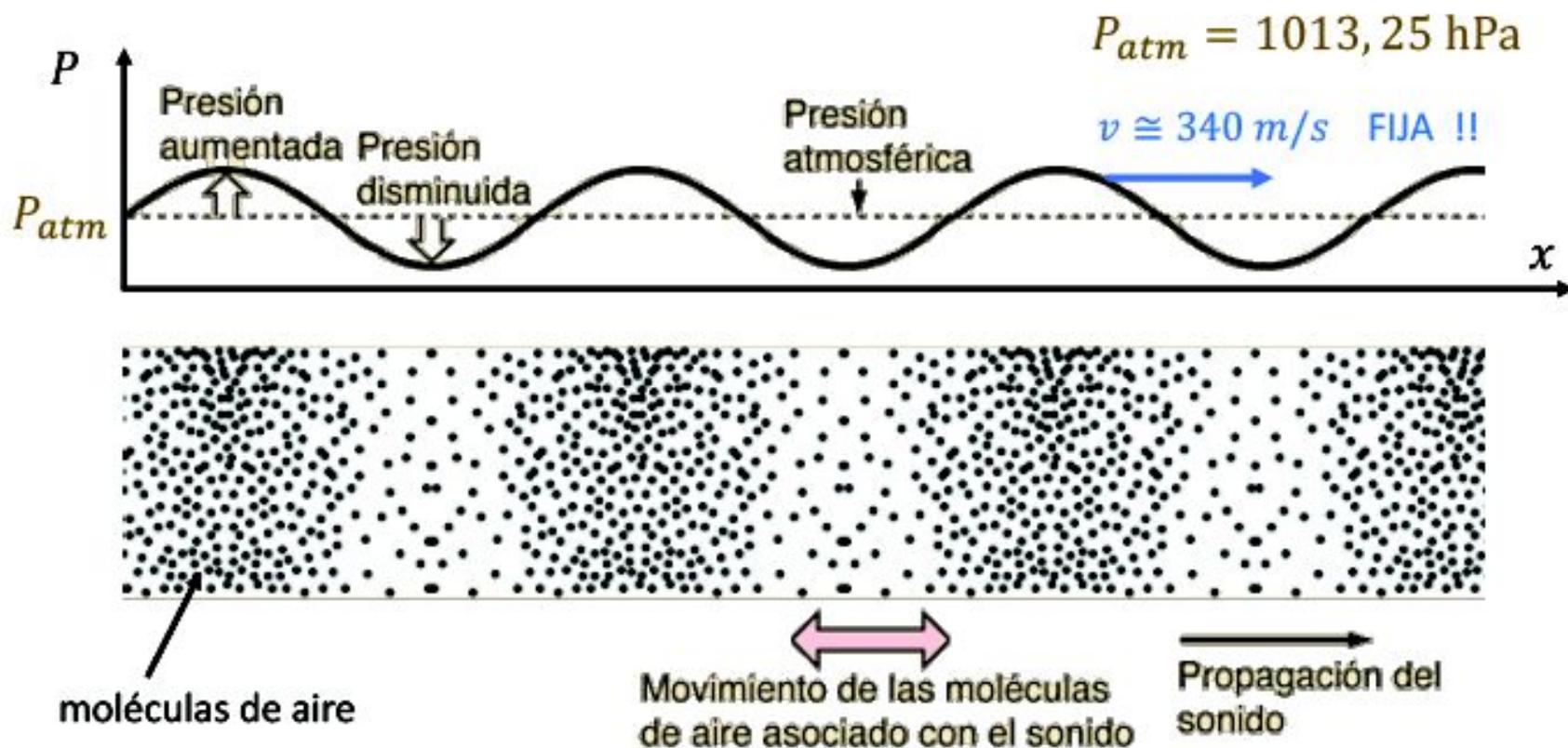
- La variación de la presión  $P - P_0 = \Delta P(x, t)$  también cumple con la ecuación de onda variación:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2}$$

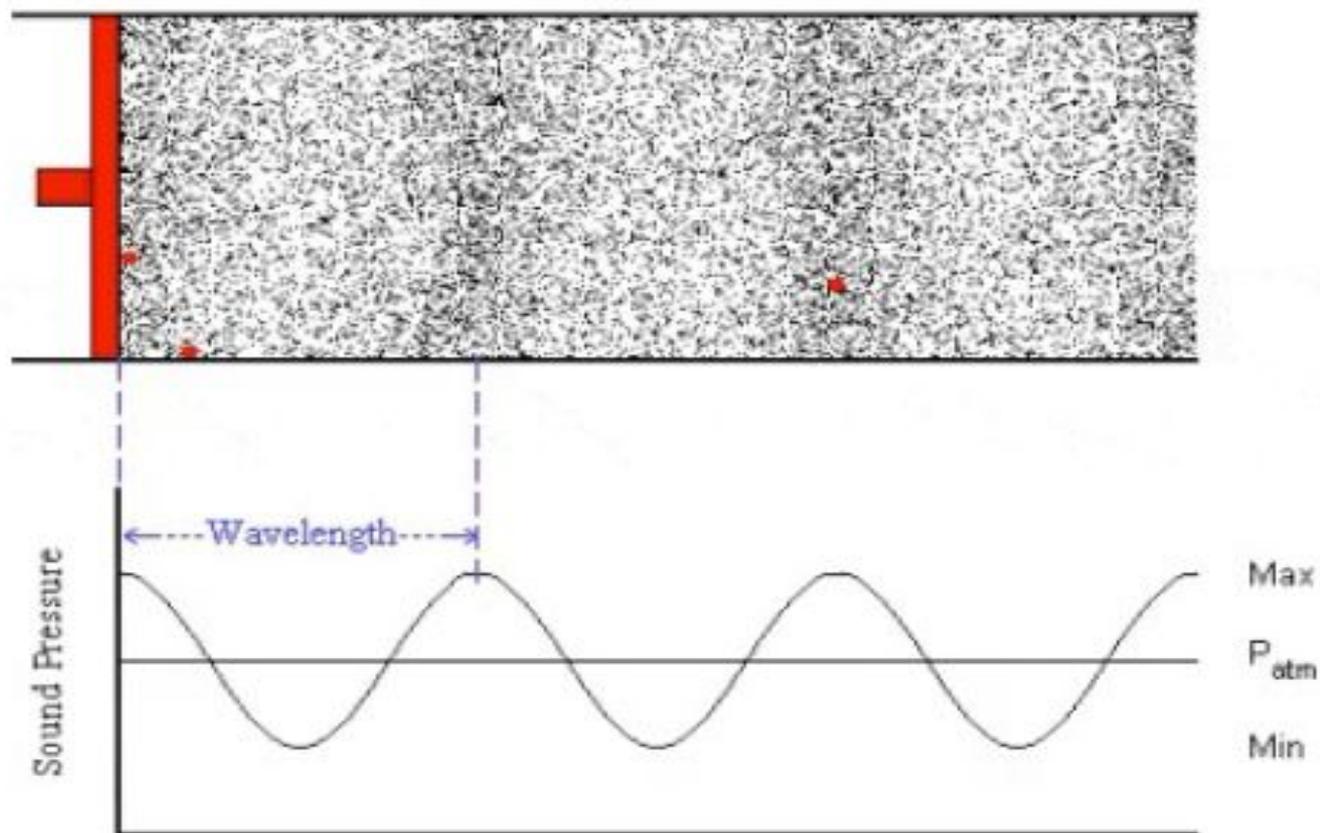
- $\Delta P$  se relaciona con  $\xi$  a través de la derivada espacial:

$$\Delta P = -\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

# Ondas sonoras en el aire (a presión ambiente)



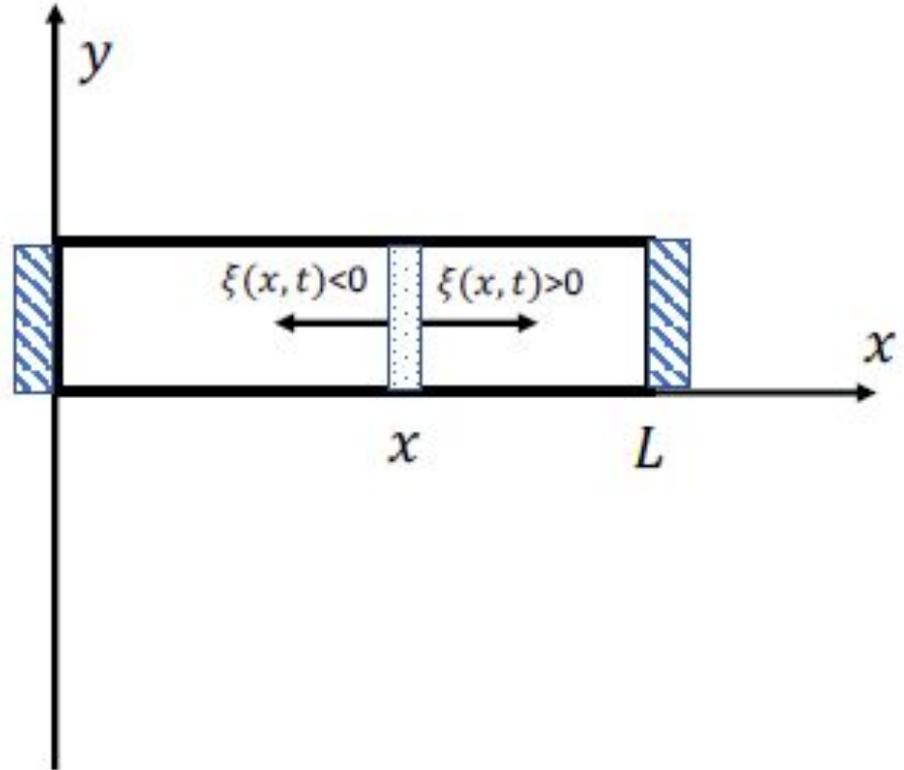
## Acoustic Longitudinal Wave



*isvr*

# Ondas Sonoras: Condiciones de Contorno

- Tomamos un recipiente con aire cerrado en ambos extremos.
- Se generan ondas sonoras viajeras a lo largo de  $x$ .
- El choque con las paredes va a generar ondas en sentido contrario generando ondas estacionarias.



- ¿Cómo se expresarán las condiciones de contorno para  $\xi(x, t)$  en el caso cerrado cerrado?

