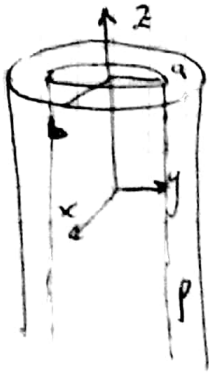


Cilindro infinito de radio interno $r=a$ y externo $r=b$:



Con carga volumétrica dada por la función:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \rho_0 & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases}$$

- a) Calcular $\vec{E}(\vec{r}) \forall \mathbb{R}^3$ y graficar ($\rho_0 > 0$)
 Dibujar líneas de campo y superf. equipotenciales.

► La distr. de carga $\rho(\vec{r})$ tiene simetría cilíndrica
 (traslación en z \oplus rotación eje z)

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{r}$$

\downarrow dirección radial (cilíndricas)
 \downarrow coordenada radial de cilíndricas

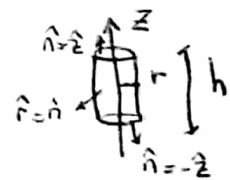
► Dado la simetría uso Gauss para calcular $E(r)$.

$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}, \quad Q_{\text{enc}} = \iiint_V dV \rho(\vec{r})$$

$S = \partial V$: Superficie de Gauss
 Q_{enc} : Carga encerrada por la sup. S de Gauss

► Elijo S como la superf. de un cilindro centrado con el eje z , de altura " h " y radio " r ":

(Las normales \hat{n} a S son $\pm \hat{z}$ y \hat{r})
 en tapas lateral



Con esta elección de S tenemos que \vec{E} es \perp a la superficie en el lateral ($\hat{n} = \hat{r}$) y \vec{E} es \parallel a las tapas.

- \Rightarrow
- No hay flujo sobre tapas
 - Solo hay flujo de E a través del lateral donde E toma un valor uniforme.

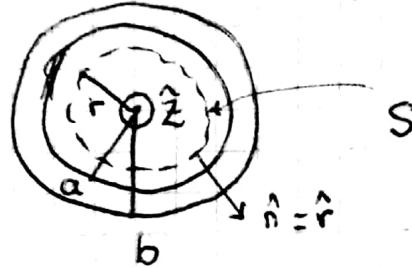
Como el problema presenta 3 regiones \Rightarrow

~~Análisis según 3 familias de superficies S~~

Análisis el flujo a través de S según 3 casos:

(1) Caso $0 \leq r \leq a$: (el radio de la superficie de Gauss es menor al radio interno $= a'$)

Vista "superior":



$$\oint (E(r) \cdot \hat{r}) (\hat{n} \cdot dS) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\underbrace{\iint_{\text{tapa (+)}} E(r) \hat{r} (\hat{z} \cdot dS)}_{\Rightarrow 0} + \underbrace{\iint_{\text{tapa (-)}} E(r) \hat{r} (-\hat{z}) \cdot dS}_{\Rightarrow 0} + \iint_{\text{lateral}} E(r) \hat{r} \cdot (\hat{r} \cdot dS) \stackrel{=1}{\Rightarrow}$$

No hay flujo por tapas ✓

\Rightarrow queda: $\iint_{\text{lateral}} E(r) \cdot dS = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad : \quad [1]$

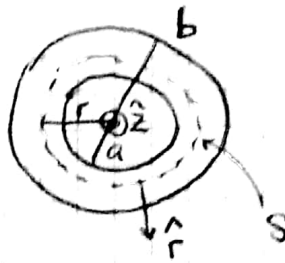
c.a: (i) $\iint_{\text{lateral}} E(r) dS = \int_0^{2\pi} d\phi \cdot r \int_{z_0}^{z_0+h} dz E(r) = E(r) \cdot \underbrace{r}_{=2\pi} \cdot \underbrace{2\pi \cdot h}_{\text{superficie lateral}} = 0$

(ii) $Q_{enc} = \iiint dV \rho(r) = \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} d\phi \cdot r' \int_{z_0}^{z_0+h} dz \underbrace{\rho(r' < a)}_{=0} = 0$

\Rightarrow

$E(r) \cdot r \cdot 2\pi \cdot h = 0 \quad \therefore \quad \boxed{E(r < a) = 0}$

(2) Caso $a \leq r \leq b$:



Tenemos el mismo resultado [1] que en el caso (1) :

$$\underbrace{\iint E(r) dS}_{\text{lateral}} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

" $E(r) \cdot r \cdot 2\pi \cdot h$

pero ahora $Q_{enc} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^h dr' d\phi dz \cdot \rho(r') = \rho_0 2\pi \cdot h \int_a^r dr' r'$

$\rho(r') = \begin{cases} = 0 & \text{si } r' < a \\ = \rho_0 & \text{si } a < r' < b \end{cases}$

$= \rho_0 2\pi \cdot h \left(\frac{r'^2}{2} \Big|_a^r \right) = \rho_0 h \pi \frac{(r^2 - a^2)}{2}$

Volumen con carga encerrado.

$\therefore E(r) = \frac{\rho_0 h \cdot \pi (r^2 - a^2)}{\epsilon_0 2\pi \cdot h \cdot r}$ para $a \leq r \leq b$

(3) Caso $r \geq b$: (la superficie de Gauss rodea toda la carga)

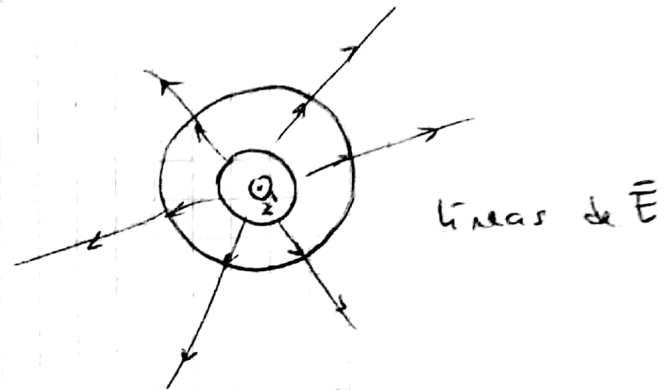
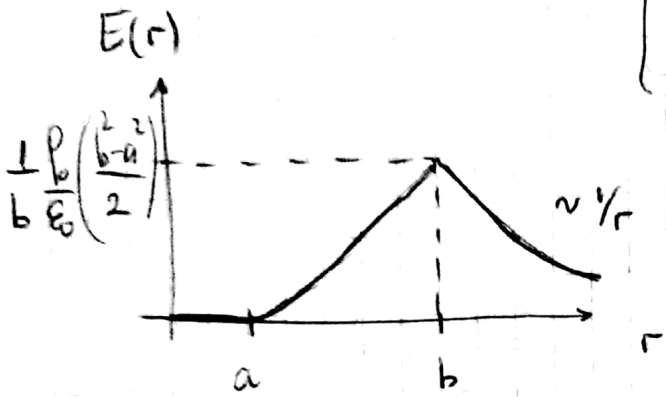
Partiendo de [1] : $E(r) \cdot r \cdot 2\pi \cdot h = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$



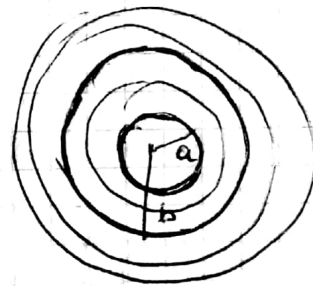
$Q_{enc} = \rho_0 h \cdot \pi (b^2 - a^2)$: análogamente a lo hecho en (2) pero con b como radio máximo en donde hay cargas ($\rho(r > b) = 0$)

$\therefore E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) \frac{1}{r}$, se $r \geq b$.

Rta final: $\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & \text{Si } 0 \leq r < a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2 - a^2}{2r} \right) \hat{r} & \text{Si } a \leq r < b \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) \frac{\hat{r}}{r} & \text{Si } r \geq b \end{cases}$



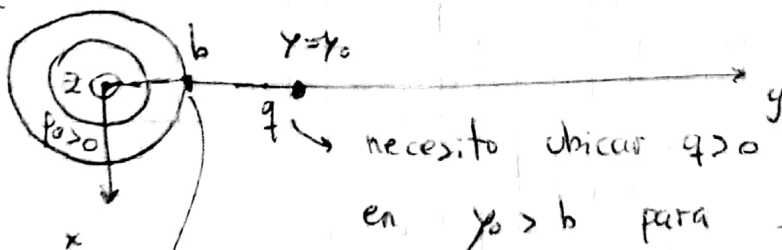
Superficies equip:
(son \perp a líneas de campo)



b) Ubicar q en $\vec{r}_0 = y_0 \hat{y} + z_0 \hat{z}$ ($z_0, y_0 \in \mathbb{R}$)

tal que: $\vec{E}_{total} \Big|_{\vec{r} = b\hat{y} + z_0\hat{z}} = \vec{0}$ (for $q > 0$)

Vista superior del plano $z = z_0$



punto campo
($\vec{r} = b\hat{y} + z_0\hat{z}$)

necesito ubicar $q > 0$ en $y_0 > b$ para que el campo \vec{E}_q que produce q pueda anular al campo $\vec{E}_{c1} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{b^2 - a^2}{2b} \right) \hat{y}$ que produce el cilindro en el punto campo $\vec{r} = b\hat{y} + z_0\hat{z}$

Planteo:

$$\left(\vec{E}_{\text{total}} \right) \Big|_{\vec{r} = b\hat{y} + z_0\hat{z}} = \left(\vec{E}_{\text{cil}} + \vec{E}_q \right) \Big|_{\vec{r} = b\hat{y} + z_0\hat{z}} = 0, \text{ cm}$$

$$\left[\vec{E}_{\text{cil}} \right] \Big|_{\vec{r} = b\hat{y} + z_0\hat{z}} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{b^2 - a^2}{2b} \right) \cdot (\hat{r}) \Big|_{b\hat{y} + z_0\hat{z}} = E_0 \hat{y}$$

$\equiv E_0$ $= \hat{y}$

$$\left[\vec{E}_q \right] \Big|_{\vec{r} = b\hat{y} + z_0\hat{z}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \Big|_{\substack{\vec{r} = b\hat{y} + z_0\hat{z} \\ \vec{r}_0 = y_0\hat{y} + z_0\hat{z}}} = \frac{-q \cdot \hat{y}}{4\pi\epsilon_0 (y_0 - b)^2}$$

ca. (i) $\vec{r} - \vec{r}_0 = b\hat{y} + z_0\hat{z} - (y_0\hat{y} + z_0\hat{z}) = (b - y_0)\hat{y}$

(ii) $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(b - y_0)^2} = |b - y_0| = y_0 - b$

\downarrow
($y_0 > b$)

(iii) $\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = -\frac{(y_0 - b)\hat{y}}{(y_0 - b)^3} = -\frac{\hat{y}}{(y_0 - b)^2}$

Finalmente: $\left(\vec{E}_{\text{total}} \right) \Big|_{\vec{r} = b\hat{y} + z_0\hat{z}} = E_0 \hat{y} - \frac{q \hat{y}}{4\pi\epsilon_0 (y_0 - b)^2} = 0$

$\Leftrightarrow (y_0 - b)^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{\rho_0 (b^2 - a^2) 2\pi}$

$\Leftrightarrow y_0 = \sqrt{\frac{q}{\rho_0 (b^2 - a^2) 2\pi}} + b$

$z_0 \in \mathbb{R}$ (puede ser cualquiera)