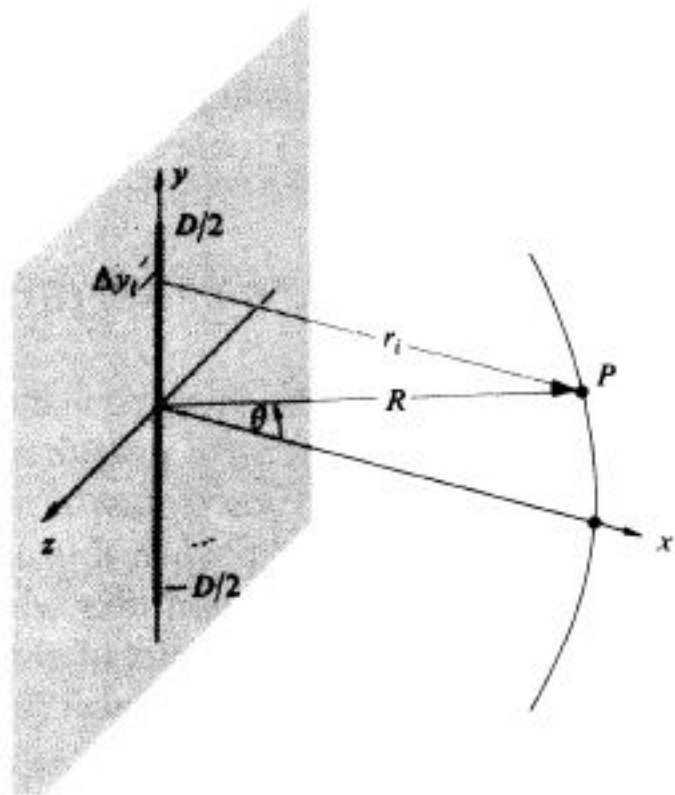


Aproximación: Línea continua de fuentes coherentes

- Supongamos ahora un continuo de fuentes en un segmento de largo D .
- Cada punto emite una onda esférica:

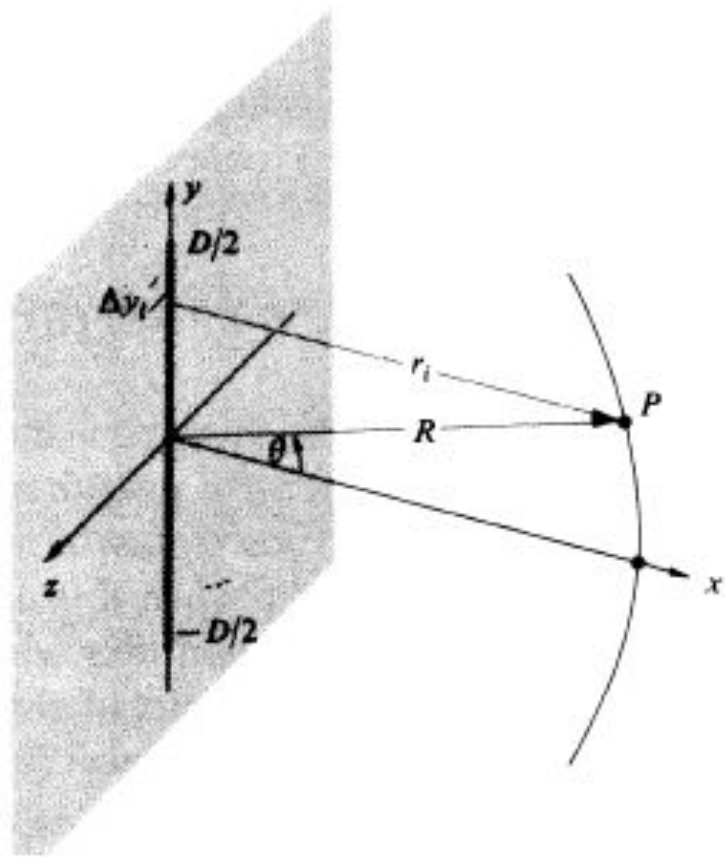
$$E = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r} \right) \sin(\omega t - kr)$$

- Supongamos que la densidad de fuentes por unidad de distancia es $\frac{N}{D}$ con N grande.



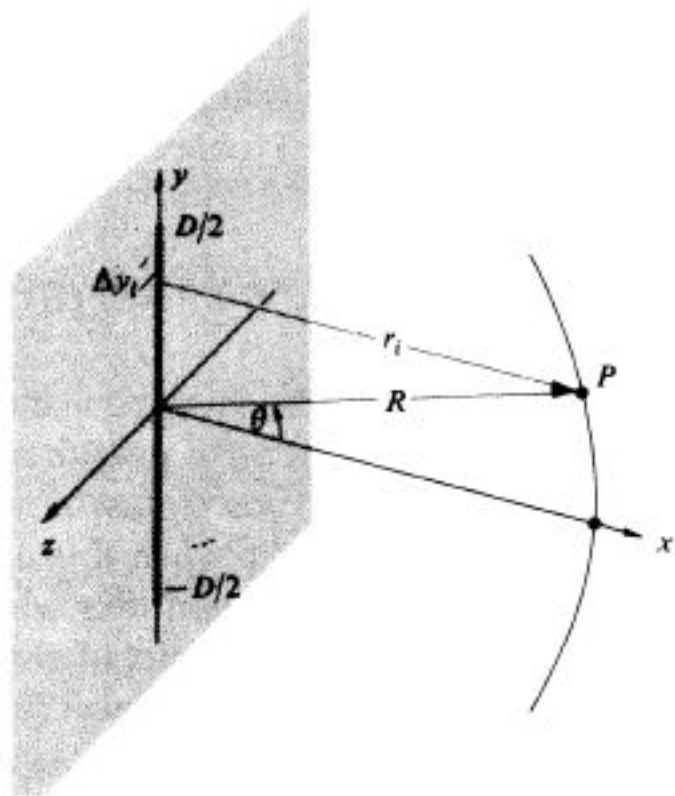
- Dividamos el segmento en M tramos de largo Δy en fase
- Cada segmento de largo Δy tendrá $\frac{N}{D} \Delta y$ fuentes
- La contribución del i -ésimo segmento Δy al campo eléctrico en el punto P es:

$$E_i = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r_i} \right) \sin(\omega t - kr_i) \left(\frac{N \Delta y_i}{D} \right)$$



- Ahora para pasar una distribución continua de fuentes tenemos que tender N a infinito y achicar ε_0 (la amplitud del campo eléctrico de cada fuente) de manera de tener un campo finito en P .
- Definimos la intensidad de la

$$\mathcal{E}_L \equiv \frac{1}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} (\varepsilon_0 N)$$



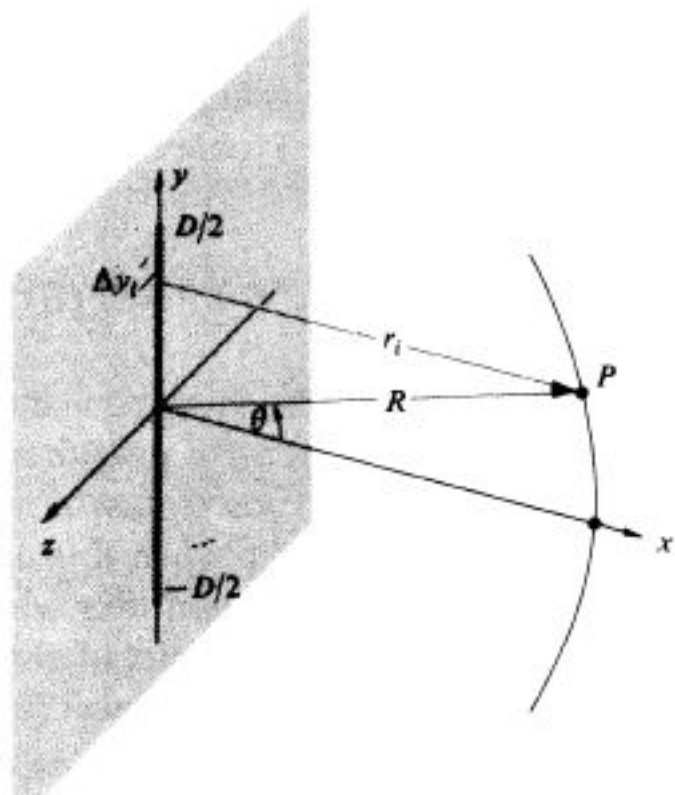
- Entonces, la suma de las contribuciones de los M segmentos de largo Δy_i queda:

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{\mathcal{E}_L}{r_i} \sin(\omega t - kr_i) \Delta y_i$$

- En el límite $\lim_{\Delta y \rightarrow 0}$ tenemos el campo en P integrando a lo largo del ancho D .

$$E = \mathcal{E}_L \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} dy$$

Con $r = r(y)$



- Tomemos ahora el resultado anterior pero imaginemos que la distancia al punto de observación es muchísimo mayor al del largo de la línea:

$$R \gg D$$

- Esto hace que la distancia de cada dy hasta P (r) no varíe mucho con y .
- Es más, r no va a diferir de la distancia a P medida desde el centro de la línea, R .

- Entonces, la amplitud de la contribución del campo de cada dy también será la misma:

$$dE = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \sin(\omega t - kr) dy$$

- Ahora, para aproximar r dentro de la fase hay que tener más cuidado.

Aproximación de Fraunhofer

- Haciendo el mismo planteo que para Young, tenemos que

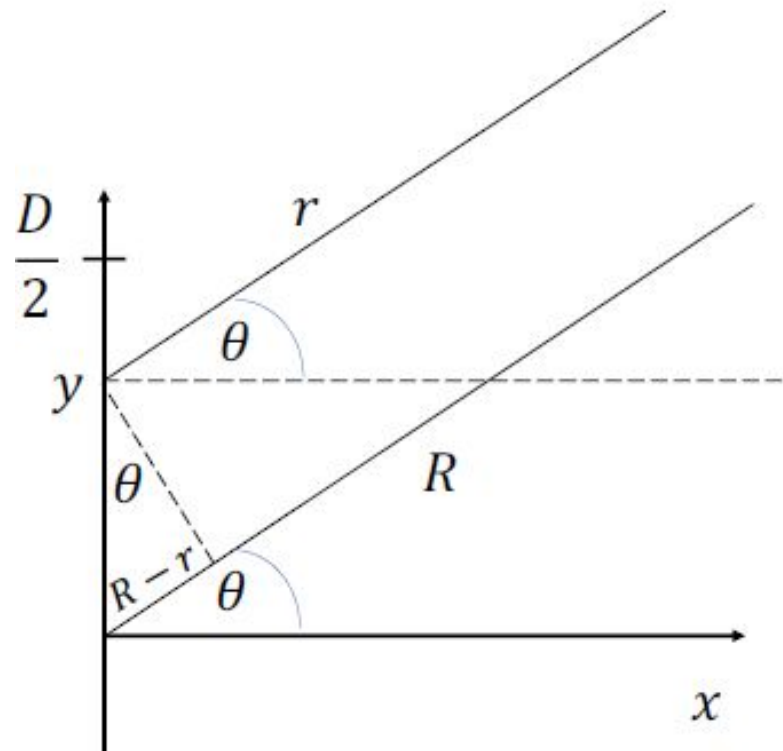
$$R - r \cong y \sin \theta$$

- Lo cual implica

$$r \cong R - y \sin \theta$$

- Entonces, en la aproximación de Fraunhofer:

$$E = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \int_{-D/2}^{+D/2} \sin [\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy$$



Recordando que: $\sin(\omega t - kR + ky \sin \theta) = \sin(\omega t - kR) \cos(ky \sin \theta) + \cos(\omega t - kR) \sin(ky \sin \theta)$

$$E = \frac{\epsilon_L}{R} \left[\int_{-D/2}^{D/2} \sin(\omega t - kR) \cdot \cos(ky \sin \theta) dy + \int_{-D/2}^{D/2} \cos(\omega t - kR) \sin(ky \sin \theta) dy \right]$$

$$E = \frac{\epsilon_L}{R} \left[\sin(\omega t - kR) \cdot \int_{-D/2}^{D/2} \cos(ky \sin \theta) dy + \cos(\omega t - kR) \int_{-D/2}^{D/2} \sin(ky \sin \theta) dy \right]$$

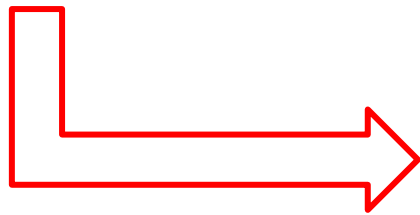
$$E = \frac{\epsilon_L}{R} \left[\frac{\sin(\omega t - kR)}{k \sin(\theta)} \sin(ky \sin \theta) \Big|_{-D/2}^{D/2} + \frac{\cos(\omega t - kR)}{k \sin(\theta)} \cos(ky \sin \theta) \Big|_{-D/2}^{D/2} \right] = \frac{\epsilon_L}{R} (A + B)$$

$$A = \frac{\sin(\omega t - kR)}{k \sin(\theta)} \left[\sin\left(\frac{k D \sin \theta}{2}\right) - \sin\left(-\frac{k D \sin \theta}{2}\right) \right] = \frac{\sin(\omega t - kR)}{k \sin(\theta)} \left[2 \sin\left(\frac{k D \sin \theta}{2}\right) \right]$$

$\sin(\theta) = -\sin(-\theta)$

$$B = \frac{\cos(\omega t - kR)}{k \sin(\theta)} \left[\cos\left(\frac{k D \sin \theta}{2}\right) - \cos\left(-\frac{k D \sin \theta}{2}\right) \right] = 0$$

Reemplazo estos dos resultados en la expresión anterior y multiplico y divido por D



$$E = \frac{D \cdot \epsilon_L}{DR} \left[\frac{\sin(\omega t - kR)}{k \sin(\theta)} 2 \sin\left(\frac{k D \sin \theta}{2}\right) \right] =$$

- Resultando

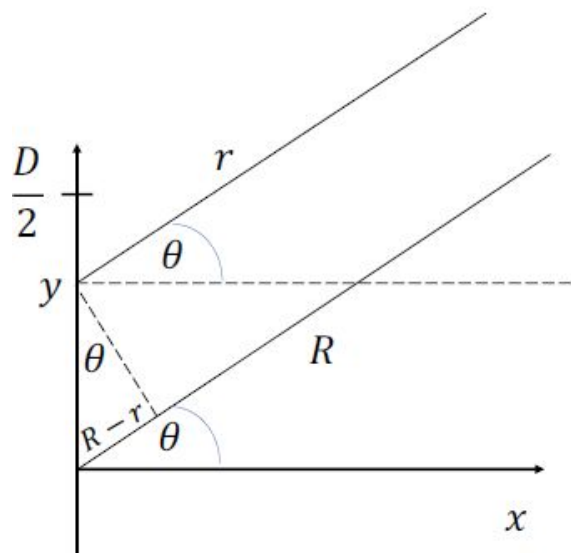
$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \frac{\sin[(kD/2) \sin \theta]}{(kD/2) \sin \theta} \sin(\omega t - kR)$$

- Si hacemos

$$\beta \equiv (kD/2) \sin \theta$$

- Tenemos

$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR)$$



- La irradiancia entonces, es proporcional al promedio temporal del cuadrado del campo electrico

$$I(\theta) = \langle |E|^2 \rangle$$

- Como $\langle |\sin(\omega t - kR)|^2 \rangle = 1/2$ obtenemos:

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

Recordemos que β depende de Θ entonces uno puede preguntarse cómo varía $I(\Theta)$:

$$\beta \equiv (kD/2) \sin \theta$$

- Tenemos un máximo en $\beta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$
$$I(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_L D}{R} \right)^2$$

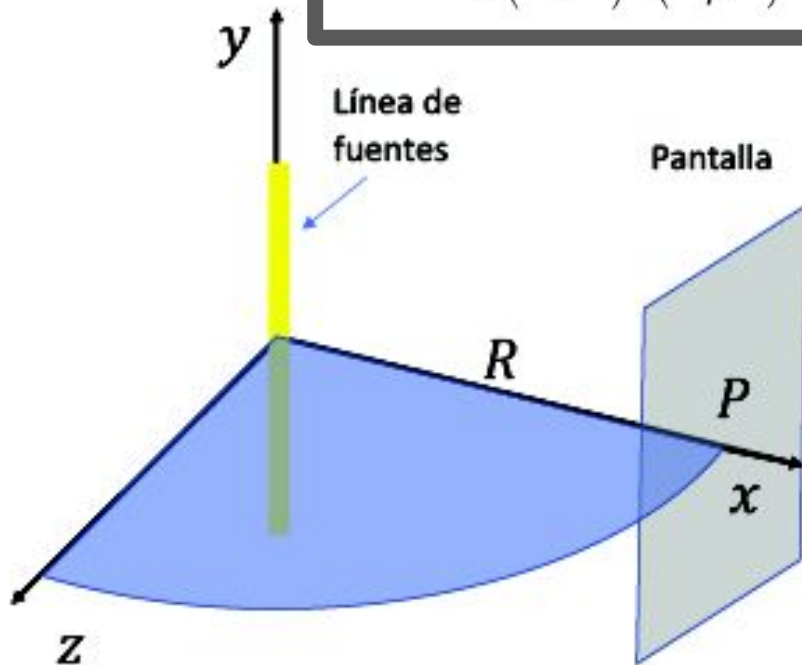
$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

- Tendremos mínimos $I(\theta_{min}) = 0$ en $\beta = \pm n\pi$ para $n = 1, 2, 3, 4 \dots$
- Esto implica

$$\sin \theta_{min} = \pm \frac{2n\pi}{kD} = \pm \frac{n\lambda}{D}$$

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

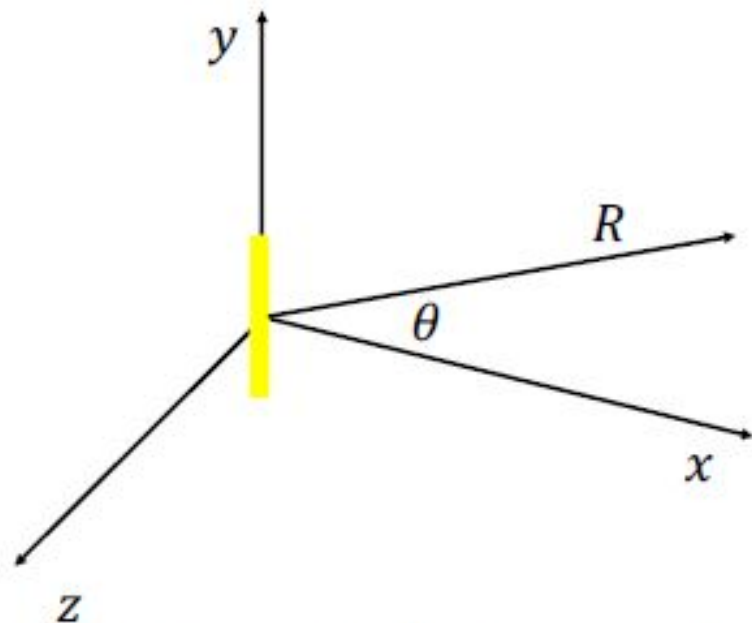
- Notemos que cuando $D \gg \lambda$ entonces la irradiancia decae muy rápido con θ por culpa de β en el denominador
- Esto se ve para valores de $D \approx 1\text{cm}$ para luz visible
- En cuanto a la fase, es como si toda la línea fuera una fuente puntual situada en el centro de la línea a una distancia R de P
- Es como si irradiara una onda circular en el plano $\theta = 0$ (perpendicular a la línea)



Para $D \gg \lambda$ la emisión se da en el plano xz

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

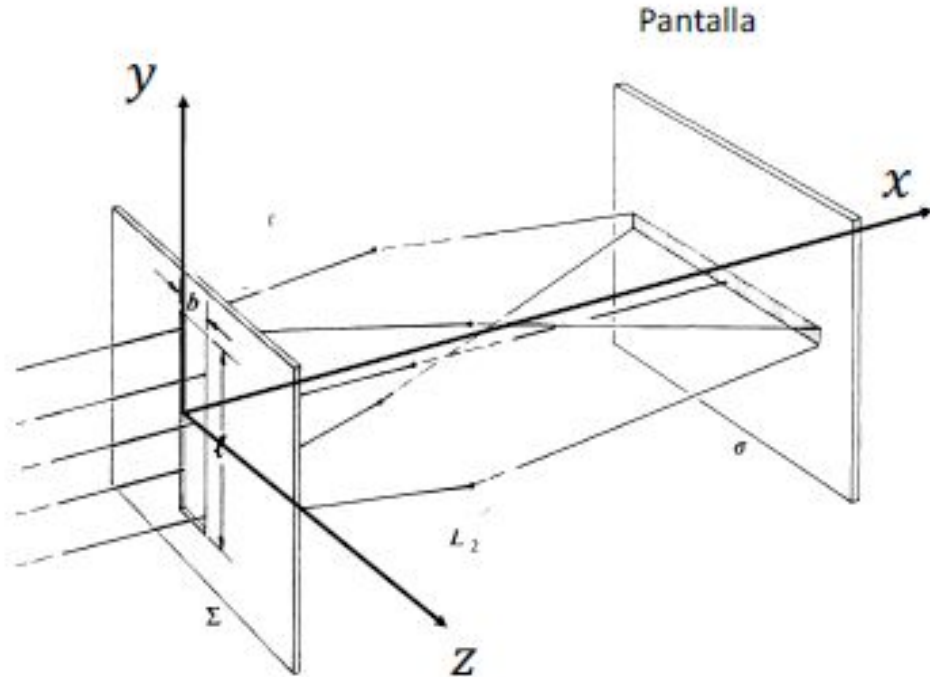
- Si, por el contrario $\lambda \gg D$ entonces β es pequeño y luego:
$$\beta \cong \sin \beta$$
- Entonces:
$$I(\theta) = I(0)$$
- Entonces la irradiancia es constante para todo θ y entonces la línea parece una fuente puntual en el centro emitiendo ondas esféricas



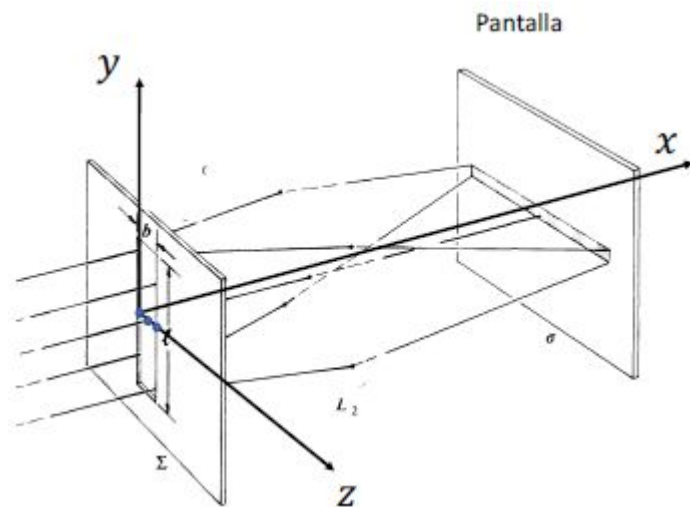
Para $\lambda \gg D$ la irradiancia es la misma para todo θ

Difracción de Fraunhofer por una rendija

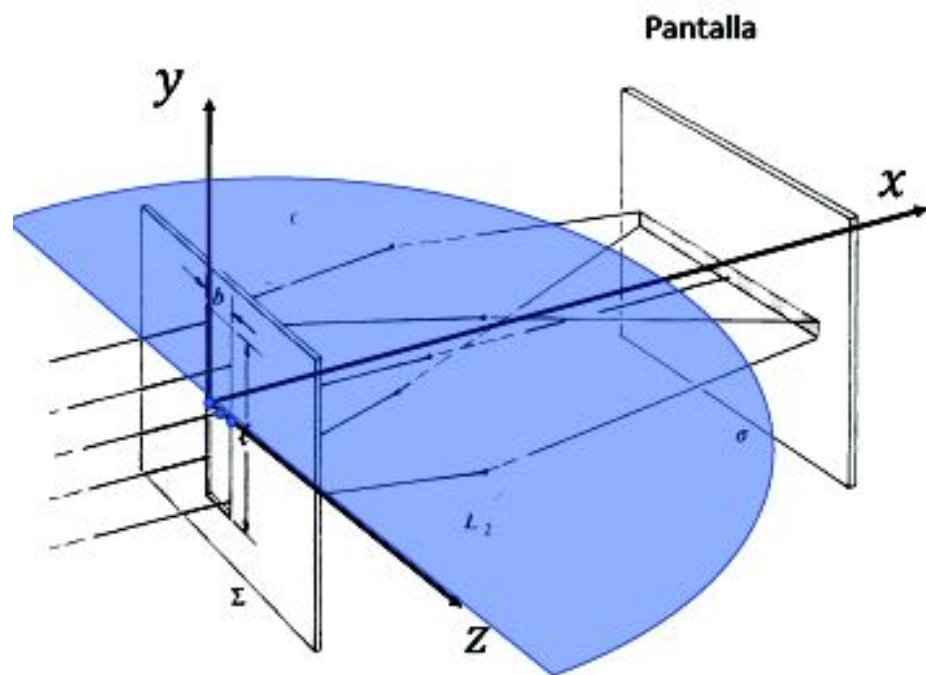
- Consideremos ahora la difracción de Fraunhofer de ondas planas a través de una abertura rectangular tal que:
- La abertura tiene un largo l de varios cm ($l \gg \lambda$).
- El ancho de la abertura b es de algunos cientos de λ ($b > \lambda$).



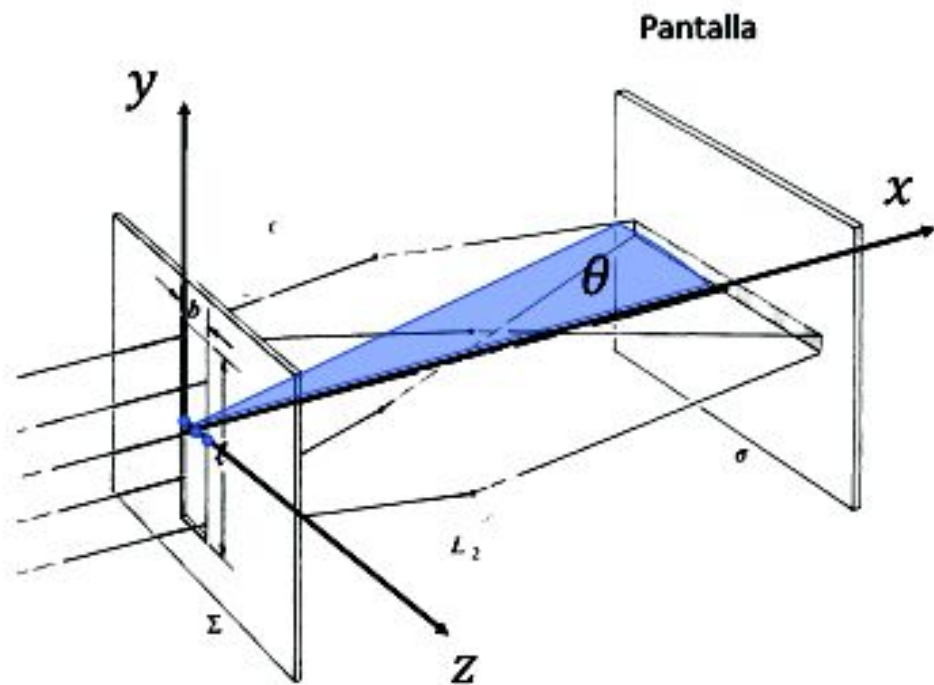
- Lo que se hace normalmente es dividir la ranura en segmentos verticales de fuentes coherentes como las que vimos anteriormente.
- Por lo que acabamos de ver, cuando $l \gg \lambda$ cada segmento puede representarse como una sola fuente puntual a lo largo del eje z que irradia en el plano xz



- Entonces habrá muy poca difracción en la dirección paralela a los bordes de la rendija.



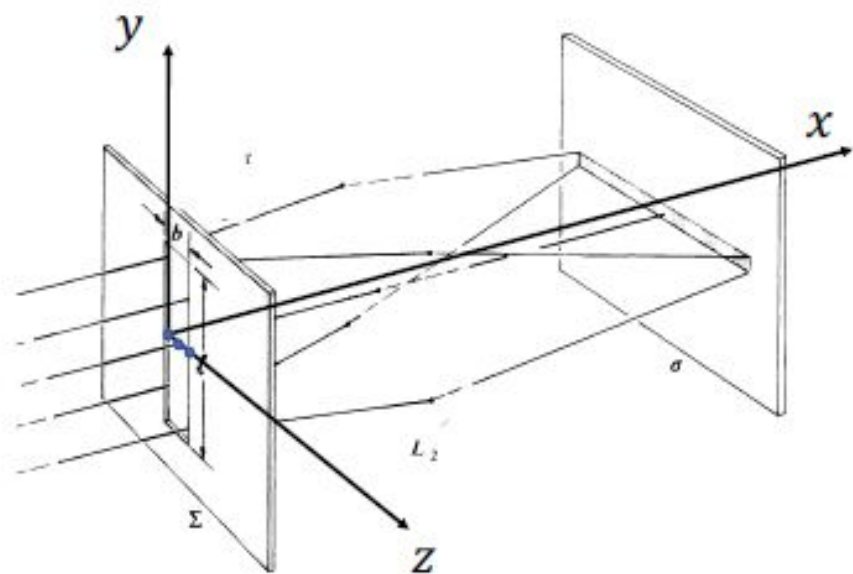
- En esas condiciones, el ángulo θ indica la dirección al punto de evaluación de la irradiancia sobre la pantalla.
- θ se mide desde el eje x sobre el plano xz .



- Entonces, el problema se limita al de una serie de fuentes coherentes en el eje z a lo largo de una distancia b .
- Este problema ya lo analizamos y la irradiancia resultante es

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

- donde $\beta = (kb/2) \sin \theta$



En la pantalla el patrón es perpendicular al lado mayor de la rendija



$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

- Para graficar $I(\theta)$ versus $\sin \theta$ volvamos a ver sus máximos y mínimos.
- $I(\theta) \geq 0$ por definición
- Máximo en $\theta = 0$ lo cual ocurre sí y solo sí $\beta = 0$
- Mínimos ($I = 0$) cuando $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi \dots \pm n\pi$. Esto implica que los mínimos se hallan en:

$$\sin \theta_{min} = \pm \frac{2n\pi}{kb} = \pm \frac{n\lambda}{b}$$

- Ahora, que haya mínimos en $\beta = \pm\pi, \pm2\pi \dots \pm n\pi$ implica que entre ellos debe haber máximos.
- Entre los mínimos de primer orden, en $\sin \theta_{1min} = \pm \frac{\lambda}{b}$ tenemos el máximo central del patrón de difracción.
- ¿Qué pasa con los otros?
- Busquemos otros valores de $I(\beta)$ extremos haciendo $\frac{dI(\beta)}{d\beta} = 0$

- Derivando tenemos:

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0) \frac{2 \sin \beta (\beta \cos \beta - \sin \beta)}{\beta^3} = 0$$

Puede ser cero

- Por un lado tenemos máximo cuando $\beta = 0$ y mínimos cuando

$$\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$$

- Es que el término encerrado sea cero. De ahí se obtiene:

$$\beta \cos \beta - \sin \beta = 0$$

$$\tan \beta = \beta$$

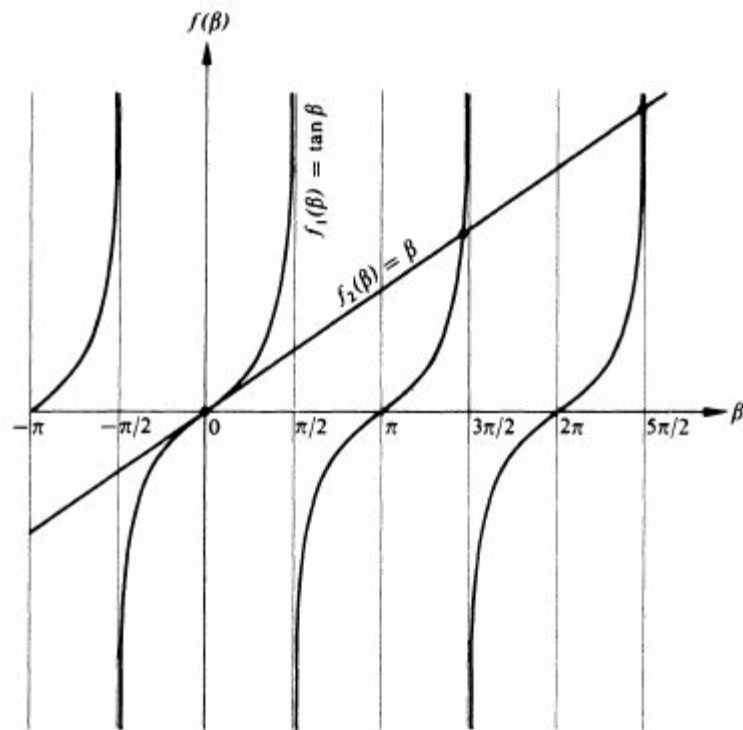
- La ecuación anterior no tiene soluciones analíticas, pero sí numéricas.

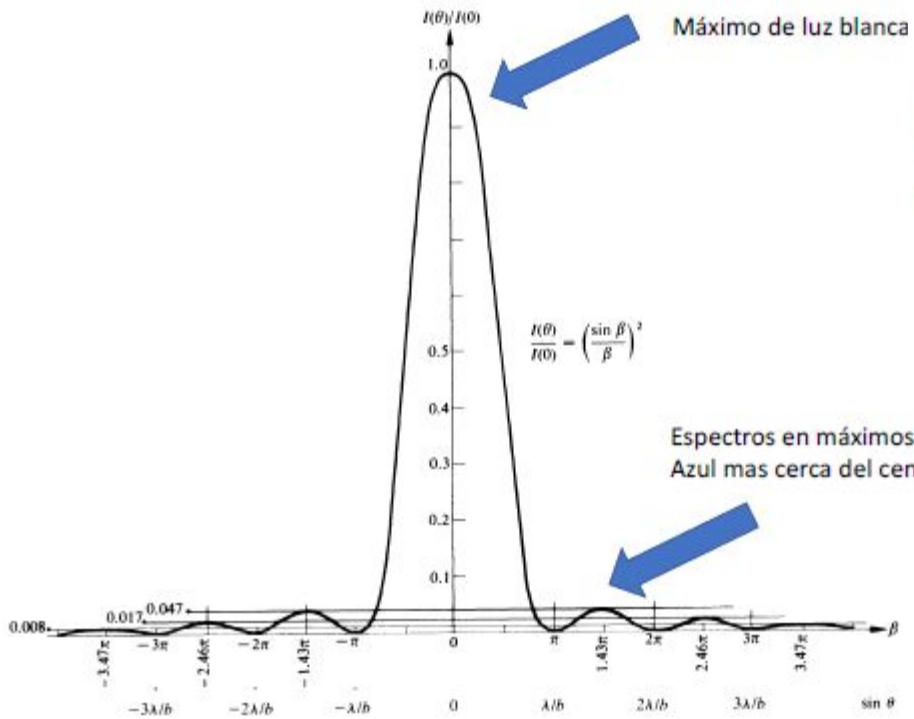
- Sus primeras raíces son:

$$\beta = \pm 1,4303\pi,$$

$$\pm 2,4590\pi, \pm 3,4707\pi \dots$$

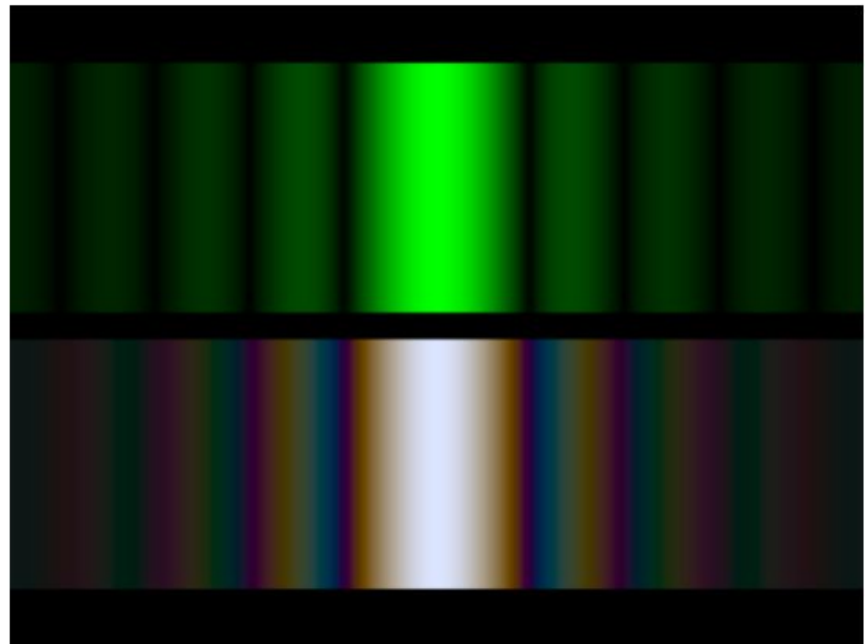
- Esto es casi a mitad de camino entre dos mínimos





Luz monocromática

Luz blanca



Es importante que el lector no considere a la difracción como un fenómeno de interferencia. Esto suele ser una desviación conceptual que surge de considerar al fenómeno en términos de la herramienta que permite su descripción. Aquí queremos remarcar que la difracción ocurre como consecuencia del encuentro de un frente de onda con los obstáculos que impiden su propagación. Nótese que el Principio de Huygens pone de manifiesto cuestiones que permiten la comprensión de la difracción, pero sigue siendo válido en cualquier contexto de propagación de ondas libre de obstáculos.