Ondas Electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

En vacío y sin fuentes son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$ Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ ∄ monopolo

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ Ampère + Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Faraday

- Tomemos el rotor de la Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

- Y derivemos respecto al tiempo la Ley de Ampère + Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

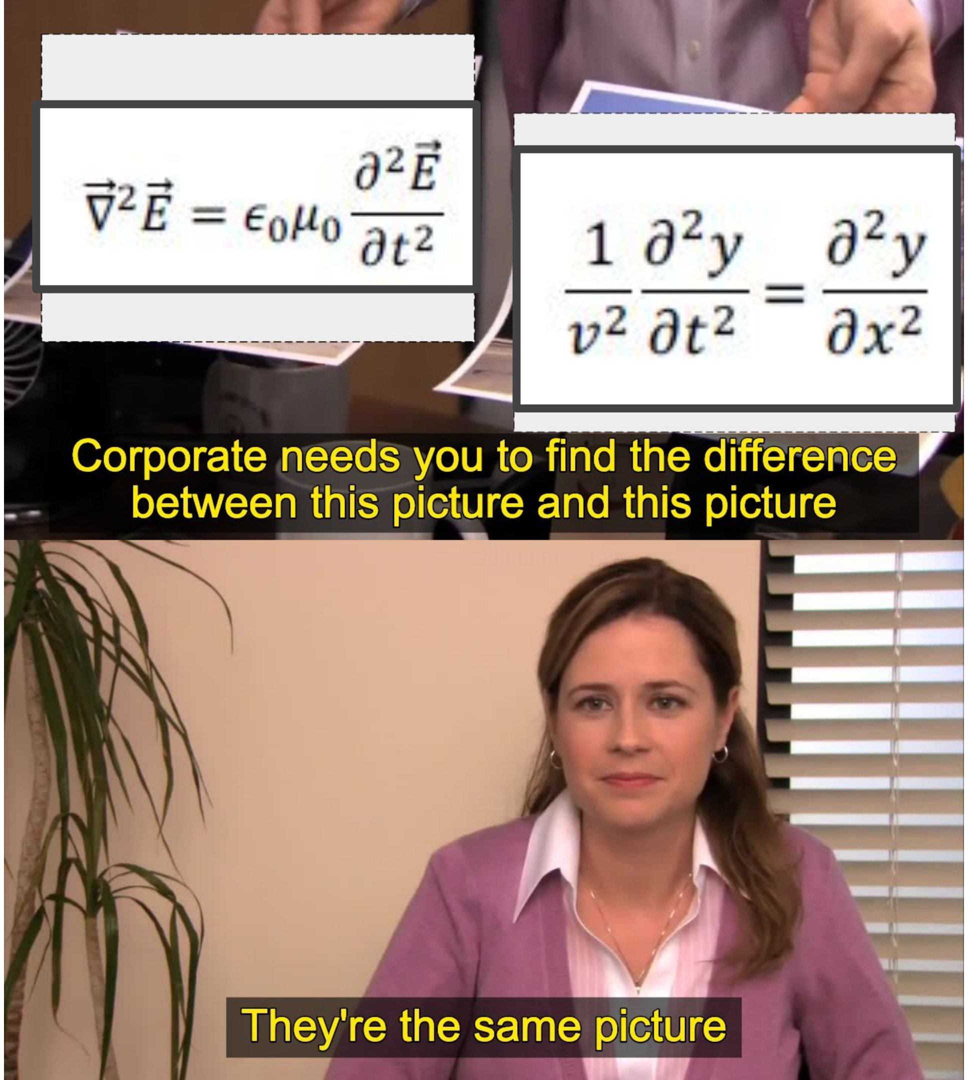
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- Igualando estas dos expresiones tenemos

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{E} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E}}$$


$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$
$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
Corporate needs you to find the difference between this picture and this picture
They're the same picture

¿?

Cada coordenada es:

Coordenada x

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Coordenada y

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Coordenada z

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

La onda electromagnética es entonces una onda **vectorial transversal**

Una solución sinusoidal plana para $\vec{E}$ que oscila a lo largo del eje x que se propaga a lo largo del eje z es:

Amplitud

polarización

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\overbrace{kz - \omega t}^{\text{fase}})\hat{x}$$

nro de onda

frecuencia angular

esta es la dependencia espacial

De las componentes de la ecuación de onda general nos queda una ecuación igual a la que vimos de la cuerda:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Además, reemplazando E_x por $E_0 \cos(kz - \omega t)$ sacamos la relación de dispersión:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda \nu$$

Donde c es la velocidad de la luz en el vacío:

$$c \cong 300000\ km/s$$

¿Cómo obtener B a partir de E?

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

Como el campo E depende de z sólo nos quedan algunos términos:

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} = -E_0 k \sin(kz - \omega t)\hat{y} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Entonces :

$$\vec{B}(z,t) = E_0 k \hat{y} \int \sin(kz - \omega t)dt = \frac{E_0 k}{\omega} \cos(kz - \omega t)\, \hat{y}$$

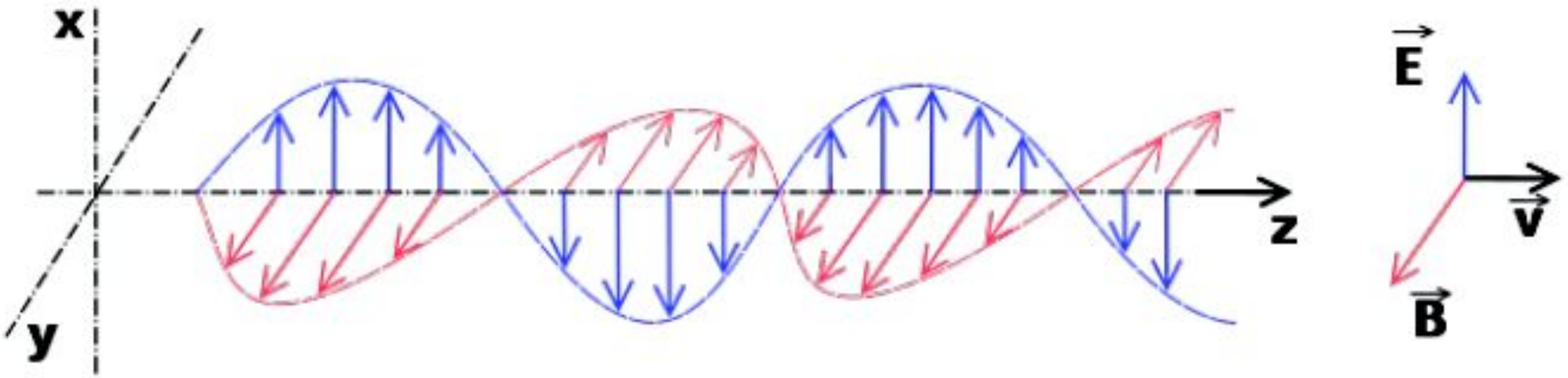
- Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t)\hat{y}}$$

Perpendiculares entre sí y en fase

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}}$$

Campos E y B



Propiedades de una Onda Electromagnética (viajera)

$$\vec{E} \perp \text{dirección de propagación}$$

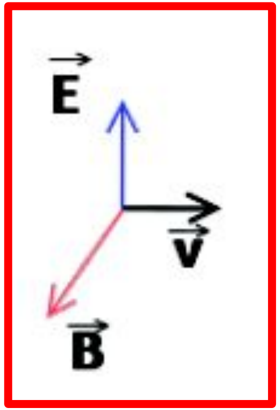
$$\vec{B} \perp \text{dirección de propagación}$$

$$\vec{E} \text{ y } \vec{B} \text{ en fase}$$

$$\vec{E} \perp \vec{B}$$

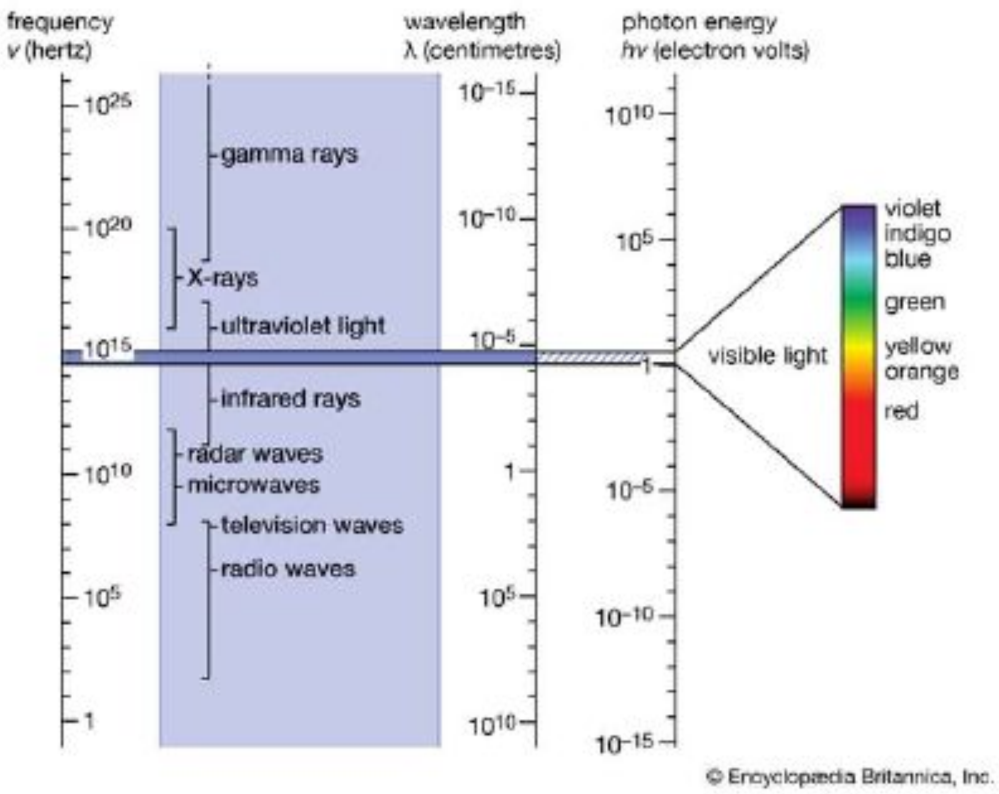
$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$$

$$\vec{E} \times \vec{B} \text{ es paralelo a la dirección de propagación}$$



¿Qué nos dicen las frecuencias de oscilación de E y B?

Definen el Espectro Electromagnético



¿Qué transportan las ondas EM (electromagnéticas)? → ENERGÍA

- Una onda electromagnética transporta al propagarse con velocidad c a la energía electromagnética de los campos que la forman.
- Vimos que la densidad de energía por unidad de volumen venía dada por :

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- Calculemos la cantidad de energía que pasa por unidad de tiempo a través de una unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación.

Hagamos algunas cuentas:

Evaluemos E
en z=0

$$E(0,t)^2 = |E(0,t)|^2 = [E_0\cos(-\omega t)]^2$$

$$B(0,t)^2 = |B(0,t)|^2 = \left[\frac{E_0}{c}\cos(-\omega t)\right]^2$$

Llegamos a:

$$\boxed{u = \frac{\epsilon_0}{2}\left[E_0^2 + \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\right][\cos(\omega t)]^2}$$

¿Qué pasa si calculamos en valor medio de la parte temporal (integrando en un período)

$$\left< [\cos(\omega t)]^2 \right> = \frac{1}{2}$$

Recordando

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

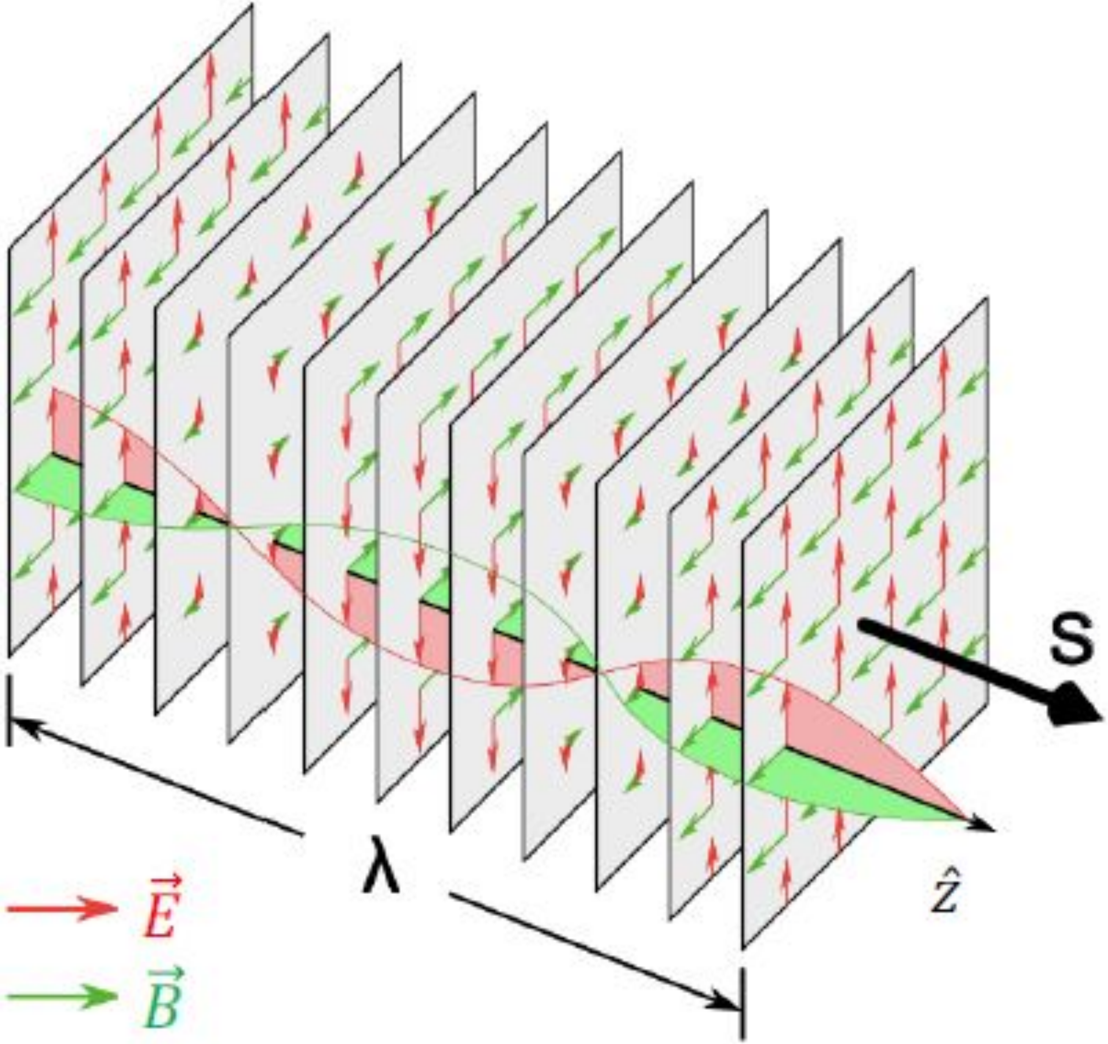
$$\boxed{\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{4}[E_0^2 + E_0^2] = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}}$$

Podemos preguntarnos cuál es la energía que atraviesa una cierta superficie S:

$$S = \langle u \rangle c = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c$$

Ondas planas

- Cada plano corresponde a una superficie del mismo valor de fase
- En cada plano, los campos son iguales



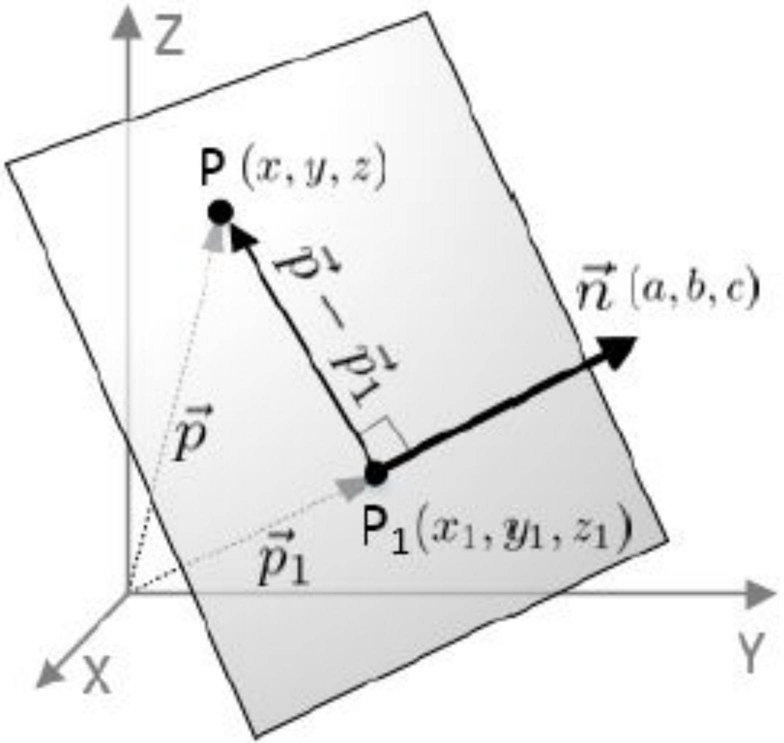
Ondas Planas

- P_1 y P que pertenecen a un plano de normal $\hat{n}$.

- La siguiente es la ecuación normal del plano
$$\hat{n} \cdot (\vec{p} - \overrightarrow{p_1}) = 0$$

- Si dejamos fijo $\overrightarrow{p_1}$ el plano está compuesto por los puntos $\vec{p}$ tales que

$$\hat{n} \cdot \vec{p} = \hat{n} \cdot \overrightarrow{p_1} = constante$$



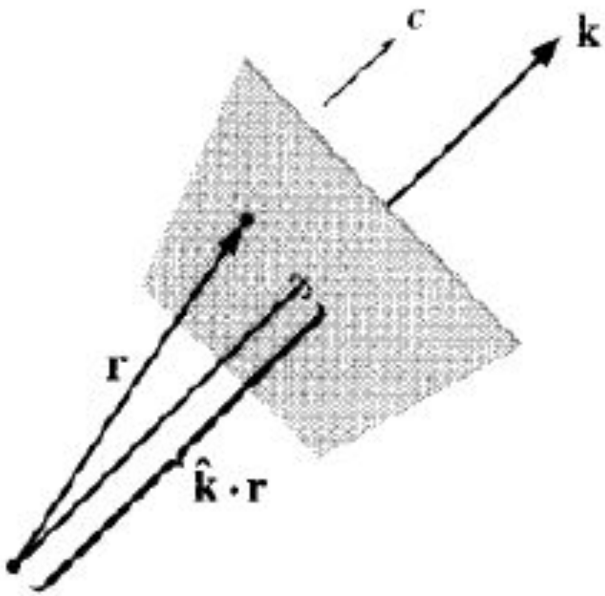
- Las ondas planas son una solución de la ecuación de ondas EM:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

- Para cada instante t, el plano corresponde a

$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = constante$$
$$\vec{k}\cdot\vec{r} = constante + \omega t$$

- Esto define el frente de onda, que con t se desplaza en la dirección de $\vec{k}$ con velocidad c



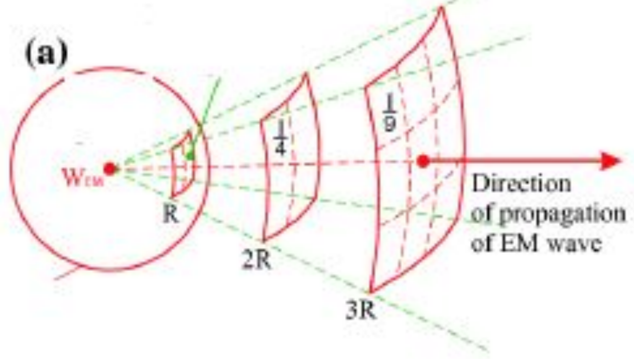
Ondas esféricas

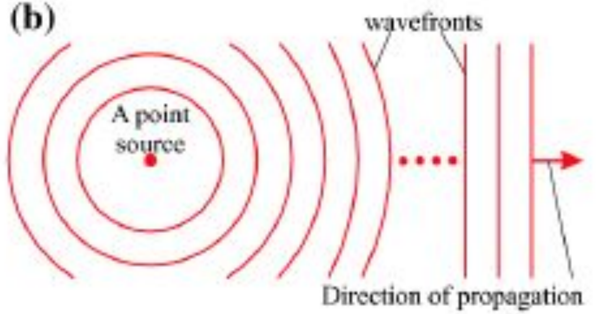
- Para fuentes puntuales, otra solución de la ecuación de onda en esféricas es la siguiente

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(r)\cos\left(\vec{k}(\vec{r})\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

- Donde $\vec{k}(\vec{r}) = k\hat{r}$ y $\vec{E}_0(r) \propto \frac{1}{r}$

- Lejos de la fuente, la onda esférica en una pequeña porción puede ser considerada plana en primera aproximación





Refracción & Reflexión de la luz

- Cuando la luz encuentra un material, esta puede interactuar con él de diferentes maneras dependiendo normalmente de su longitud de onda:
  - Reflexión
  - Absorción
  - Dispersión
- Materiales opticamente transparentes: materiales en los que los tres efectos son depreciables en el rango de longitudes de onda de interés.
- En el rango visible (λ entre 380 y 740 nm), materiales como el agua o el vidrio son transparentes.

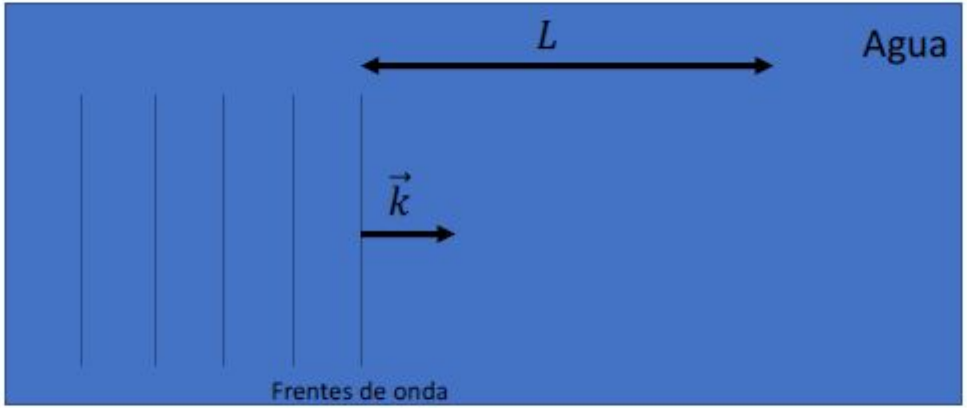
- En medios ópticamente transparentes, la velocidad de propagación de la luz v es menor a su valor en el vacío c.
- Una cantidad importante de un material transparente es el índice de refracción n, definido como

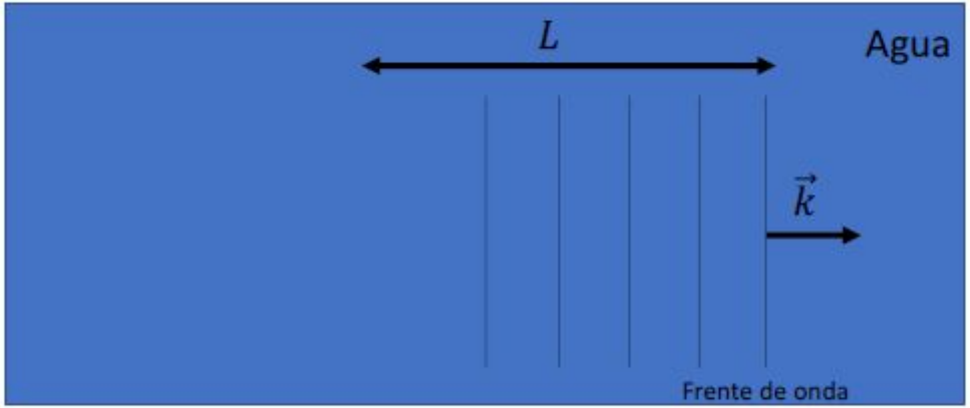
$$n = \frac{c}{v}$$

- n es adimensional y $n \geq 1$

Table 1. Index of Refraction of Various Materials.	
Material	**Index of Refraction**
Vacuum	1.0000
Air	**1.0003**
Water (pure)	1.3330
Seawater (35 ppt)	1.3394
Ethyl alcohol	1.361
Sugar solution (80% sugar)	1.49
Glass (soda lime)	1.510
Bromine (liquid)	1.661
Ruby	1.760
Diamond	2.417

Camino Óptico



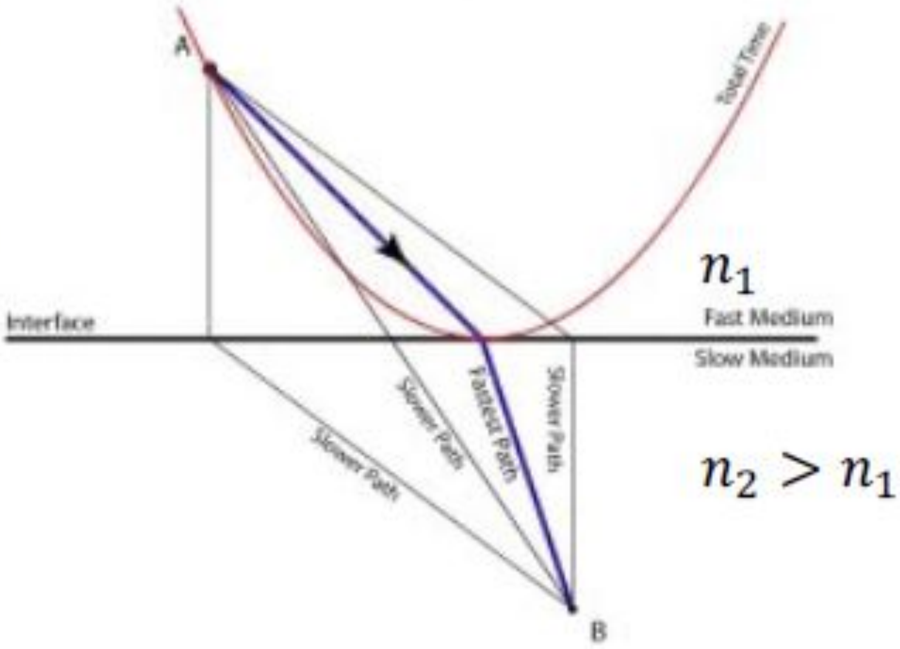


$$C.O = n.L$$

Principio de Fermat + Snell

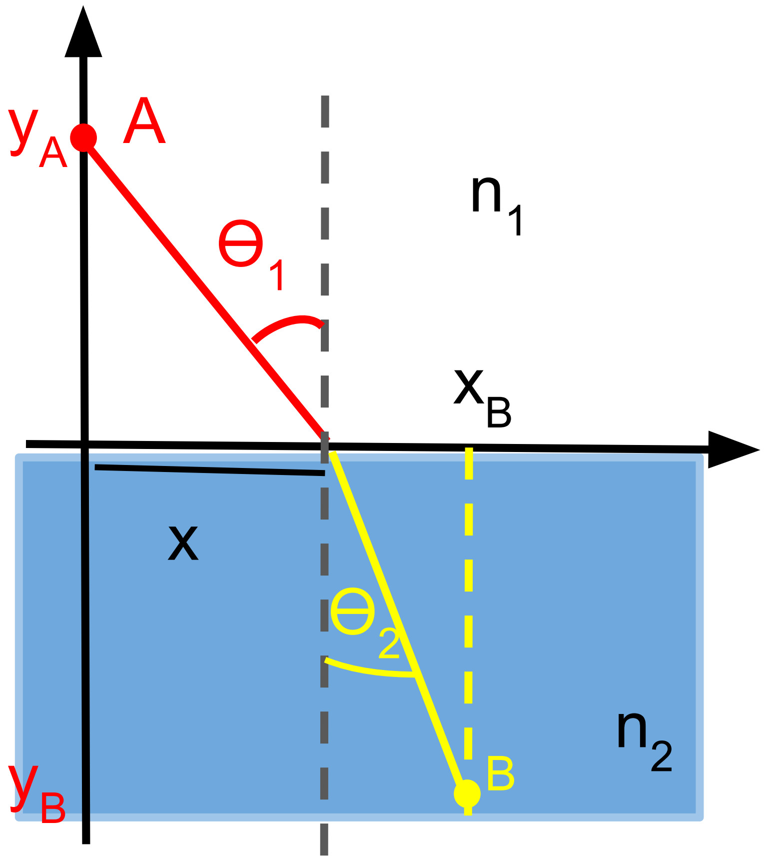
El principio de Fermat, relacionado con el principio de mínima acción, dice:

- El camino que recorre la luz entre dos puntos, es tal que minimiza el tiempo en el que realiza el recorrido
- Esto equivale a decir que el recorrido óptimo es el de menor camino óptico.



- Supongamos dos medios de índices n_1 y $n_2 > n_1$.
- El camino de la onda (rayo) pasa por lo puntos A $(0, y_A)$ y B (x_B, y_B).
- Sea x la abcisa del punto sobre la interfase donde impacta el rayo
- El camino óptico total recorrido entre A y B es

$$C.O. = n_1\sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$



El camino óptico es:

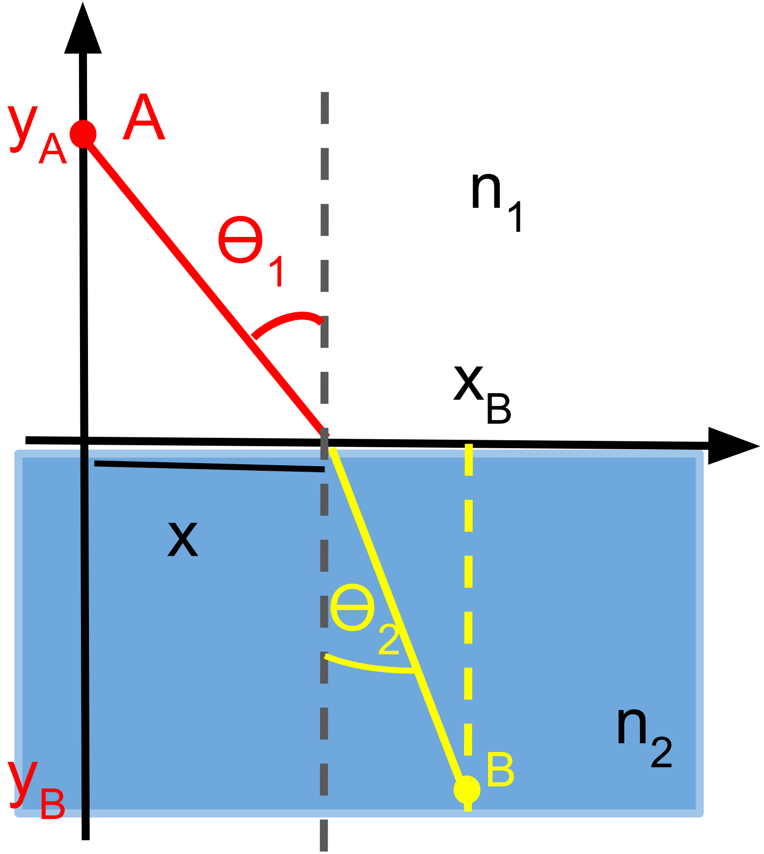
$$c.o. = n_1\sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$

Y su derivada respecto de x será:

$$\frac{\partial(c.o)}{\partial x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2+y_A^2}} - \frac{n_2\,(x_B-x)}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}}$$

Encontremos los extremos:

$$\frac{\partial(c.o)}{\partial x} = 0$$

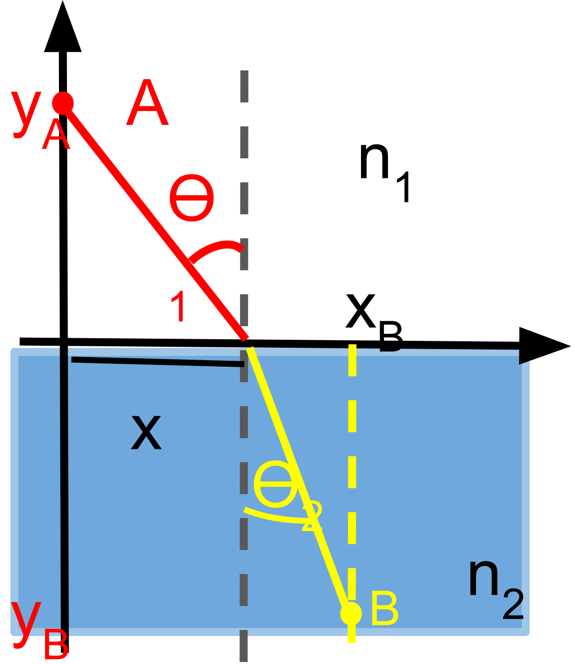


$$0 = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2+y_A^2}} - \frac{n_2 (x_B - x)}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}}$$

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{x^2+y_A^2}} = \frac{n_2 (x_B - x)}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}}$$

$$\boxed{n_1\, sen(\theta_1) = n_2\, sen(\theta_2)}$$

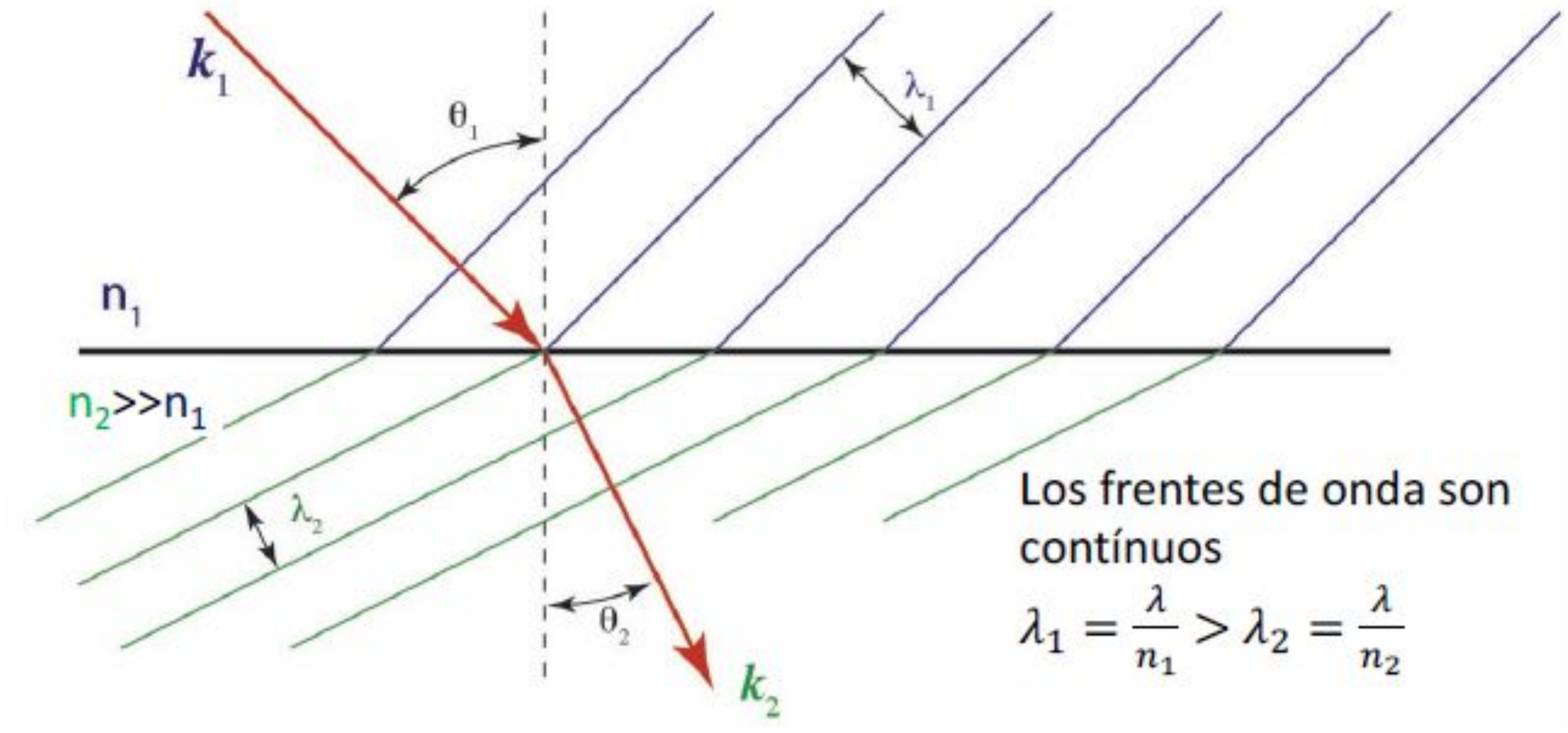
Ley de Snell



$$sen(\theta_1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y_A^2}}$$

$$sen(\theta_2) = \frac{(x_B-x)}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}}$$

Pensemos la Ley de Snell con el formalismo de Ondas



Reflexión de la luz (ondas)

- Cuando una onda electromagnética propagándose en un medio de índice n_1 llega a una interfase con otro medio de índice n_2 además de refractarse, hay una porción que se refleja:

- Si el rayo (en la dirección del vector $\vec{k}$) incidente forma un ángulo θ_i con la normal a la interfase, la ley de reflexión dice que si θ_r es el ángulo del rayo reflejado :

$$\theta_i = \theta_r$$