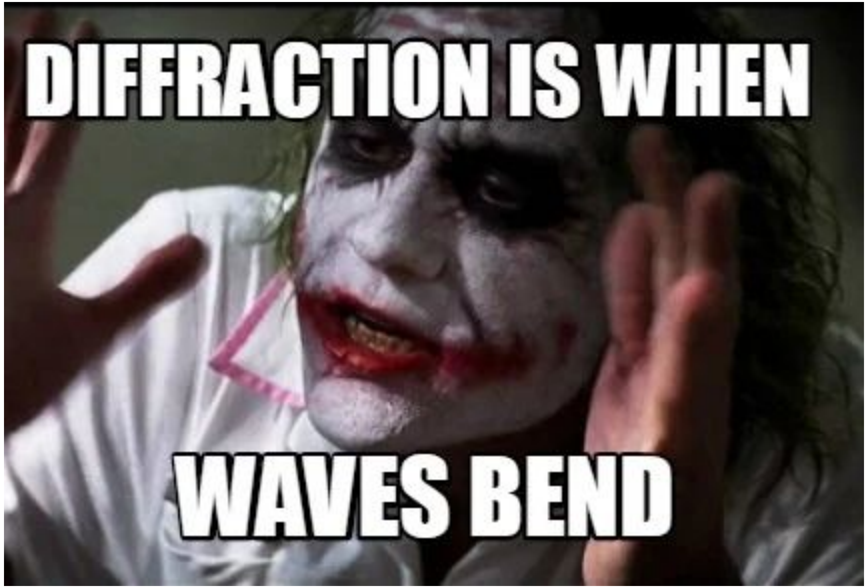
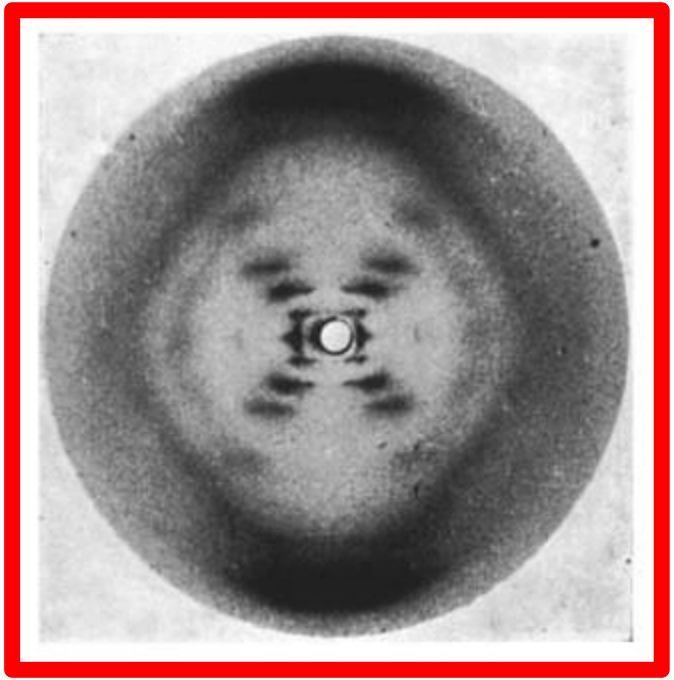
# DIFRACCIÓN




https://culturacientifica.com/2019/01/01/difraccion-de-ondas-el-principio-de-huygens/

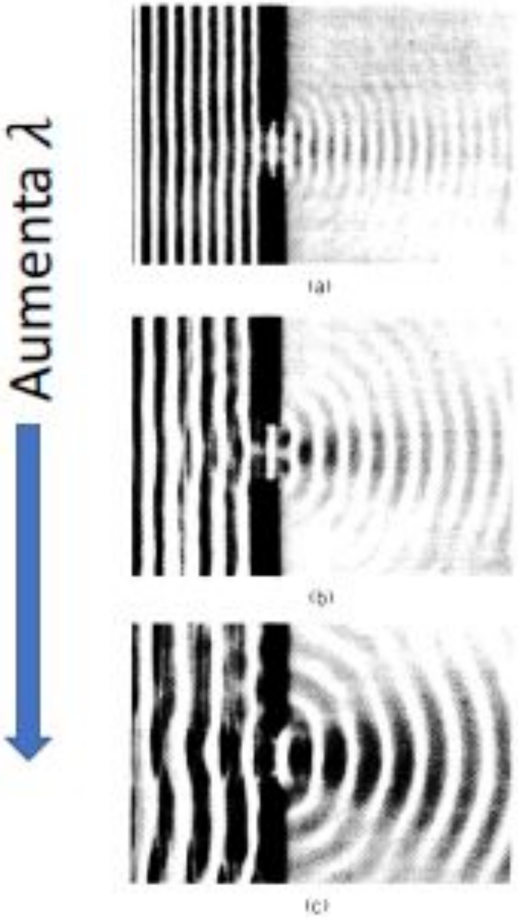


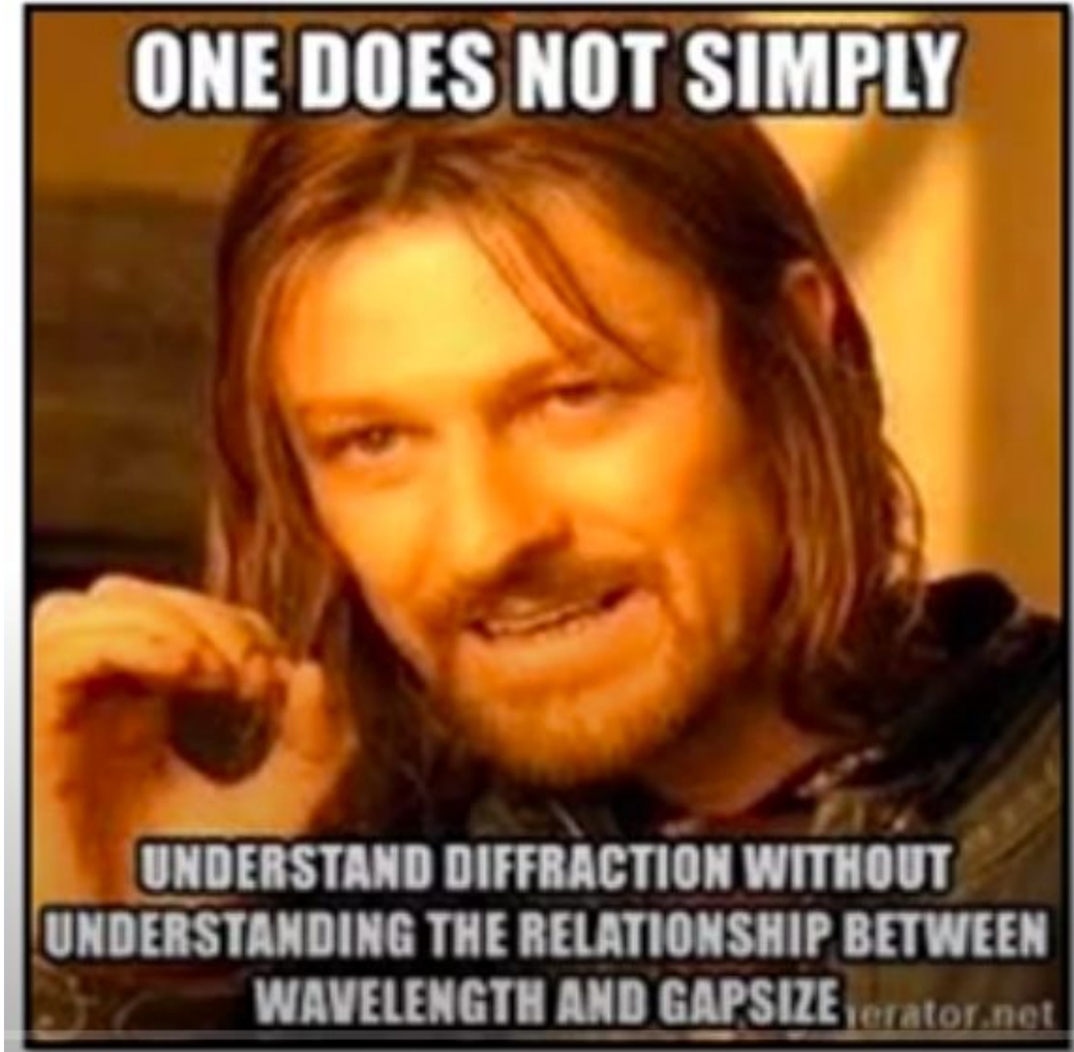
Cuando la forma cristalizada de una molécula, como el ADN, se expone a rayos X, los átomos en el cristal desvían algunos de los rayos y forman un patrón de difracción que da pistas sobre la estructura de la molécula.

- Supongamos ondas planas en la superficie de un líquido.

- Estas ondas llegan a una abertura.

- Se estudia el patrón de las ondas del otro lado de la abertura para distintos valores de longitud de onda.



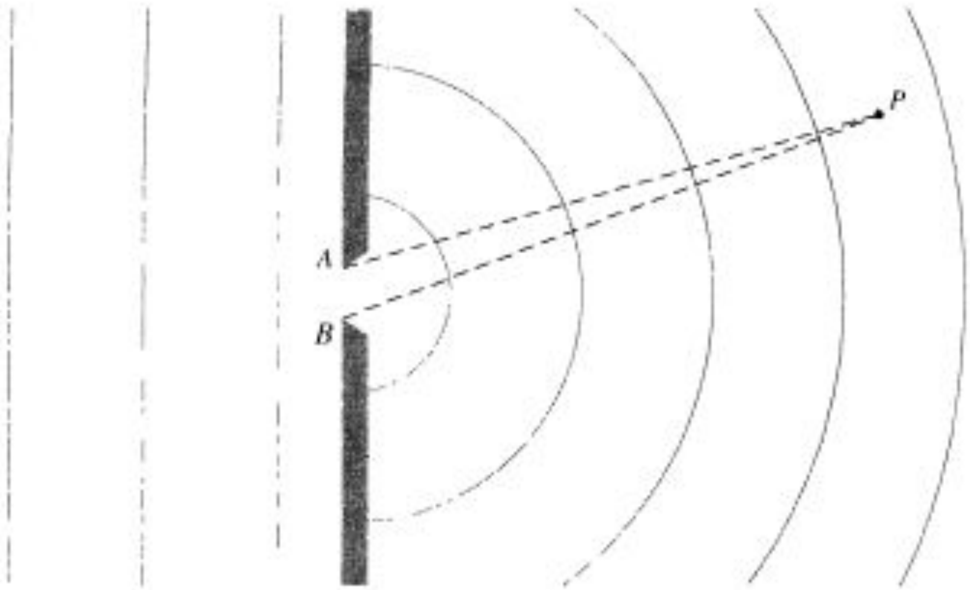

ONE DOES NOT SIMPLY
UNDERSTAND DIFFRACTION WITHOUT UNDERSTANDING THE RELATIONSHIP BETWEEN WAVELENGTH AND GAPSIZE

## ¿Cómo se relacionan el tamaño de la abertura y el camino recorrido?

- Para un punto P la maxima diferencia de camino entre dos fuentes no bloqueadas es

$$\Lambda_{\max} = |\overline{AP} - \overline{BP}|$$

- Pero $\Lambda_{max} \leq \overline{AB}$ (solo igual sobre la pantalla que tiene la abertura)

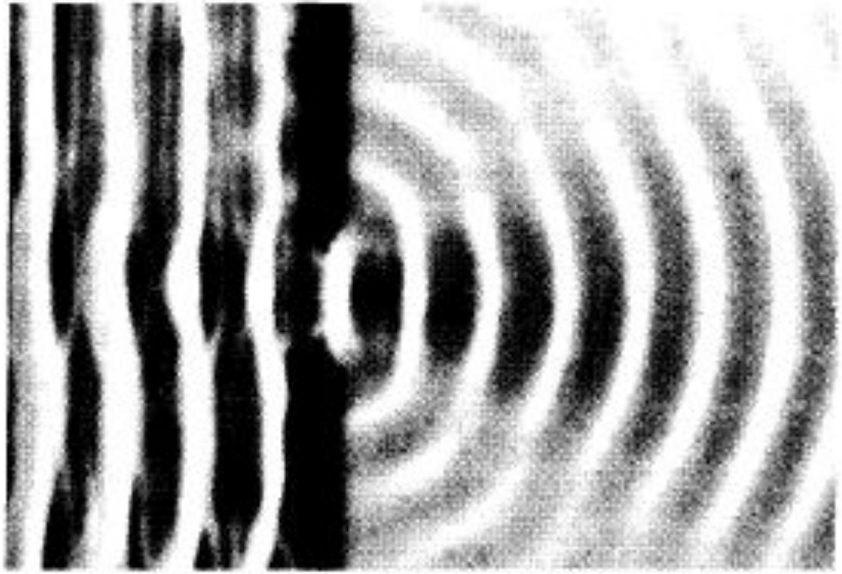



(a)

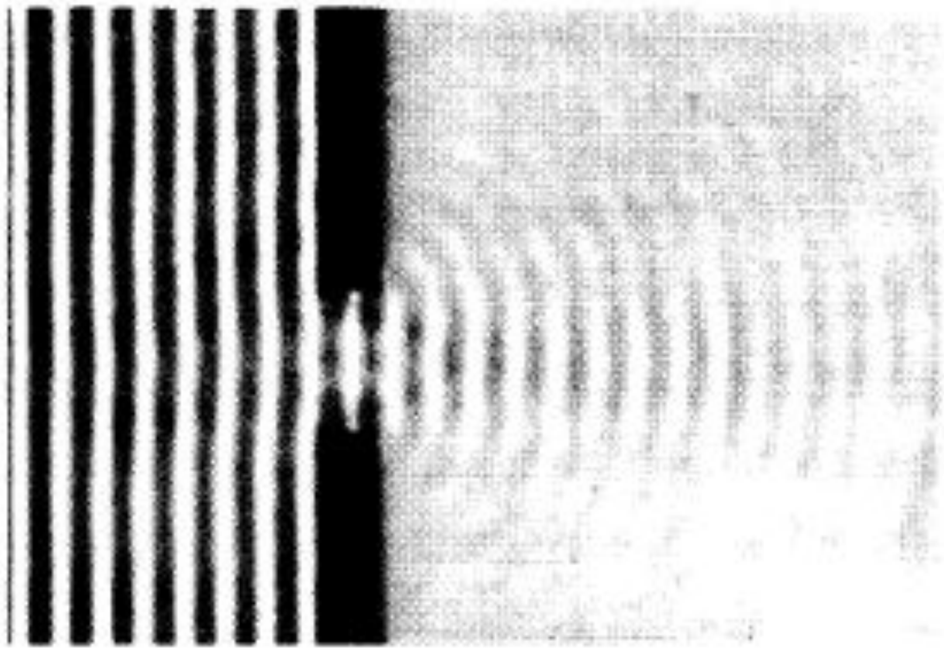
- Para $\lambda > \overline{AB}$ entonces:

$$\lambda > \Lambda_{max}$$

- Entonces las ondas interfieren constructivamente en casi todo el espacio delante de la abertura.
- Las ondas van a esparcirse a grandes ángulos dentro de la región más alla de la obstrucción.
- Cuanto mas chica la apertura, más circular va a ser el frente de onda

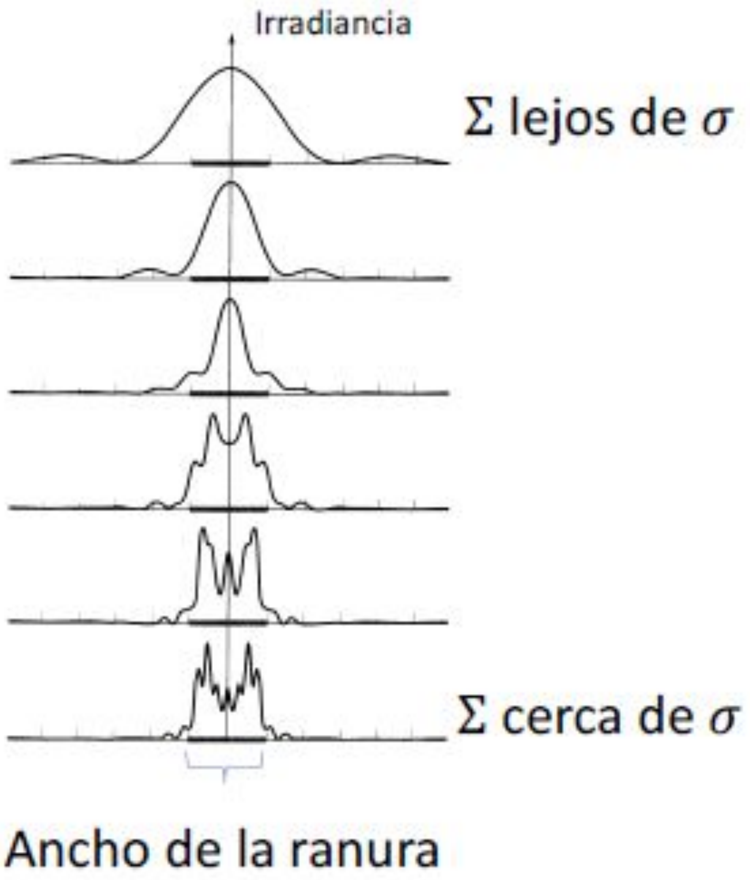


- Para $\lambda < \overline{AB}$ entonces la región donde $\lambda > \Lambda_{max}$ es muy pequeña y se extiende justo enfrente de la abertura.
- Enfrente de la abertura las ondas interfieren constructivamente
- A ambos lados de la zona de interferencia constructiva, la interferencia se vuelve destructiva y empieza a formarse la sombra.



# Difracción de Fresnel

- Experimento: Supongamos ondas planas provenientes de fuente puntual lejana.
- Supongamos que colocamos una pantalla con una ranura $\sigma$ y detrás de ella una pantalla $\Sigma$.
- Veremos que la imagen va variando a medida que llevamos $\Sigma$ desde una posición cercana a $\sigma$ a una muy distante.



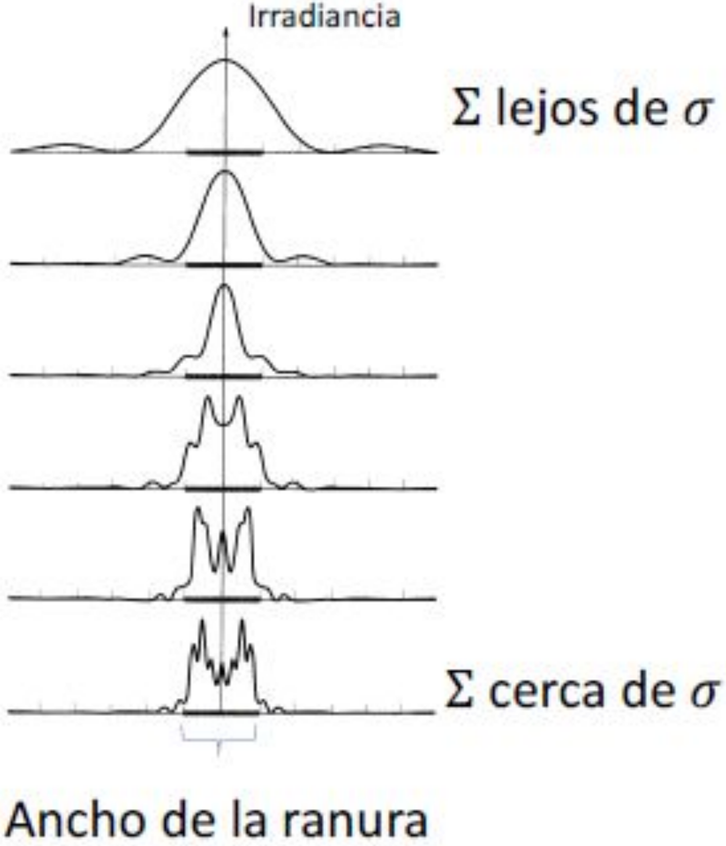

Patrón obtenido de campo cercano

# Para fijar ideas ayuda esta definición:

**Difracción de Fresnel:** Es la imagen de difracción que se observa sobre la pantalla cuando la distancia entre ella y la abertura es pequeña. El abordaje matemático de este fenómeno requiere herramientas bastante especiales que no manejamos en este curso. Sin embargo, algunos tratamientos elementales existen para el caso de aberturas circulares observadas desde el punto central de la imagen de difracción. Nosotros no abordaremos esta resolución.

# Difracción de Fraunhofer

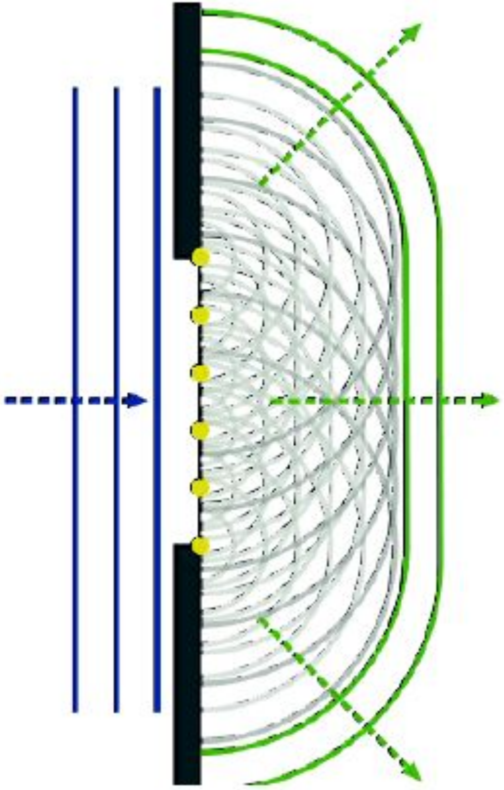
- En el caso de abajo, las ondas provenientes de la abertura pueden ser consideradas esféricas.
- Estas interfieren para producir la difracción de campo cercano o de Fresnel
- A grandes distancias de la ranura, el patrón es el producido por ondas planas.
- Esta es la difracción de campo lejano o de **Fraunhofer**.



**Difracción de Fraunhofer:** Este es el caso en que la pantalla se encuentra muy lejos de la abertura (formalmente en el infinito). Naturalmente, no sería posible la observación de la imagen en tal pantalla reconociendo la baja intensidad de la luz que la alcanzaría. Este escollo puede resolverse experimentalmente colocando una lente convergente entre la abertura y la pantalla. Luego, la imagen puede observarse con la pantalla situada en el foco imagen de la lente.

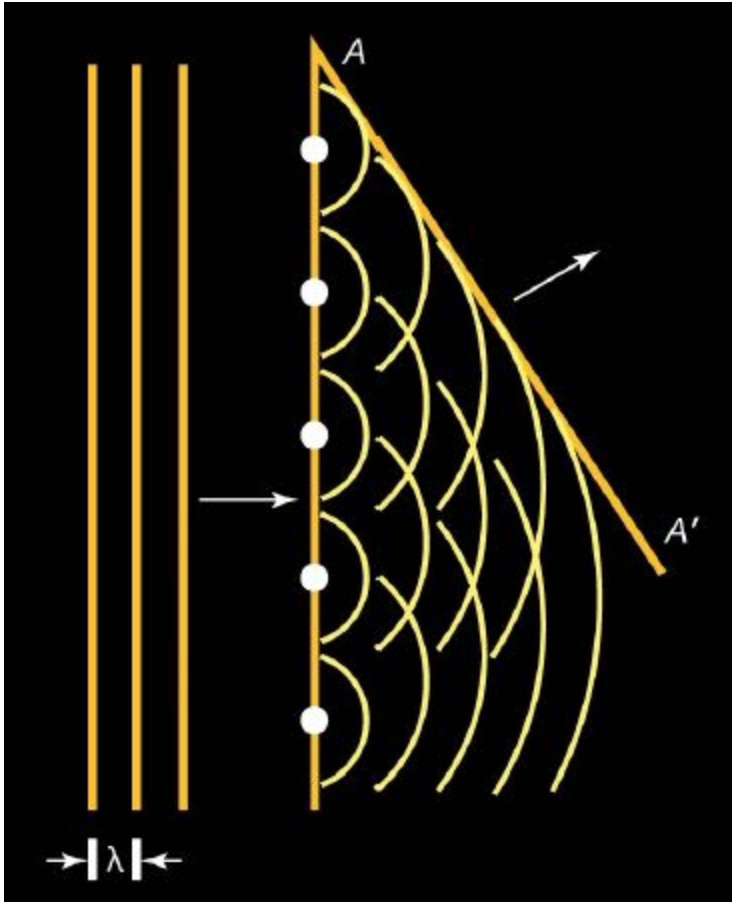
# Principio de Huygens-Fresnel

- Todo punto no obstruido de un frente de onda, a un instante dado, puede ser visto como una fuente de ondas secundarias esféricas.
- Estas ondas secundarias tienen la misma frecuencia que la onda primaria.
- La amplitud del campo óptico en cualquier punto más allá de la obstrucción es la superposición de los campos de todas estas ondas considerando sus amplitudes y fases relativas.



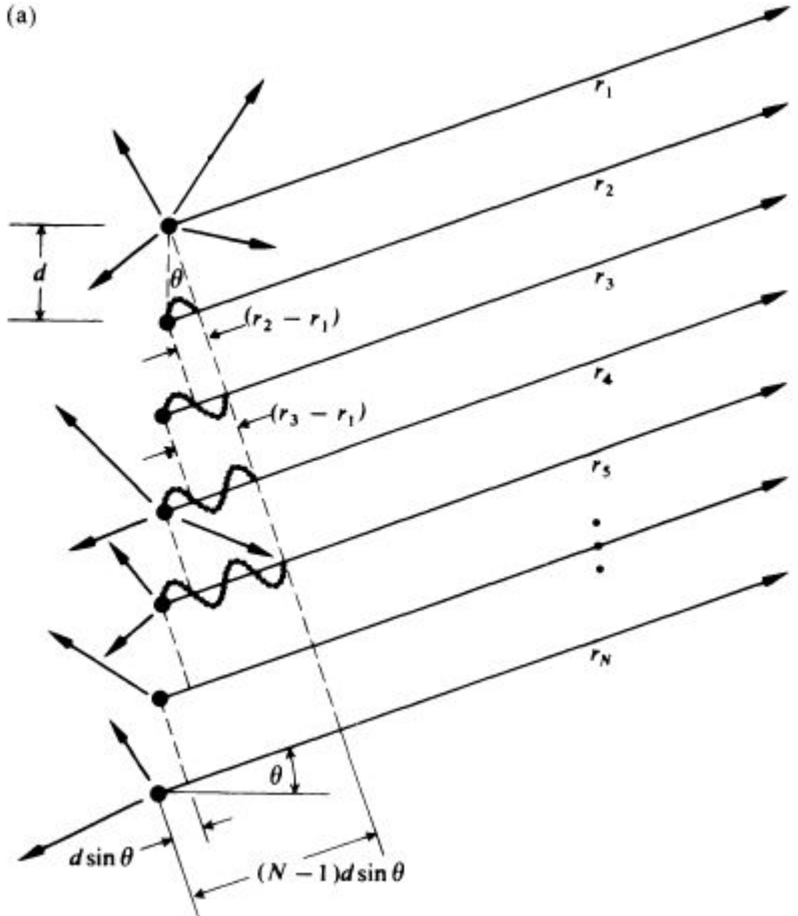
# Hipótesis: fuentes coherentes

- Supongamos ahora que las ondas provenientes de una abertura en forma de ranura pueden pensarse como provenientes de una serie de $N$ osciladores en fase dispuestos a lo largo de una línea separados por una distancia $d$.
- Supongamos que estudiamos la suma de los campos de cada fuente superpuestos en un punto $P$ muy lejos



- Si la extensión espacial de la serie de fuentes $(N-1)d$ es pequeña en comparación a la distancia a $P$, podemos suponer que la amplitud de los campos de cada una de ellas es la misma ya que habrán viajado prácticamente la misma distancia

$$E_0(r_1) = E_0(r_2) = \cdots = E_0(r_N) = E_0(r)$$



Volviendo a los números complejos para que nos simplifiquen la vida ⇒ **Escribimos la onda (E) como una suma de sen y cos**

$$E_0(r)\ \cos(kr - \omega t) = \boxed{Re\{E_0(r)e^{i(kr-\omega t)}\}} = Re\{E_0(r)e^{ikr}e^{-i\omega t}\}$$

# Ahora empezamos con las cuentas………

# La expresión de N fuentes coherentes

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{i(kr_1 - \omega t)} + E_0(r)e^{i(kr_2 - \omega t)} + \cdots + E_0(r)e^{i(kr_N - \omega t)}$$

N fuentes

Sacamos factor común $E_0$:

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1}$$
$$\times [1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \cdots + e^{ik(r_N - r_1)}]$$

- Como vimos en Young, la diferencia de fase entre dos fuentes separadas una distancia $d$ para distancias grandes es:

$$\delta = kd \sin\theta$$

- De ahí que:

$$\delta = k(r_2 - r_1),\ 2\delta = k(r_3 - r_1),\ \text{y así sucesivamente}$$

- Entonces

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} \times [1 + (e^{i\delta}) + (e^{i\delta})^2 + (e^{i\delta})^3 + \cdots + (e^{i\delta})^{N-1}]$$

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1}$$

$$\times\left[1 + (e^{i\delta}) + (e^{i\delta})^2 + (e^{i\delta})^3 + \cdots + (e^{i\delta})^{N-1}\right]$$

converge a

$$(e^{i\delta N}-1)/(e^{i\delta}-1)$$

- Sacando factor común $e^{iN\delta/2}$ en el numerador y $e^{i\delta/2}$ en el denominador llegamos a la expresión equivalente:

conjugados

$$\frac{e^{iN\delta/2}\left[e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2}\right]}{e^{i\delta/2}\left[e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}\right]}$$

conjugados

$$\boxed{Z - Z^* = 2i\, Im(Z)}$$

$$\frac{e^{iN\delta/2}[e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2}]}{e^{i\delta/2}[e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}]} = e^{i(N-1)\delta/2}\left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2}\right)$$

- Entonces el campo total en P queda:

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{-i\omega t}\, e^{i[kr_1 + (N-1)\delta/2]}\left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2}\right)$$

- Si $R$ es la distancia desde el centro del arreglo de fuentes hasta $P$, este centro va a estar a una distancia $(N-1)d/2$ de la primera, es decir:

$$R = \tfrac{1}{2}(N - 1)d \sin\theta + r_1$$

- Entonces podemos reescribir el campo en función de $R$ como

$$\boxed{\tilde{E} = E_0(r)e^{i(kR-\omega t)}\left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2}\right)}$$

- Una vez obtenido el campo eléctrico, calculemos la irradiancia $I$.

- Como es proporcional a $\frac{|\vec{E}|^2}{2}$ esto en complejos equivale a plantear:

$$\frac{|\vec{E}|^2}{2} = \frac{\tilde{E}\tilde{E}^*}{2}$$

*quiere decir conjugado

- Entonces llegamos a:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$$

Donde $I_0$ es el flujo de una fuente

- Reemplazando $\delta$:

$$I = I_0 \, \frac{\sin^2[N(kd/2)\sin\,\theta]}{\sin^2[(kd/2)\sin\,\theta]}$$

Fluctuaciones rápidas (aparece N)

Fluctuaciones lentas

- La combinación da lugar a una serie de picos principales separados por una serie de máximos secundarios, en función de $\theta$