

FISICA 3. Apéndice Matemático.

Resumen de las ecuaciones usadas

1er cuatrimestre de 2013

J. Miraglia

(Dated: March 15, 2013)

Abstract

SISTEMAS DE COORDENADAS

Cartesianas, esféricas y cilíndricas. Formulas que contienen $\vec{\nabla}$. Integrales de interés. Operaciones vectoriales simples. Expansiones elementales. El teorema de Green. El teorema de Stokes.

EXPRESIONES EXPLICITAS DE LOS OPERADORES

Expresión explícita de los operadores gradiente, divergencia, laplaciano y las direccionales.

LA FUNCION δ DE DIRAC y Θ DE HEAVISIDE

Funciones δ de Dirac en una y tres dimensiones. La funcion Θ de heaviside. Propiedades. Ecuaciones de Poisson y Green.

DESARROLLOS PARTICULARES.

Para determinar el campo magnético \vec{B} . Para determinar la intensidad magnética \vec{H} . Para demostrar la divergencia nula de \vec{A} . Un truco básico.

PACS numbers:

I. SISTEMAS DE COORDENADAS

Coordenadas **cartesianas**: $\{x, y, z\}$, $d\vec{r} = dx dy dz$, $x \in \{-\infty, \infty\}$, $y \in \{-\infty, \infty\}$, $z \in \{-\infty, \infty\}$. Los vectores se escriben como $\vec{F} = F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z$, $F_{x,y,z}$, con $F_{x,y,z}(x, y, z)$, y los versores satisfacen

$$\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z, \quad \hat{e}_y \times \hat{e}_z = \hat{e}_x, \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y, \quad (1)$$

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = \hat{e}_y \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_x = 0, \quad (2)$$

Coordenadas **esféricas**: $\{r, \theta, \varphi\}$, $d\vec{r} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, $r \in \{0, \infty\}$, $\theta \in \{0, \pi\}$, $\varphi \in \{-\pi, \pi\}$. La transformación $\{r, \theta, \varphi\} \longleftrightarrow \{x, y, z\}$ es:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}. \quad (4)$$

Los vectores se escriben como $\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta + F_\varphi \hat{e}_\varphi$, con $F_{r,\theta,\varphi} = F_{r,\theta,\varphi}(r, \theta, \varphi)$ y los versores satisfacen

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi, \quad \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_r, \quad \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta, \quad (5)$$

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_r = 0, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z \\ \hat{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z \\ \hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \hat{e}_x = \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_\theta - \sin \varphi \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_y = \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_\theta + \cos \varphi \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_z = \sin \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_y \end{cases} \quad (8)$$

Coordenadas **cilíndricas**: $\{\rho, \varphi, z\}$, $d\vec{r} = \rho d\rho d\varphi dz$, $\rho \in \{0, \infty\}$, $\varphi \in \{-\pi, \pi\}$, $z \in \{-\infty, \infty\}$. La transformación $\{\rho, \varphi, z\} \longleftrightarrow \{x, y, z\}$ es:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (9)$$

y obviamente $z = z$. Los vectores se escriben como $\vec{F} = F_\rho \hat{e}_\rho + F_\varphi \hat{e}_\varphi + F_z \hat{e}_z$, con $F_{\rho, \varphi, z} = F_{\rho, \varphi, z}(\rho, \varphi, z)$ y los versores satisfacen:

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z, \quad \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho, \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi \quad (10)$$

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\rho = 0 \quad (11)$$

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho = \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y \\ \hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} \hat{e}_x = \cos \varphi \hat{e}_\rho - \sin \varphi \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_y = \sin \varphi \hat{e}_\rho + \cos \varphi \hat{e}_\varphi \end{cases} \quad (12)$$

y obviamente $\hat{e}_z = \hat{e}_z$.

A. Vectores

Recordar que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \alpha, \quad \text{con} \quad \alpha = \widehat{\vec{A} \vec{B}} \quad (13)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\vec{B} \times \vec{A} = AB \sin \alpha \hat{e} \quad / \quad \hat{e} \perp (\vec{A}, \vec{B}) \quad (14)$$

Formulas específicas de interés en el curso serán:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (16)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (17)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{C} [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D})] - \vec{D} [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})] \quad (18)$$

$$= \vec{B} [\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})] - \vec{A} [\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})] \quad (19)$$

B. Formulas que contienen $\vec{\nabla}$

Que contienen el **gradiente**,

$$\vec{\nabla}(u+v) = \vec{\nabla}u + \vec{\nabla}v, \quad (20)$$

$$\vec{\nabla}(uv) = v\vec{\nabla}u + u\vec{\nabla}v, \quad (21)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (22)$$

que contienen la **divergencia**,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}, \quad (23)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (u \vec{A}) = (\vec{\nabla}u) \cdot \vec{A} + u(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}), \quad (24)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times u) = 0, \quad !! \quad (26)$$

que contienen el **rotor**,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad (27)$$

$$\vec{\nabla} \times (u \vec{A}) = (\vec{\nabla}u) \times \vec{A} + u(\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (28)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}), \quad (29)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}, \quad (30)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}u) = 0 \quad !! \quad (31)$$

y que contienen el **Laplaciano**,

$$\nabla^2(uv) = u\nabla^2v + v\nabla^2u + 2\vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v . \quad (32)$$

C. Integrales de interés

$$\oint_{C_1} \vec{dl}_1 = 0, \quad (33)$$

$$\oint_{C_1} \vec{dl}_1 \cdot \vec{r} = 0, \quad (34)$$

$$\oint_{C_1} \vec{r} \times \vec{dl}_1 = 2A, \quad / A = \text{area encerrada} \quad (35)$$

$$\oint_{C_1} \frac{\vec{dl}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = \vec{\nabla} \times \oint_{C_1} \frac{\vec{dl}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \quad (36)$$

$$\oint_{C_1} \frac{\vec{dl}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = 0, \quad (37)$$

$$\int_{V_1} d\vec{r}_1 \frac{\vec{A}(\vec{r}_1) \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = \vec{\nabla} \times \int_{V_1} d\vec{r}_1 \frac{\vec{A}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (38)$$

D. Operaciones vectoriales simples

Que contienen el **gradiente**,

$$\vec{\nabla} r = \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad (39)$$

$$\vec{\nabla} r^n = nr^{n-1}\hat{r} = nr^{n-2}\vec{r}, \quad (40)$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (41)$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r^2} = -2\frac{\hat{r}}{r^3} = -2\frac{\vec{r}}{r^4}, \quad (42)$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r^n} = -n\frac{\hat{r}}{r^{n+1}} = -n\frac{\vec{r}}{r^{n+2}}, \quad n > 0. \quad (43)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{A}, \quad (44)$$

que contienen la **divergencia**,

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad (45)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3, \quad (46)$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{A}}{r^3} - 3\frac{(\vec{A} \cdot \vec{r})}{r^5}\vec{r}, \quad (47)$$

que contienen el **rotor**,

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0, \quad (48)$$

y que contienen el **laplaciano**,

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \quad \text{Poisson.} \quad (49)$$

$$(\nabla^2 + k^2) \frac{e^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \quad \text{función de Green.} \quad (50)$$

E. Expansiones elementales

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \xrightarrow[\substack{R \rightarrow \infty \\ (R > r)}]{} \frac{1}{R} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^3} + \frac{1}{2R^3} \left[\frac{3(\vec{R} \cdot \vec{r})^2}{R^2} - r^2 \right] + O\left(\frac{1}{R^4}\right), \quad (51)$$

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \xrightarrow[\substack{R \rightarrow \infty \\ (R > r)}]{} \frac{1}{R^3} + \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^4} + O\left(\frac{1}{R^5}\right). \quad (52)$$

F. El teorema de Green

Si la superficie \mathcal{S} es el borde del volumen \mathcal{V} y $d\vec{s} = ds \hat{n}$, con \hat{n} normal a la superficie, entonces vale (en lo que sigue $\iint_{\mathcal{O}\mathcal{S}}$ es la integral sobre la superficie cerrada \mathcal{S})

$$\int_{\mathcal{V}} d\vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \iint_{\mathcal{O}\mathcal{S}} \underbrace{ds \hat{n}}_{d\vec{s}} \cdot \vec{A}, \quad \text{de la divergencia,} \quad (53)$$

$$\int_{\mathcal{V}} d\vec{r} (\vec{\nabla} f) = \iint_{\mathcal{O}\mathcal{S}} d\vec{s} f, \quad \text{del gradiente,} \quad (54)$$

$$\int_{\mathcal{V}} d\vec{r} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \iint_{\mathcal{O}\mathcal{S}} d\vec{s} \times \vec{A}, \quad \text{del rotor, y} \quad (55)$$

$$\int_{\mathcal{V}} d\vec{r} f^* (\vec{\nabla} f) = \int_{\mathcal{V}} d\vec{r} f^* (\nabla^2 f) + \int_{\mathcal{V}} d\vec{r} |\vec{\nabla} f|^2. \quad (56)$$

G. El teorema de Stokes

Si la curva c es el contorno de S y que $d\vec{l}$ y \hat{n} satisfacen la regla de la mano derecha, entonces vale

$$\iint_{\text{OS}} d\vec{s} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (57)$$

$$\iint_{\text{OS}} d\vec{s} \times \vec{\nabla} f = \oint_C f \cdot d\vec{l} \quad \text{variacion} \quad (58)$$

II. EXPRESIÓN EXPLÍCITA DE LOS OPERADORES

A. El gradiente

En Coordenadas **cartesianas** (x, y, z) ,

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial z} f \right), \quad (59)$$

en Coordenadas **esféricas** (r, θ, φ) ,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial r} f \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f \hat{e}_\varphi, \quad (60)$$

y en Coordenadas **cilíndricas** (ρ, φ, z) ,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial \rho} f \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f \hat{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f \hat{e}_z. \quad (61)$$

B. La divergencia

En Coordenadas **cartesianas** (x, y, z) ,

$$\vec{F} = F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z, \quad \text{con} \quad F_{x,y,z} = F_{x,y,z}(x, y, z), \quad (62)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z), \quad (63)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z, \quad (64)$$

en Coordenadas **esféricas** (r, θ, φ) ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi \quad (65)$$

y en Coordenadas **cilíndricas** (ρ, φ, z)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} F_z \quad (66)$$

C. El rotor

En coordenadas **cartesianas**: $\vec{F} = F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z$, con $F_{x,y,z} = F_{x,y,z}(x, y, z)$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{B} = (B_x, B_y, B_z), \quad (67)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y, -\frac{\partial}{\partial x} F_z + \frac{\partial}{\partial z} F_x, \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \right), \quad (68)$$

en Coordenadas **esféricas**: $\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta + F_\varphi \hat{e}_\varphi$, con $F_{r,\theta,\varphi} = F_{r,\theta,\varphi}(r, \theta, \varphi)$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\theta & r \sin \theta \hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\varphi \end{vmatrix} = \vec{B}, \quad (69)$$

y en Coordenadas **cilíndricas**: $\vec{F} = F_\rho \hat{e}_\rho + F_\varphi \hat{e}_\varphi + F_z \hat{e}_z$, con $F_{\rho,\varphi,z} = F_{\rho,\varphi,z}(\rho, \varphi, z)$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \rho \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix} = \vec{B}. \quad (70)$$

D. El Laplaciano

En Coordenadas **cartesianas** (x, y, z) ,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f, \quad (71)$$

en coordenadas **esféricas** (r, θ, φ) ,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r} f) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} f, \quad (72)$$

y en Coordenadas **cilíndricas** (ρ, φ, z) ,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f, \quad (73)$$

Ocasionalmente opera sobre vectores. Por ejemplo $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

E.

$$\nabla^2 \vec{F} = (\nabla^2 F_x, \nabla^2 F_y, \nabla^2 F_z) = \vec{\nabla}^2 \vec{F} \quad (74)$$

El operador $\vec{\nabla}$ direccional

Pueden operar sobre escalares o vectores. En cartesianas es muy simple y valen

$$\begin{aligned} (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) f &= \left[(A_x, A_y, A_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] f \\ &= \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) f \end{aligned} \quad (75)$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \left[(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) B_x, (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) B_y, (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) B_z \right] \quad (76)$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) (f \vec{B}) = f \left[(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) B_x, (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) B_y, (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) B_z \right] + \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) f \quad (77)$$

III. LA FUNCION δ DE DIRAC Y Θ DE HEAVISIDE

A. En una dimensión

Se define la funcion δ de Dirac de infinitas maneras; la mas rústica es:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 1/\varepsilon, & \text{para } |x| < \varepsilon/2 \\ 0, & \text{para } |x| > \varepsilon/2 \end{cases}. \quad (78)$$

Otras definiciones de interés son

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + x^2)} = \frac{2}{\pi^2} \frac{\varepsilon^3}{(\varepsilon^2 + x^2)^2}, \quad (79)$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x} = \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}, \quad (80)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-|x|/\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-(x/\varepsilon)^2}, \quad (81)$$

y muchisimas mas. La δ esta normalizada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) = 1 . \quad (82)$$

La propiedad mas importante es que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0), \quad \text{ó} \quad (83)$$

$$\int_a^b dx \delta(x - x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x_0 \notin [a, b] \end{cases} . \quad (84)$$

Otras propiedades de interés son

$$\delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \delta(x - x_0) , \quad (85)$$

$$x \delta(x) = 0 , \quad (86)$$

$$\delta(x) = \delta(-x) , \quad (87)$$

$$\delta(x_1 - x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_1) \delta(x - x_2) , \quad (88)$$

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x), \quad \text{si } c = \text{cte}; \quad (89)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_j \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad \text{tal que } g'(x_i) \neq 0 . \quad (90)$$

También hay una definición muy usada en el contexto de la transformada de Fourier,

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{\pm i k x - \varepsilon |x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{\pm i k x} , \quad (91)$$

$$\delta'(x) = \delta^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{\pm i k x} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\pm i) k \frac{dk}{2\pi} e^{\pm i k x} , \quad (92)$$

$$(-1)^n f^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta^{(n)}(x) f(x) . \quad (93)$$

La función escalon (*step function*) ó Θ de Heaviside en su forma mas rustica se define así

$$\Theta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & \text{para } x < -\varepsilon/2 \\ \frac{2x+\varepsilon}{2\varepsilon}, & \text{para } |x| < \varepsilon/2 \\ 1, & \text{para } x > \varepsilon/2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{para } x = 0 \\ 1, & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (94)$$

Las propiedades mas importantes son

$$\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x) \quad (95)$$

$$\Theta(x - x_0) = \int_{-\infty}^x dx \delta(x) \quad (96)$$

B. En 3 dimensiones

Las extensiones son obvias. En coordenadas **cartesianas**,

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) , \quad (97)$$

en **esféricas**

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0) , \quad (98)$$

y en **cilíndricas**

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(r - \rho_0)\delta(\varphi - \varphi_0)\delta(z - z_0) , \quad (99)$$

En todos los casos, satisfacen

$$\int d\vec{r} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 1 . \quad (100)$$

C. Ecuación de Poisson

El resultado mas importante es

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \quad \text{ecuación de Poisson} \quad (101)$$

y la generalizada que se utiliza en la determinación de la función de Green en teoría electro-magnética (no lo veremos)

$$(\nabla^2 + k^2) \frac{\exp^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \quad (102)$$

IV. DESARROLLOS PARTICULARES

Para determinar el campo magnéticos \vec{B}

Si $\vec{F}_1 = \vec{A}_1 \times \vec{B}$, $\vec{F}_2 = \vec{A}_2 \times \vec{B}$ y $\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = 0$ (son perpendiculares) entonces vale

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_1 \times \vec{A}_1}{A_1^2} + \frac{\vec{A}_1 \cdot [(\vec{F}_2 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_1]}{A_1^2 A_2^2} \quad (103)$$

Para determinar la intensidad magnética \vec{H}

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{M} \times \vec{G}) &= -\vec{\nabla}(\vec{M} \cdot \vec{G}) + 2(\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{M} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{M}) \\ &\quad + \vec{M}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}) + \vec{M} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \end{aligned} \quad (104)$$

Si $\vec{M} = \vec{M}(\vec{x})$ no depende de las variables de derivación de $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}$:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times (\vec{M} \times \vec{G}) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{M} \cdot \vec{G}) + \vec{M}(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{G}) + \vec{M} \times (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{G}) \quad (105)$$

Si además $\vec{G} = \vec{G}(\vec{r})$ y tiene la siguiente expresión

$$\vec{G}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \quad (106)$$

entonces $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{G} = 0$, y $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{G} = -\nabla_{\vec{r}}^2 1/|\vec{x} - \vec{r}| = +4\pi\delta(\vec{x} - \vec{r})$, con lo que queda

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \left(\vec{M}(\vec{x}) \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}|} \right) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(\vec{M}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}|} \right) + 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{r})\vec{M}(\vec{r}) \quad (107)$$

Para demostrar la divergencia nula de \vec{A}

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} = \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \quad (108)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} = \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{J}(\vec{x})}_0 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} + \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \quad (109)$$

Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ (caso estacionario), y sabiendo que

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} = -\frac{\vec{r} - \vec{x}}{|\vec{r} - \vec{x}|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|}, \quad \text{entonces} \quad (110)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|}. \quad (111)$$

El truco básico

En varias situaciones vamos a estar interesado en calcular

$$f(\vec{r}) = \int_{\infty} d\vec{x} \vec{A}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right), \quad (112)$$

donde el ∞ indica que tenemos que integrar en todo el espacio. Usando (24)

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \left(\vec{A}(\vec{x}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) = \vec{A}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right), \quad (113)$$

(112) queda

$$f(\vec{r}) = \int_{\infty} d\vec{x} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \left(\vec{A}(\vec{x}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) - \int_{\infty} d\vec{x} \frac{(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}))}{|\vec{r} - \vec{x}|}, \quad (114)$$

y usando Gauss

$$f(\vec{r}) = \iint_{\circlearrowleft S_{\infty}} ds \frac{[\hat{n} \cdot \vec{A}(\vec{x})]}{|\vec{r} - \vec{x}|} + \int_{\infty} d\vec{x} \frac{[-\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x})]}{|\vec{r} - \vec{x}|}. \quad (115)$$

Y aquí siempre tenemos dos caminos.

Primer camino: si $\vec{A}(\vec{x})$ es no nulo dentro de un cierto volumen \mathcal{V} cuya superficie es \mathcal{S} entonces

$$f(\vec{r}) = \iint_{\circlearrowleft \mathcal{S}} ds \frac{[\hat{n} \cdot \vec{A}(\vec{x})]}{|\vec{r} - \vec{x}|} + \int_{\mathcal{V}} d\vec{x} \frac{[-\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x})]}{|\vec{r} - \vec{x}|} \quad (116)$$

así la cantidad $[\hat{n} \cdot \vec{A}(\vec{x})]$ se asociará a una distribución superficial de cargas eléctricas o de polos magnéticos, y $[-\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x})]$ se interpretará como una distribución volumétrica de cargas o polos.

El segundo camino consiste en mantener la integral hasta el infinito con lo que allí: $\vec{A}(\vec{x}) = 0$ y por lo tanto la primera integral del RHS se anula. Sobrevive la segunda. En ese caso $\vec{A}(\vec{x})$ tendrá un rango limitado por la Θ de Heaviside y el $\vec{\nabla}_{\vec{x}}$ (derivada) generara

(de acuerdo a (95)) una función δ de Dirac en la superficie, que reproducirá el término $[\hat{n} \cdot \vec{A}(\vec{x})]$ superficial anteriormente mencionado. Ambas estrategias son equivalentes.

Miraglia, Física 3, 1er. Cuat. 2013 (a16)