FISICA 3. Electricidad. 1er cuatrimestre de 2013

J. Miraglia

(Dated: April 28, 2013)

Abstract

LEY DE COULOMB.

Distribuciones de carga.Campo eléctrico. Potencial eléctrico. La fuerza eléctrica es conservativa. Ley de Gauss. Ecuaciones de Poisson y Laplace. Líneas de campo.

EXPANSION MULTIPOLAR

Monopolo, dipolo y cuadrupolo. Dipolo en un campo eléctrico. Interacción carga-dipolo. Interacción dipolo-dipolo. Dipolo inducido. Interacción dipolo-inducido dipolo-inducido. Lennard Jones.

ENERGIA ELECTROSTATICA

De un sistema de cargas puntuales. De una distribución continua. Autoenergía.

CONDUCTORES IDEALES. CAPACITORES

Propiedades. Método de las imagenes. Sistema de conductores. Capacitores de placas paralela. Energía acumulada dentro de un capacitor de placas paralelas.

DIELECTRICOS

Propiedades. Modelo Simple. Electrostáica macroscópica. Medios lineales isótropos y homogeneos (LIH). Efecto de bordes. Energía electrostática en presencia de dieléctricos. Sobre la ley de Coulomb en medios LIH. Ecuaciones de Poisson y Laplace en medios dieléctricos LIH. Condición de contorno de dos medios dieléctricos. Clausisus Mosotti.

MATERIALES OHMICOS Y CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

Ley de Ohm microscópica. Modelo de Drude. Corriente eléctrica. Velocidad de desplazamiento. Ley de Ohm macroscópica y macroscópica. Variación de la resistividad con la temperatura. Circulación del campo eléctrico. Fuerza electromotriz. Ley de Joule. Leyes de Kirchhoff. Materiales Eléctricos.

(**falta**, incluir figuras y tablas, corregir, poner acentos)

PACS numbers:

I. LEY DE COULOMB (1785)

Se encuentra experimentalmente (por lo cual es una ley) que la fuerza con la que se atraen (o repelen) dos cargas puntuales en reposo (electrostática) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La fuerza que sufre la particula "1" (q_1 en $\vec{r}_1$) debido a la "2 " (q_2 en $\vec{r}_2$) está dada por

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{12} &= k_e q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, && \textbf{Ley de Coulomb} && (1)\\
&= k_e q_2 q_1 \frac{\hat{r}}{r^2}, \qquad \text{con} \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, && && (2)\\
k_e &= 8.988 \times 10^9 \frac{Kgm^3}{C^2 s^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, && \textbf{constante eléctrica,} && (3)\\
\varepsilon_0 &= 8.8542 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} = \textbf{permitividad eléctrica del vacío,} && && (4)\\
[q] &= \text{Coulomb}{=}6.245 \times 10^{18} e && && (5)\\
e &= \textbf{carga del electrón,} && && (6)
\end{aligned}$$

con lo que introducimos una nueva unidad: el Coulomb (pasamos de MKS a MKSC). En consecuencia la fuerza que sufre la partícula "2" debido a la "1 " ($\vec{r}_1 \longleftrightarrow \vec{r}_2$) está dado por

$$\vec{F}_{21} = k_e q_2 q_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\vec{F}_{12}, \tag{7}$$

Se desprende que:

- $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, por lo que se satisface el **ppio. de acción y reacción.**
- Si el signo($q_1 q_2$)=+1, las partículas se repelen; $\vec{F}_{12} \upuparrows \hat{r}$, y $\vec{F}_{21} \upuparrows (-\hat{r})$
- Si el signo($q_1 q_2$)=-1, las partículas se atraen; $\vec{F}_{12} \upuparrows (-\hat{r})$, y $\vec{F}_{21} \upuparrows \hat{r}$
- Comparando con la gravitación

$$\vec{F}_{21} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \qquad G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kgs^2}\ , \tag{8}$$

G es entonces 20 órdenes de magnitud más grande que k_e. Más aún; si comparamos la interacción eléctrica con la gravitatoria en un sistema electrón-protón ($m_p = 1836 m_e$, $m_e = 9.1094 \times 10^{-31} Kg$); La eléctrica resulta ser 39 órdenes de magnitud mayor!

Principio de conservación de la carga eléctrica: En un sistema aislado, la carga total se conserva (será importante para la ecuación de continuidad), es decir

$$q_{tot} = \sum_i q_i = \text{constante} \quad \text{(suma algebráica)}. \tag{9}$$

Principio de superposición: La fuerza $\overrightarrow{F}_0$ que sobre una partícula (q_0 en $\overrightarrow{r}_0$) ejerce un sistema de partículas (q_i en $\overrightarrow{r}_i$) está dado por (suma vectorial):

$$\overrightarrow{F}_0 = \sum_i \overrightarrow{F}_{0i} = \sum_i k_e q_0 q_i \frac{\overrightarrow{r}_0 - \overrightarrow{r}_i}{|\overrightarrow{r}_0 - \overrightarrow{r}_i|^3} . \tag{10}$$

A. Distribuciones de carga

Para determinar la fuerza que ejerce cualquier cuerpo continuo sobre una carga puntual (q_0 en $\overrightarrow{r}_0$) nos conviene dividir el cuerpo en pequeños diferenciales centrados en $\overrightarrow{r}_i$ con carga dq_i y usar el principio de superposición:

$$\overrightarrow{F}_0 = \sum_i k_e q_0 (dq_i) \frac{\overrightarrow{r}_0 - \overrightarrow{r}_i}{|\overrightarrow{r}_0 - \overrightarrow{r}_i|^3} . \tag{11}$$

Pasando al cálculo diferencial, podemos especificar si el cuerpo es:

- volumétrico, $dq_i = \rho d\overrightarrow{r}$, con ρ densidad volumétrica de carga $[\rho] = C/m^3$,
- superficial, $dq_i = \sigma da$, con σ densidad superficial de carga $[\sigma] = C/m^2$,
- lineal, $dq_i = \lambda dl$, con λ densidad lineal de carga $[\lambda] = C/m$.

En el límite la suma se transfiorma en una integral, $\sum_i \to d\overrightarrow{r}'$ (variable continua) por lo que

$$\overrightarrow{F}_0 = k_e q_0 \int \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} d\overrightarrow{r}'\ \rho(r') \\ da'\ \sigma(a') \\ dl'\ \lambda(l') \end{array} \right\}}_{dq'} \frac{\overrightarrow{r}_0 - \overrightarrow{r}'}{|\overrightarrow{r}_0 - \overrightarrow{r}'|^3} , \tag{12}$$

donde hemos considerado una posible variación espacial ($\overrightarrow{r}'$, a' ó l') de la densidad de carga.

Si estamos interesados en calcular la interacción entre cuerpos continuos, hacemos lo mismo: dividimos los dos cuerpos en pequeños diferenciales, usamos el principio de superposición y pasamos a la integral. Para el caso de dos volumenes tendremos que la fuerza que sobre el cuerpo "1 " (con ρ_1) le ejerce el "2" (con ρ_2), está dado por (como en gravitación)

$$\vec{F}_{12} = k_e \int\int \underbrace{d\vec{r}_1 \; \rho_1(\vec{r}_1)}_{dq_1} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \underbrace{\rho_2(\vec{r}_2) d\vec{r}_2}_{dq_2} . \tag{13}$$

Retrocediendo, si en lugar de cuerpos continuos tuvieramos una partícula puntual "a " (q_a en $\vec{r}_a$) y otra "b " (q_b en $\vec{r}_b$), las distribuciones pueden escribirse como

$$\rho_1(\vec{r}_1) = q_a \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_a) \qquad \text{y} \qquad \rho_2(\vec{r}_2) = q_b \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_b) \; , \tag{14}$$

usando la propiedad de la delta, obtenemos

$$\vec{F}_{12} = k_e q_a q_b \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3}, \tag{15}$$

que es la Ley de Coulomb original (1). La densidad de carga de las partículas puntuales son representadas por funciones δ.

B. Campo eléctrico

Vimos que la fuerza que sufre la partícula (q en $\vec{r}$) debido a la "1" (q_1 en $\vec{r}_1$) está dada por

$$\vec{F} = k_e q q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \; . \tag{16}$$

Definimos el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} = k_e q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \; , \tag{17}$$

$\vec{E}$ es un vector y sus unidades son $[E]$=$N/C = Kg \; m/(s^2 C)$. Luego podemos escribir que

$$\vec{F} = q\vec{E} \; , \tag{18}$$

en forma similar al caso gravitatorio: $\vec{F} = m\vec{g}$, donde $\vec{g}$ era el campo gravitatorio. Si en lugar de una partícula puntual (q_1 en $\vec{r}_1$), tuviesemos una distribución continua, debemos proceder como en el caso anterior. Esto es: dividir el cuerpo en pequeños diferenciales centrados en $\overrightarrow{r}_i$ con carga dq_i y usar el principio de superposición, y llegamos a

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = k_e \int \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} d\overrightarrow{r}'\ \rho(r') \\ da'\ \sigma(a') \\ dl'\ \lambda(l') \end{array} \right\}}_{dq'} \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} \quad = \quad \textbf{campo eléctrico.} \tag{19}$$

El límite en (17) conlleva un concepto físico importante: la carga tiene que ser lo suficientemente pequeña para no distorsionar las distribuciones que ocacionan el campo $\overrightarrow{E}$. Por esa razón a q se la llama carga de prueba (*test charge).*

C. Potencial eléctrico

Usando ecuaciones del Apéndice, resulta que (19) puede reescibirse así:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= k_e \int d\overrightarrow{r}'\ \rho(r') \left[-\nabla_{\overrightarrow{r}} \left(\frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \right) \right] , & (20) \\ &= -\nabla_{\overrightarrow{r}} V(\overrightarrow{r}), & (21) \\ V(\overrightarrow{r}) &= k_e \int d\overrightarrow{r}'\ \rho(r') \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \quad = \quad \textbf{potencial eléctrico ,} & (22) \end{aligned}$$

$V(\overrightarrow{r})$ es el potencial eléctrico, es un escalar y sus unidades son $[V]$ = Voltios$=m^2Kg/(s^2C)$. Con lo cual podemos redefinir las unidades del campo como $[E]$=N/C=V/m. Vale la siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= q\overrightarrow{E} = -q\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} V(\overrightarrow{r}) = -\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \left[qV(\overrightarrow{r}) \right] = -\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} U(\overrightarrow{r}) , & (23) \\ U(\overrightarrow{r}) &= \textbf{energía potencial eléctrica}, \qquad [U] = Joule{=}Kgm^2/s^2 . & (24) \end{aligned}$$

Otra forma de definir el potencial (que será importante cuando veamos la batería) $V = U/q$, o sea energía (trabajo) por unidad de carga. Como siempre, si las ditribuciones de cargas son superficiales o lineales vale la sustitución (19) en (22), o sea

$$V(\overrightarrow{r}) = k_e \int \left\{ \begin{array}{c} d\overrightarrow{r}'\ \rho(r') \\ da'\ \sigma(a') \\ dl'\ \lambda(l') \end{array} \right\} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}. \tag{25}$$

D. La fuerza eléctrica es conservativa

Si $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} V(\overrightarrow{r})$, entonces (ver Apéndice)

$$\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \times \overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \times [-\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} V(\overrightarrow{r})] = 0. \tag{26}$$

Si el $\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \times \overrightarrow{E} = 0$, usando el teorema de Stokes

$$0 = \iint_{\mathcal{S}} d\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \times \overrightarrow{E} = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = 0 = \frac{1}{q} \oint_{C} \left(q\overrightarrow{E}\right) \cdot d\overrightarrow{l} = \frac{1}{q} \oint_{C} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = 0\ . \tag{27}$$

Si $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = 0$, implica que el trabajo a lo largo de una curva cerrada es nulo, que es la definición básica de una fuerza conservativa. Nos ahorramos así la introducción pedestre de realizar un trabajo cuasiestacionario como se hace en los cursos básicos.

E. Ley de Gauss

Se define $d\phi_E = \overrightarrow{E} \cdot \widehat{n}\ da$ = diferencial de flujo eléctrico, entonces el flujo en una determinada superficie $\mathcal{S}$ es simplemente

$$\phi_E = \iint_{\mathcal{S}} d\phi_E = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \widehat{n}\ da = \qquad \textbf{flujo electrico ,} \tag{28}$$

(analogía con los fluidos: $\overrightarrow{E} \to \overrightarrow{v}$ = velocidad local del fluido, por lo que $d\phi_v = \overrightarrow{v} \cdot \widehat{n}\ da$=m^3/seg =caudal). Vamos a demostrar la ley de Gauss en dos etapas. Primero consideremos una partícula puntual de carga q_1 en la posición $\overrightarrow{r}_1$. El campo eléctrico $\overrightarrow{E}_1$ generado por esa partícula es por Coulomb

$$\overrightarrow{E}_1 = k_e q_1 \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|^3} = -k_e q_1 \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|}, \quad \text{entonces} \tag{29}$$

$$\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \cdot \overrightarrow{E}_1 = -k_e q_1 \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|} = -k_e q_1 \nabla^2 \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1|} \tag{30}$$

$$= 4\pi k_e q_1 \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1) = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1) \tag{31}$$

donde hemos usado la propiedad del laplaciano de la función δ (ver Apéndice, teorema de Poisson) y la relación entre k_e y ε_0 dado por la relación (3). Ahora tomemos cualquier superficie cerrada $\mathcal{S}$ que encierra un volumen $\mathcal{V}$, y hagamos la integral sobre dicho volumen

$$\int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}\ \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \cdot \overrightarrow{E}_1 \;=\; \int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}\ \frac{q_1}{\varepsilon_0}\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_1) = \begin{cases} q_1/\varepsilon_0, & \text{si q}_1 \text{ dentro de } \mathcal{V} \\ 0, & \text{si q}_1 \text{ fuera de } \mathcal{V} \end{cases} \tag{32}$$

$$= \iint_{\bigcirc \mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \widehat{n}\, da \qquad \text{(Teorema de la divergencia)} \tag{33}$$

con lo que

$$\varepsilon_0 \iint_{\bigcirc \mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \widehat{n}\, da \;\; = q_{enc} = \begin{cases} q_1, & \text{si q}_1 \text{ dentro de } \mathcal{V} \\ 0, & \text{si q}_1 \text{ fuera de } \mathcal{V} \end{cases} \tag{34}$$

Ahora generalicemoslo para cualquier cuerpo continuo. Como siempre, discreticemoslo en pequeños volumenes con cargas $dq_j = d\overrightarrow{r}\ \rho(r_j)$

$$\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \cdot \overrightarrow{E} \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_j\ dq_j \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j), \tag{35}$$

$$\int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}\ \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}} \cdot \overrightarrow{E} \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{j\ dentro\ de\ \mathcal{V}} dq_j \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j) = \tag{36}$$

Tomado el límite, pasamos de Σ_j a la integral $\int_{\mathcal{V}}$ con $dq_j \rightarrow d\overrightarrow{r}\ \rho(\overrightarrow{r}')$. entonces llegamos a

$$\boxed{\varepsilon_0 \iint_{\bigcirc \mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \widehat{n}\, da = q_{enc} = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\overrightarrow{r}'\ \rho(\overrightarrow{r}') \qquad \textbf{Ley de Gauss ,}} \tag{37}$$

($\bigcirc\mathcal{S}$ significa superficie que encierra a $\mathcal{V}$). Por q_{enc} nos referimos a la suma de las cargas que están **dentro** de $\mathcal{V}$, no fuera. Y ésta es la famosa ecuación de Gauss que se utiliza para calcular campos eléctricos cuando la simetría del caso es simple: esférica, cilíndrica o planar.

Usando el teorema de la divergencia, tenemos

$$\varepsilon_0 \iint_{\bigcirc \mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \widehat{n}\, da = \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}\ \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} \;\; = \int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}'\ \rho(\overrightarrow{r}'). \tag{38}$$

Como vale para cualquier volumen que consideremos, entonces podemos decir que $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \rho(\overrightarrow{r})/\varepsilon_0$. Las ecuaciones fundamentales del campo electricostático son entonces

$$
\boxed{\begin{array}{ll} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho(\overrightarrow{r})}{\varepsilon_0} & \textbf{Ecuación de la divergencia,} \\ \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = 0 & \textbf{Ecuación del rotor.} \end{array}} \tag{39}
$$

F. Ecuaciones de Poisson y Laplace

Combinando la ecuaciónde de la divergencia $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \rho(\overrightarrow{r})/\varepsilon_0$ con la del rotor que deduce que $\overrightarrow{E} = -\nabla_{\overrightarrow{r}} V$, y sabiendo $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} = \nabla^2$, llegamos a la ecuación de Poisson

$$
\boxed{\nabla^2 V = -\,\rho/\varepsilon_0 \ , \qquad \textbf{Ecuación de Poisson .}} \tag{40}
$$

(para simplificar, de aquí en más omitiremos $(\overrightarrow{r})$ cuando sea posible: se entiende por ejemplo que $\nabla^2 = \nabla^2_{\overrightarrow{r}}$). En los lugares donde no hay carga presente $\rho = 0$, la ecuación se reduce a

$$
\boxed{\nabla^2 V = 0 \ , \qquad \textbf{Ecuación de Laplace} \ .} \tag{41}
$$

Que debe resolverse con condiciones de contorno sobre una superficie cerrada, y la soluciónes unica.

• Si en dicha superficie se impone V , las condiciones se denominan condiciones de Dirichlet.

• Si en dicha superficie se impone $\partial V/\partial n$ ($\widehat{n}$ la dirección normal a la superficie, esencialmente el campo eléctrico) se denominan condiciones de Neuman y tambien la solución es única.

Se puede imponer condiciones mixtas. Las condiciones no pueden ser redundantes.

G.

H. Líneas de campo

Es una curva imaginaria que se dibuja de tal manera que su dirección en cualquier punto coincida con la dirección del campo eléctrico. Tiene una semejanza con las líneas de fluido. Se encuentra que:

• Las líneas de campo NO se cruzan.

• Nacen en las cargas positivas (fuentes) y mueren en las negativas (sumideros). [Analogia con los fluidos: canillas y rejillas].

• El campo es más intenso donde se juntan las líneas de campo [velocidad de salida del fluido es mayor cuando se exsrangula una manguera].

• La líneas equipotenciales (igual valor de V) son perpendiculares a las líneas de campo. La demostración ses simple; hagamos un desarrollo de Taylor del potencial en el punto $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0$

$$\begin{aligned} V(\overrightarrow{r}) &= V(\overrightarrow{r}_0) + (x - x_0) \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\overrightarrow{r}_0} + (y - y_0) \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\overrightarrow{r}_0} + (z - z_0) \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{\overrightarrow{r}_0} + ..., \\ &= V(\overrightarrow{r}_0) + \delta\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\nabla} V = V(\overrightarrow{r}_0) - \delta\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{E} \ , \end{aligned} \tag{42}$$

si $\delta\overrightarrow{r}$ es perpendicular a $\overrightarrow{E}$ entonces $\delta\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{E} = 0$ y $V(\overrightarrow{r}_0) = V(\overrightarrow{r})$ (dirección equipotencial).

II. EXPANSIÓN MULTIPOLAR

Usando las expansiones del Apéndice para grandes distancias se muestra que, para cualquier distribución de carga, a grandes distancias ($r \to \infty$) su potencial se comporta como

$$V(\overrightarrow{r}) = k_e \int d\overrightarrow{r}' \ \rho(r') \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \tag{43}$$

$$\underset{r\to\infty}{\to} k_e \int d\overrightarrow{r}' \ \rho(r') \left[\frac{1}{r} + \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \left\{3(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{r}')^2 - r'^2 r^2\right\} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)\right] \ , \tag{44}$$

$$V(\overrightarrow{r}) \underset{r\to\infty}{\to} k_e \frac{q}{r} + k_e \frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{r}}{r^3} + k_e \frac{\overrightarrow{r} . \overline{\overline{Q}} . \overrightarrow{r}}{2r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) \ , \tag{45}$$

donde r es mucho mayor que las dimensiones del cuerpo en cuestión, y

$$q = \int d\overrightarrow{r}' \ \rho(\overrightarrow{r}') \qquad \textbf{monopolo} \ , \tag{46}$$

$$\overrightarrow{p} = \int d\overrightarrow{r}' \ \rho(\overrightarrow{r}') \ \overrightarrow{r}' \qquad \textbf{dipolo} \ , \tag{47}$$

$$Q_{i,j} = \int d\overrightarrow{r}' \rho(\overrightarrow{r}') [3x'_i x'_j - r^2 \delta_{ij}] \qquad \textbf{cuadrupolo} \ . \tag{48}$$

A. Dipolo

El caso más elemental se ilustra como dos cargas de igual magnitud q pero de signos opuestos colocadas en $\pm\overrightarrow{d}/2$. La densidad es entonces

$$
\begin{aligned}
\rho(\overrightarrow{r}) &= +q\delta(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{d}/2)-q\delta(\overrightarrow{r}+\overrightarrow{d}/2), \quad \text{entonces} \ , && (49)\\
\overrightarrow{p} &= \int d\overrightarrow{r}' \left[q\delta(\overrightarrow{r}'-\overrightarrow{d}/2)-q\delta(\overrightarrow{r}'+\overrightarrow{d}/2)\right] \overrightarrow{r}' = q\frac{\overrightarrow{d}}{2}-\left(-q\frac{\overrightarrow{d}}{2}\right) && (50)\\
\overrightarrow{p} &= q\,\overrightarrow{d} \ , \qquad / \quad \overrightarrow{d} \ \text{ va de } \ominus \rightarrow \oplus \ . && (51)
\end{aligned}
$$

Usando el álgebra del Apéndice, el campo eléctrico resulta

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{E} &= -\overrightarrow{\nabla}V(\overrightarrow{r}) = -\overrightarrow{\nabla}\left(k_e\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}}{r^3}\right) = -k_e\left[(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r})\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)+\frac{1}{r^3}\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r})\right] && (52)\\
&= \frac{k_e}{r^3}\left[3\,(\overrightarrow{p}\cdot\widehat{r})\cdot\widehat{r}-\widehat{p}\right] \ . && (53)
\end{aligned}
$$

Usaremos mucho esta expresión.

B. Dipolo en un campo electrico

El dipolo permanente debe considerarse como un rígido. En un campo eléctrico constante (digamos $\overrightarrow{\nabla}E_{x,y,z}=0$) la resultante de las fuerzas $\overrightarrow{F}$ es nula por lo que su centro de masa permanece en reposo,

$$
\sum\overrightarrow{F} = (+q)\overrightarrow{E}+(-q)\overrightarrow{E} = 0 \ , \qquad \text{centro de masa en equilibrio} \ , \qquad (54)
$$

pero sufre un torque $\overrightarrow{\tau}$:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\tau} &= \sum_j \overrightarrow{r}_j\times\overrightarrow{F}_j = (\overrightarrow{d}/2)\times(q\overrightarrow{E})+(-\overrightarrow{d}/2)\times(-q\overrightarrow{E}) = (q\,\overrightarrow{d})\times\overrightarrow{E} && (55)\\
&= \overrightarrow{p}\times\overrightarrow{E} \ . && (56)
\end{aligned}
$$

Esto implica que un dipolo oscila en presencia de un campo eléctrico como un péndulo intercambiando energía cinética y potencial. Supongamos un dipolo originariamente alineado con el campo eléctrico ($\overrightarrow{\tau}=0$), entonces para moverlo a un ángulo θ debemos realizar un trabajo externo con $\overrightarrow{\tau}^{ext}$, que resulta ser

$$\int_0^\theta \overrightarrow{\tau}^{ext}\cdot d\overrightarrow{\theta} = \underbrace{\widehat{\tau}\cdot\widehat{\theta}}_{1}\int_0^\theta pE\sin(\theta)d\theta = -pE\cos(\theta)+pE\cos(0) = U(\theta)-U(0) \quad (57)$$

$$U(\theta) = -\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{E}\ , \qquad \text{Energía potencial .} \quad (58)$$

Si el el campo eléctrico es <u>variable</u> en la posición del dipolo (digamos $\overrightarrow{\nabla}E_{x,y,z}\neq 0$), entonces sufre una fuerza resultante que resulta ser

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} &= -\overrightarrow{\nabla}U = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{E}) = (\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{E} + \underbrace{(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{p}}_{0} + \\ &\qquad \overrightarrow{p}\times(\underbrace{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}}_{0}) + \overrightarrow{E}\times(\underbrace{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{p}}_{0})\ , \quad (59)\\ \overrightarrow{F} &= \left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{E} = \left(p_x\frac{\partial}{\partial x}+p_y\frac{\partial}{\partial y}+p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(E_x,E_y,E_z) \quad (60)\end{aligned}$$

C. Interacción carga-dipolo

Apliquemos la ecuación (60) para un dipolo $\overrightarrow{p}$ permanente en un campo electrico central creado por una carga q en el origen

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\nabla}U = \left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\left[k_e q\frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|^3}\right] = -\frac{2k_e q(\overrightarrow{p}\cdot\widehat{r})}{r^3}\widehat{r} \quad (61)$$

Entonces vale:

- Si $q>0$ y $\overrightarrow{p}\cdot\widehat{r}>0$, entonces $\overrightarrow{F}\cdot\widehat{r}<0$, el dipolo es atraido.
- Si $q<0$ y $\overrightarrow{p}\cdot\widehat{r}>0$, entonces $\overrightarrow{F}\cdot\widehat{r}>0$, el dipolo es repelido.

Lo cual es lógico.

D. Interacción dipolo-dipolo

Consideremos el campo eléctrico $\overrightarrow{E}_1$ creado por dipolo $\overrightarrow{p}_1$ en el origen, cuya expresión está dado por (52), si colocamos en ese campo $\overrightarrow{E}_1$ un dipolo $\overrightarrow{p}_2$, la energía de interacción estara dada por (58), o sea

$$U_2 \;=\; -\overrightarrow{p}_2 \cdot \overrightarrow{E}_1 = -\overrightarrow{p}_2 \cdot \frac{k_e}{r^3}\left[3\left(\overrightarrow{p}_1 \cdot \widehat{r}\right)\cdot \widehat{r} - \widehat{p}_1\right] \;, \tag{62}$$

$$\;=\; \frac{k_e}{r^3}\left[\widehat{p}_1 \cdot \widehat{p}_2 - 3\left(\overrightarrow{p}_1 \cdot \widehat{r}\right)\cdot\left(\overrightarrow{p}_2 \cdot \widehat{r}\right)\right] \;. \tag{63}$$

Notar que $U_1(\overrightarrow{p}_1, \overrightarrow{p}_2) = U_1(\overrightarrow{p}_2, \overrightarrow{p}_1)$, lo que resulta equivalente a poner $\overrightarrow{p}_1$ en el campo eléctrico $\overrightarrow{E}_2$ creado por $\overrightarrow{p}_2$: o sea $U_2 = -\overrightarrow{p}_1 \cdot \overrightarrow{E}_2 = U_1 = U$. Hay que aclarar que los dipolos estan fijos y no les permitimos rotar (electrostática). Si estamos interesados en la fuerza que sobre el dipolo $\overrightarrow{p}_2$ ejerce el dipolo $\overrightarrow{p}_1$, usando (23) se obtiene (ver Apéndice)

$$\overrightarrow{F}_{21} = -\overrightarrow{\nabla} U_2 = \frac{k_e}{r^4}\left[3(\widehat{p}_1 \cdot \widehat{p}_2)\widehat{r} - 15(\widehat{p}_1 \cdot \widehat{r})(\widehat{p}_2 \cdot \widehat{r}) + 3(\widehat{p}_2 \cdot \widehat{r})\widehat{p}_1 + 3(\widehat{p}_1 \cdot \widehat{r})\widehat{p}_3\right] \;. \tag{64}$$

Cuatro casos son interesantes:

• $\widehat{p}_1 = \widehat{r}$, y $\widehat{p}_2 = \widehat{r}$, entonces $\overrightarrow{F}_{21} = -6k_e(\widehat{p}_1 \cdot \widehat{p}_2)\widehat{r}/r^4 \Rightarrow$ se atraen.

• $\widehat{p}_1 = \widehat{r}$, y $\widehat{p}_2 = -\widehat{r}$, entonces $\overrightarrow{F}_{21} = +6k_e(\widehat{p}_1 \cdot \widehat{p}_2)\widehat{r}/r^4 \Rightarrow$ se repelen.

• $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_2$ y $\widehat{p}_1 \cdot \widehat{r} = \widehat{p}_2 \cdot \widehat{r} = 0$, entonces $\overrightarrow{F}_{21} = +3k_e(p_1 p_2)\,\widehat{r}/r^4 \Longrightarrow$ se repelen.

• $\widehat{p}_1 = -\widehat{p}_2$ y $\widehat{p}_1 \cdot \widehat{r} = \widehat{p}_2 \cdot \widehat{r} = 0$, entonces $\overrightarrow{F}_{21} = -3k_e(p_1 p_2)\,\widehat{r}/r^4 \Longrightarrow$ se atraen.

Estas configuraciones serán de utilidad cuando consideremos los dieléctricos.

E. Dipolo inducido

Hasta ahora hemos visto la interacción con dipolos permanentes, tales como moléculas de NaCl ó H_2O. Pero también una molécula o átomo neutro (sin momento dipolar permanente) en presencia de un campo eléctrico puede distorsionarse al punto de que se induce un dipolo. A estos dipolos se los llaman dipolos inducidos. El cálculo del dipolo a nivel átomico se obtiene con la mecánica cuántica. De cualquier manera podemos hacer un modelito unidimensional simple para entenderlo. Supongamos un electron de carga (negativa) e ligado a su nucleo (positivo) con un "resorte" de constante k en su estado de equilibrio (u oscilando alrededor de su posición de equilibrio). En presencia de $\overrightarrow{E}$ el electrón sufre una fuerza -$e\overrightarrow{E}$ adicional, por lo tanto ocurre un desplazamiento alrededor de su posición de equilibrio, tal que -$eE = kd$, y genera dipolo $\mu = -ed$, entonces podemos escribir

$$\overrightarrow{\mu} = -e\overrightarrow{d} = \frac{e^2}{k}\overrightarrow{E} \;. \tag{65}$$

(es inducido ya que si $\overrightarrow{E} = 0$, entonces $\overrightarrow{\mu} = 0$). Su energía resulta ser en general (Debye, London)

- $U = -\overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{E} = -e^2 E^2/k$.
- Si además ese campo E es creado por una carga puntual q a una distancia r, entonces

$$U = -\overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{E} = -\frac{e^2 \overrightarrow{E}}{k} \overrightarrow{E} = -\frac{e^2}{k} \left[k_e \frac{q}{r^2} \right]^2 = -\frac{q^2}{2} \frac{\alpha}{r^4}, \qquad \alpha = \textbf{polarizabilidad.} \tag{66}$$

La magnutud α es muy importante en física atómica. Volveremos cuando veamos Claussius Mossotti.

- Si ese campo E es creado por dipolo permanente $\overrightarrow{p}$ en el origen, entonces resulta

$$U = -\overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{E} = -\frac{e^2}{k} \left(\frac{k_e}{r^3} \left[3 \left(\overrightarrow{p} \cdot \widehat{r} \right) \cdot \widehat{r} - \widehat{p} \right] \right)^2 \propto -\frac{1}{r^6} \tag{67}$$

F. Interacción dipolo inducido-dipolo inducido

Otro caso muy importante es la interacción de dos átomos neutros que se inducen uno al otro dipolos La energía de interacción es $U \propto -C_6/r^6$ y ese potencial se conoce como Lennard Jones, que explica la formación de moléculas tales como H_2, N_2, O_2, etc, cluster de gases raros, cristales de gases raros a bajas temperaturas (BE), etc. La forma más común es escribirla así

$$U_{LJ} = U_0 \left[2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \qquad \textbf{Lennard Jones ,} \tag{68}$$

(el término $(r_0/r)^{12}$ es un artefacto matemático irreal). Se puede probar que la posición de equilibrio de la molécula ($dU_{LJ}/dr = 0$) es $r = r_0$.

G. Potenciales a largas distancias. Resumen

Las energías de interacción entre cargas puntuales ($\bullet$), dipolos permanentes ($\uparrow$), cuadrupolos ($\square$), y diplos inducidos ($\rightsquigarrow$), se pueden resumir asi:

$$\begin{cases} E = cte \quad \text{sobre} \quad q, & \overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} \\ E = cte \quad \text{sobre} \quad \overrightarrow{p}, & \overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{E} \end{cases} \tag{69}$$

$$\begin{cases} \bullet\, q \ \text{ interactuando con } & \bullet \quad q', \quad U \propto \frac{1}{r} \\ \bullet\, q \qquad\quad " & \uparrow \quad \overrightarrow{p}, \quad U \propto \frac{1}{r^2} \\ \bullet\, q \qquad\quad " & \square \ Q, \quad U \propto \frac{1}{r^3} \\ \bullet\, q \qquad\quad " & \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\mu}, \quad U \propto \frac{1}{r^4} \end{cases} \tag{70}$$

$$\begin{cases} \uparrow \overrightarrow{p} \ \text{ interactuando con } & \bullet \quad q', \quad U \propto \frac{1}{r^2} \\ \uparrow \overrightarrow{p} \qquad\quad " & \uparrow \quad \overrightarrow{p}', \quad U \propto \frac{1}{r^3} \\ \uparrow \overrightarrow{p} \qquad\quad " & \square \ Q, \quad U \propto \frac{1}{r^4} \\ \uparrow \overrightarrow{p} \qquad\quad " & \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\mu}, \quad U \propto \frac{1}{r^6} \end{cases} \tag{71}$$

$$\left\{ \square \ Q \ \text{ interactuando con } \ \square \ Q', \quad U \propto \frac{1}{r^5} \right. \tag{72}$$

$$\left\{ \rightsquigarrow \ \overrightarrow{\mu} \ \text{ interactuando con } \ \rightsquigarrow \ \overrightarrow{\mu}, \quad U \propto \frac{1}{r^6} \ . \right. \tag{73}$$

Con estas dependencias se puede interpretar gran parte de la Química (ligaduras, mecanismos de reacción), la Fisicoquímica (entalpías, etc), la Termodinámica (coeficientes de Virial), etc.

III. ENERGIA ELECTROSTATICA

Para construir una configuración de cargas eléctricas, se requiere energía (trabajo). En esta sección calcularemos la energía necesaria para construir un ensamble de cargas puntuales y distribuciones continuas.

A. De un sistema de cargas puntuales

Primeramente calcularemos la energía necesaria para construir un ensamble de cargas puntuales q_i en $\overrightarrow{r}_i$. Las vamos trayendo de a una desde el infinito, considerando que V(∞)=0. La primera partícula, la "1", no requiere energía: $U_1 = 0$. La segunda, la "2", la traemos en presencia de la "1" y hacemos un trabajo $U_2 = q_2 V_{12}$, donde V_{12} es el potencial creado por la partícula "1" en la posición "2". En general definimos

$$V_{ij} = \frac{k_e q_i}{|\overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_j|} \ . \tag{74}$$

Luego traemos la "3", en presencia de la "1" y "2"; $U_3 = q_3 V_{13} + q_3 V_{23}$. Y asi sucesivamente, produciendo

$$U = \sum_{j=1} U_j = \sum_{j=1} q_j \sum_{i<j} V_{ij} \ . \tag{75}$$

Usando el hecho que $q_j V_{ij} = q_i V_{ji}$ obtenemos

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{i \neq j} q_j V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{i \neq j} q_j \frac{k_e}{|\overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_j|} q_i = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{i \neq j} q_j p_{ji} q_i \ . \tag{76}$$

que se puede poner en forma vectomatricial, definiendo un vector $\overline{q} = (q_1, q_2.....)$, y una matriz $\overline{\overline{p}}$, entonces

$$U = \frac{1}{2} \overline{q} \times \overline{\overline{p}} \times \overline{q}, \qquad \text{con} \ \ p_{ji} = \frac{k_e}{|\overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_j|} \ \text{y} \ \ p_{ii} = 0 \ . \tag{77}$$

B. De una distribución continua

Para una distribución continua, la rutina es siempre la misma: dividir el volumen dado en pequeños volumenes de carga $dq = \rho(\overrightarrow{r}) d\overrightarrow{r}$ y luego integrar, obteniendose a partir de (75)

$$U = \frac{1}{2} \int d\overrightarrow{r} \ \rho(r) V(\overrightarrow{r}) \ . \tag{78}$$

donde $\int d\overrightarrow{r}$ se entiende que es en todo el espacio hasta el infinito. Otra expresión muy importante puede obtenerse a partir de la ecuación (22) resultando

$$U = \frac{1}{2} \int d\overrightarrow{r} \ \rho(r) \ \underbrace{k_e \int d\overrightarrow{r}' \ \rho(r') \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}}_{V(\overrightarrow{r})} \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2} \iint d\overrightarrow{r} \ d\overrightarrow{r}' \ \rho(\overrightarrow{r}) \frac{k_e}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \ \rho(\overrightarrow{r}') \ . \tag{80}$$

Esta última expresión es muy uilizada en Química Cuántica (nótese que la energía electrostática depende sólo de ρ, o sea que es un funcional de la densidad (*density functional theory*). Para otras ditribuciones podemos usar la equivalencia (**??**).

Una tercera expresión de la energía, muy util, se obtiene a partir de (78) expresandola en términos del campo eléctrico. Usando la ecuación de la divergencia (39)

$$U=\frac{1}{2}\int d\overrightarrow{r}'\rho(\overrightarrow{r}')V(\overrightarrow{r}')=\frac{1}{2}\int d\overrightarrow{r}'\underbrace{\left(\varepsilon_0\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}\right)}_{\rho(\overrightarrow{r}')}V(\overrightarrow{r}') \tag{81}$$

Hagamos ahora un truco para cambiar la posición de $\overrightarrow{\nabla}$, que lo repetiremos mucho a lo largo del curso. Según el Apéndice, podemos escribir

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{E}V\right)=\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}\right)V+\overrightarrow{E}\underbrace{\left(\overrightarrow{\nabla}V\right)}_{-\overrightarrow{E}}=V\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}\right)V-|E|^2 \tag{82}$$

reemplazando en (81), resulta

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int d\overrightarrow{r}'\left[|E|^2+\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{E}V\right)\right], && (83)\\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int d\overrightarrow{r}'\,|E|^2+\underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\int d\overrightarrow{r}'\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{E}V\right)}_{\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} d\overrightarrow{s}'\overrightarrow{E}V}, && (84)\end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia. Como integramos en todo el espacio, la superficie cerrada $\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}}$ es una integral superficial en el infinito. Allí en el peor de los casos ($\overrightarrow{E}$ generado por cargas culombiana) tenemos

$$\mathcal{S}EV \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} r^2\frac{1}{r^2}\frac{1}{r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{r} \tag{85}$$

con lo cual no contribuye, queda entonces

$$U=\frac{\varepsilon_0}{2}\int d\overrightarrow{r}'\left|\overrightarrow{E}\right|^2, \tag{86}$$

y recordemos que $\int d\overrightarrow{r}'$ involucra todo el espacio.

Resumamos entonces las tres expresiones de la energía

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\iint d\overrightarrow{r}\ d\overrightarrow{r}'\ \rho(\overrightarrow{r})\frac{k_e}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}\ \rho(\overrightarrow{r}') && (87)\\ &= \frac{1}{2}\int d\overrightarrow{r}'\rho(\overrightarrow{r}')V(\overrightarrow{r}')\ =\ \frac{\varepsilon_0}{2}\int d\overrightarrow{r}'\left|\overrightarrow{E}\right|^2 && (88)\end{aligned}$$

C. Autoenergía

Notemos que si partimos de (78) y queremos calcular la energía para construir una sola partícula puntual de carga q , entonces $\rho(\overrightarrow{r}') = q\delta(\overrightarrow{r})$, y resulta

$$U = \frac{1}{2}\int d\overrightarrow{r}'\rho(\overrightarrow{r}')V(\overrightarrow{r}') = \frac{1}{2}\int d\overrightarrow{r}'\left[q\delta(\overrightarrow{r})\right]V(\overrightarrow{r}') = \frac{q}{2}V(0) = \infty \text{ !!!} \tag{89}$$

La forma de lidiar con el problema es salirse de la función $\delta(\overrightarrow{r})$ y darle una cierta dimensión, digamos una esfera uniformemente cargada de radio R . Entonces tenemos

$$\rho(\overrightarrow{r}) = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}R^3}\Theta(R-r) \ , \tag{90}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \frac{1}{r} & r > R \\ \frac{3R^2-r^2}{2R^3} & r < R \end{cases} \ , \quad \text{y} \tag{91}$$

$$U = \frac{1}{2}\int d\overrightarrow{r}'\rho(\overrightarrow{r}')V(\overrightarrow{r}') = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \ . \tag{92}$$

Efectivamente, cuando $R \to 0, \ U \to \infty$.

Igualando la energía U a la famosa expresión encontrada en la teoría de la relatividad $U = E = mc^2$ y no considerando el término 3/5 (que representa el factor de forma), resulta que

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = mc^2 = \textbf{energía de la partícula en reposo .} \tag{93}$$

Con lo que el así llamado radio clásico de una partícula puntual es

$$R = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} \ . \tag{94}$$

Para el caso del electrón $R_e = 2.8179 \times 10^{-15}$m= 5.32 $\times 10^{-5}$ *atomic units.* R_e se conoce como radio de Thompson y aparece en muchos procesos materia-radiación (scattering de Thompson, Compton y Klein Nishina, Raman scattering, scattering de Rayleigh, etc.).

IV. CONDUCTORES IDEALES Y CAPACITORES

El conductor ideal , es el primer material eléctrico que veremos. Es una idealización de los metales. Los metales se caracterizan por tener electrones libres (digamos ~10^{28}elec/m^3)

que son aportados por las capas exteriores (de valencia) de los átomos. La física fundamental es que estos electrones reaccionan en presencia del campo eléctrico para neutralizarlo en su interior. En principio no pueden escaparse del metal debido a la función trabajo. La velocidad de los electrones en un metal es alta $\lessapprox 1$ *atomic unit.*=c/137= 2.2×10^{-6} m/s y el tiempo de neutralización del campo eléctrico puede variar entre los 10^{-15} (femptoseconds) a 10^{-9}(nanoseconds) segundos. Nos ocupamos del caso estático final. La propiedad fundamental es que dentro del conductor vale

$$\boxed{\begin{array}{ll} E = 0 & \text{para físicos, ó} \\ V = cte & \text{para ingenieros.} \end{array}} \tag{95}$$

Si caracterizamos a la superficie del conductor ideal con el versor normal saliente $\widehat{n}$, entonces

• Usando $\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = 0$, y haciendo uso del echo que $E = 0$ dentro del conductor, se encuentra facilmente que $\overrightarrow{E}_{\parallel} = 0$. donde $\overrightarrow{E}_{\parallel}$ es el campo eléctrico inmediatamente fuera del conductor. Se generaliza con la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{E}_{\parallel} = \overrightarrow{E} \times \widehat{n} = 0. \tag{96}$$

• Usando la ley de Gauss $\varepsilon_0 \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \widehat{n}\, da = q_{enc}$, y haciendo nuevamente uso del echo que $E = 0$ dentro del conductor, se demuestra que en la superficie

$$\overrightarrow{E} \cdot \widehat{n} = E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ . \tag{97}$$

• Si usamos la definición de $V = cte$ (incluyendo la superficie), resulta obvio que el campo eléctrico es perpendicular a las superficie, por ser ésta simplemente una superficie equipotencial.

• Se demuestra que, en una cavidad dentro de un conductor, el campo eléctrico es nulo (**jaula de Faraday**). Si se sospechase que existe un campo eléctrico dentro de la cavidad, al hacer una circulación usando $\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = 0$, con $\overrightarrow{E} \upuparrows d\overrightarrow{l}$, se demuestra que es imposible (Feyman).

• Si tenemos dos esferas conductoras de radio R_1 y R_2 conectadas por un alambre conductor y una cierta carga libre en su interior, esta carga se distribuirá en la superficie de las esferas con σ_1 y σ_2. Entonces el potencial en cada esfera es

$$V_1 = k_e \frac{Q_1}{R_1} = k_e \frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{R_1}; \qquad \text{y} \qquad V_2 = k_e \frac{Q_2}{R_2} = k_e \frac{4\pi R_2^2 \sigma_2}{R_2}, \tag{98}$$

y considerando que el alambre los une para formar un sólo conductor, resulta que $V_1 = V_2$, entonces

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{E_\perp(R_1)}{E_\perp(R_2)} \ . \tag{99}$$

Si $R_1 \to 0$, entonces $\sigma_1 \to \infty$, y $E_\perp(R_1) \to \infty$ (**efecto puntas, pararayos**).

A. Método de las imagenes

Supongamos una carga $+q$ en las posición $\overrightarrow{d} = (d, 0, 0)$ frente a un semiespacio ($x < 0$) conductor. El potencial dentro del conductor es $V = cte = 0$, y el el espacio exterior está dado por

$$V(r) = +\frac{k_e q}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{d}\right|} + k_e \iint \frac{da' \ \sigma_i(a')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \ , \tag{100}$$

donde $da' = dydz$, $\overrightarrow{r}' = (0, y, z)$ y σ_i es la carga inducida en la superficie del conductor que NO la conocemos. Sabemos además que el campo eléctrico sale en forma perpendicular a la superficie del conductor que está a un potencial constante. El método de las imagenes aquí consiste en inventar una carga q' en la posición $\overrightarrow{d}' = (-d, 0, 0)$, para simular el efecto del segundo termino de la RHS, o sea el potencial es ahora

$$V(r) = +\frac{k_e q}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{d}\right|} + \frac{k_e q'}{\left|\overrightarrow{r} + \overrightarrow{d}'\right|} \ . \tag{101}$$

La condicióndé que $V = 0$ en la superficie se satisface haciendo $q' = -q$ y $\overrightarrow{d}' = -\overrightarrow{d}$ con lo cual garantizamos el conocimiento del potencial en la superficie cerrada (la cerramos en el infinito) y por lo tanto la soluciónes única y estable (Dirichlet). La solución se usa sólo fuera del conductor, en el interior obviamente vale $V = 0$. El campo eléctrico en la superficie es,

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V = -\overrightarrow{\nabla}\frac{k_e q}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{d}\right|} + \overrightarrow{\nabla}\frac{k_e q'}{\left|\overrightarrow{r} + \overrightarrow{d}'\right|} \tag{102}$$

$$= +k_e q\frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{d}}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{d}\right|^3} - k_e q\frac{\overrightarrow{r} + \overrightarrow{d}}{\left|\overrightarrow{r} + \overrightarrow{d}\right|^3} = -k_e q\frac{2\overrightarrow{d}}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{d}\right|^3}$$

$$E_x(x = 0) = -k_e\frac{2q}{(d^2 + y^2 + z^2)} \tag{103}$$

Sabiendo que $\overrightarrow{E} \cdot \widehat{n} = E_\perp = E_x = \sigma_i/\varepsilon_0$, entonces

$$\sigma_i = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \ , \tag{104}$$

Expresión muy importante para representar iones frente a superficies metálicas (adsorción, catálisis, plasmones, etc.)

Otros dos casos son de interés:

• Una carga puntual colocada frente a dos hemisespacios conductores.

• Una carga puntual frente a una esfera conductora.

B. Sistema de conductores

Consideremos un sistema de N conductores de forma cualquiera y carga arbitraria q_j. Sabemos que:

• Las cargas netas de cada conductor se van a conservar (los electrones no se pueden escapar, debido a la función trabajo).

• Las cargas se van a distribuir (inducidas unas a las otras), pero permanecerán en la superficie de cada conductor. Nos conviene definir una densidad superficial de carga de cada conductor normalizada tal que

$$\sigma'_j(s_j) = \frac{\sigma_j(s_j)}{q_j}, \quad \text{tal que} \quad \int_{S_j} ds_j \sigma'_j(s_j) = 1 \ . \tag{105}$$

• Dentro (y en la superficie) de cada conductor el potencial es constante (o campo nulo en su interior) y lo notaremos con V_j con respecto a un valor de referencia (generalmente $V = 0$ en el infinito). Entonces si $V(r)$ es el potencial en todo lugar del espacio podremos afirmar que

$$V(\overrightarrow{r}) = V_j \quad \forall \overrightarrow{r}_j \in \mathcal{R}_j, \quad j = 1, ..N \ , \tag{106}$$

donde $\mathcal{R}_j$ es el espacio que ocupa el conductor j. La expresión (106) vale tambiÉn para los valores de $\overrightarrow{r}_j$ que estan en la superficie $\mathcal{S}_j$ y que lo denotaremos con el vector posición $\overrightarrow{r}_{sj}$. De acuerdo a la definición (22) podemos escribir que el potencial en cualquier punto de espacio resulta ser:

$$\begin{aligned} V(r) &= \sum_{j=1}^{N} k_e \int_{\mathcal{S}_j} ds_j \frac{\sigma_j(s_j)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_{sj}|} = \sum_{j=1}^{N} q_j k_e \int_{\mathcal{S}_j} ds_j \frac{\sigma'_j(s_j)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_{sj}|} = \sum_{j=1}^{N} q_j P_j(r) \ , & (107) \\ P_j(r) &= k_e \int_{\mathcal{S}_j} ds_j \frac{\sigma'_j(s_j)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_{sj}|} \ . & (108) \end{aligned}$$

Si las superficies de los conductores son complicadas, los valores d P_j son muy dificiles de calcular debido al desconocimiento de $\sigma'_j(s_j)$. La ecuación (107) se puede dividir en N ecuaciones imponiéndoles las N condiciones (106), resultando entonces

$$\begin{aligned} V_i &= V(r_i) = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} q_j \ , \qquad P_{ij}\text{=}\textbf{coeficientes de potencial ,} & (109) \\ P_{ij} &= P_j(r_i), \ \forall \overrightarrow{r}_i \in \mathcal{R}_i, \quad i = 1, ..N \ . & (110) \end{aligned}$$

Obviamente los elementos P_{ij} son una generalización de los elementos puntuales p_{ij} definidos en (77). Se puede demostrar además que $P_{ij} = P_{ji}$ (tal como en Eq.(77)). La energía de formación de este sistema es de acuerdo a (78)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \int d\overrightarrow{a}' \sigma_j(s_j) V(\overrightarrow{r}') = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} q_j V_j \underbrace{\int d\overrightarrow{a}' \sigma'_j(s_j)}_{1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} q_j V_j \ , \tag{111}$$

donde hemos usado el hecho de que el potencial es constante en la superficie del conductor. Pasemos a la representación vectomatricial. Entendiendo los términos P_{ij} como los elementos de la matriz $\overline{\overline{P}}$, las ecuaciones (107) y (111) se reducen a

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \overline{\overline{P}} \times \overline{q} = \overline{q} \times \overline{\overline{P}}, \qquad \text{y} & (112) \\ U &= \frac{1}{2} \, \overline{q} \cdot \overline{V} \quad \Longrightarrow \quad U = \frac{1}{2} \, \overline{q} \times \overline{\overline{P}} \times \overline{q} \ , & (113) \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho que $P_{ij} = P_{ji}$. Definiendo $\overline{\overline{C}}$ como la matrix inversa de $\overline{\overline{P}}$,

$$\overline{\overline{C}} \times \overline{\overline{P}} = \overline{\overline{P}} \times \overline{\overline{C}} = \overline{\overline{1}} \qquad C_{ij} = \textbf{coeficientes de capacitancia} \tag{114}$$

con $C_{ij} = C_{ji}$, resulta que

$$\overline{q} = \overline{\overline{C}} \times \overline{V} = \overline{V} \times \overline{\overline{C}}\,, \quad \text{y} \tag{115}$$

$$U = \frac{1}{2}\,\overline{V} \times \overline{\overline{C}} \times \overline{V}. \tag{116}$$

C. Capacitores

Sean dos conductores (armaduras) de cualquier forma con cargas $q_1 = +q$ y $q_2 = -q$, las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{cases} V_1 = P_{11}q - P_{12}q \\ V_2 = P_{21}q - P_{22}q \end{cases} \quad \text{restando} \tag{117}$$

$$V = V_1 - V_2 = (P_{11} + P_{22} - P_{12} - P_{21})q, \quad \text{definiendo} \tag{118}$$

$$\boxed{C = q/V\ , \qquad \textbf{capacitancia}}\textbf{,} \quad \text{con} \tag{119}$$

$$C = \frac{1}{(P_{11} + P_{22} - 2P_{12})} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{(C_{11} + C_{22} + 2C_{12})}\ , \tag{120}$$

$$[C] = \frac{[q]}{[V]} = \frac{Coul}{Vol} = \text{Faradio}\ . \tag{121}$$

En la gran mayoría de los casos reales los valores de C no se calculan sino que se miden.

El capacitor es el primer elemento circuital (veremos además la resistencia (R) y la inductancia (L)). A todos los elementos circuitales se los puede poner en serie o en paralelo. Si conectamos 2 capacitores $C_1\ y\ C_2$ en paralelo las armaduras estarán al mismo potencial y cada uno de ellos acumulará cargas Culombianas $q_1\ y\ q_2$, con lo que

$$\begin{cases} C_1 = \frac{q_1}{V} \\ C_2 = \frac{q2}{V} \end{cases} , \quad \text{sumando}$$

$$C_1 + C_2 = \frac{(q_1 + q_2)}{V} = C \tag{122}$$

O sea el armado se comporta como un solo capacitor de valor $C = C_1 + C_2$ y que acumula carga $q_1 + q_2$. Si estuviesen dentro de una caja negra no sabr´iamos diferenciarlos. Si los conectamos en paralelo los capacitores acumularán la misma carga q y en cada uno de ellos habrá una caída de tensión V_1 y V_2

$$\begin{cases} V_1 = \frac{q}{C_1} \\ V_2 = \frac{q}{C_2} \end{cases} \quad , \quad \text{sumando}$$

$$V_1 + V_2 = V = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{q}{C}, \tag{123}$$

produciendo la ley de las inversas. La generalización a varios capacitores es inmediata

$$\begin{cases} \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} & \textbf{en serie} \\ C = \sum_i C_i & \textbf{en paralelo} \end{cases} . \tag{124}$$

D. Capacitores de placas paralelas

Sean dos placas paralelas infinitas (por ahora) cargadas con densidad superficial de carga $+\sigma$ y -σ, ubicadas en las posiciones $x = -l/2$ y $x = -l/2$, la ecuación de Poisson en una dimensión resulta en términos de la δ de Dirac

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\sigma\delta\left(x + \frac{l}{2}\right) + (-\sigma)\delta\left(x - \frac{l}{2}\right)\right]. \tag{125}$$

La solución es

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{l}{2}, & x \leq -\frac{l}{2} \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x, & -l/2 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{l}{2}, & x \geq \frac{l}{2} \end{cases} , \tag{126}$$

y el campo eléctrico resulta ser

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{l}{2} \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, & -l/2 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0, & x \geq \frac{l}{2} \end{cases} , \text{ ó mejor} \tag{127}$$

$$E_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\Theta\left(x + \frac{l}{2}\right) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\Theta\left(x - \frac{l}{2}\right) . \tag{128}$$

Lo cual es correcto, ya que si tomamos la divergencia: $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} \equiv \partial/\partial x E_x = -\partial^2/\partial x^2 V(x) \equiv -\nabla^2 V$ (recordar que la derivada de la Θ de Heviside es la δ de Dirac), reproduce la fórmula de partida (125). De (126) resulta que la diferencia de potencial entre las armaduras V está dado por

$$V = V(-l/2) - V(l/2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{l}{2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{l}{2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\frac{q}{S}}_{\sigma}\frac{l}{2} \tag{129}$$

$$C = \frac{q}{V} = \varepsilon_0 \frac{S}{l} = (\text{medio} \times \text{geometria}) \tag{130}$$

donde hemos considerado que el capacitor tiene una dimensión finita (approximación!) de superficie S.

Son igualmente calculables:

• dos cilindros concéntricos infinitos con radios R_1 y R_2

• dos caparazones esféricos concéntricos con radios R_1 y R_2

E. Energía acumulada dentro de un capacitor de placas paralelas

según la ecuación (86) y considerando que $\overrightarrow{E} \neq 0$ sólo dentro del cubo de volumen Sl, resulta

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}' \left|\overrightarrow{E}\right|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|\overrightarrow{E}\right|^2 Sl\ , \tag{131}$$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right|^2 Sl = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|\frac{q/S}{\varepsilon_0}\right|^2 Sl = \frac{q^2}{2\varepsilon_0}\frac{l}{S}\ , \tag{132}$$

ó usando $C = \varepsilon_0 S/l$, resulta

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{qV}{2} = \frac{CV^2}{2} \tag{133}$$

Notar la analogía con las ecuaciones (113) y (116). Podemos definir la densidad de energía por unidad de volumen

$$w_E = \frac{U}{Sl} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|\overrightarrow{E}\right|^2 \quad \textbf{densidad de energía eléctrica por unidad de volumen}\ , \tag{134}$$

que será importante cuando se calcule la energía del campo electromagnético y en definitiva la energía de la luz (fotón).

V. DIELECTRICOS

Ya hemos introducido los conductores y los hemos caracterizado como un material que tiene electrones libres. Hay otro tipo de materiales llamados **dieléctricos** que no poseen electrones libres, sino dipolos (permanentes o inducibles). Ante la presencia de un campo eléctrico el medio se polariza. Aun cuando el material es, en principio, eléctricamente neutro los dipolos inducen un campo eléctrico que influye localmente. Podemos decir que los electrones libres hacen a los conductores tanto como a los dipolos a los dielectricos.

A. Modelo Simple

Supongamos dos capacitores idénticos geometricamente (caracterizados por S y l) uno en el vacío y el otro con un cierto material (**dieléctrico**) dentro. Hagamos dos experiencias.

Primera experiencia de Faraday: Si el capacitor en el vacío acumula una carga Q_0 cuando a sus armaduras se las somete a una diferencia de potencial V_0, de modo tal que $\mathrm{C}_0 = Q_0/V_0$, se encuentra que el capacitor con el dieléctrico acumula una carga $Q = K_e Q_0$ cuando a las armaduras se las somete a la **misma** diferencia de potencial V_0, con lo que

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{K_e Q_0}{V_0} = K_e C_0 \ , \tag{135}$$

donde K_e es una característica del medio. Hicimos esta experiencia considerando el mismo potencial V_0 en ambos capacitores. Hagamos otra experiencia para estar seguros.

Segunda experiencia de Faraday: Conectemos ambos capacitores a una batería de modo tal que en las armaduras se deposite la **misma** carga Q_0. Se encuentra que el capacitor con el dieléctrico presenta una diferencia de potencial entre sus armaduras $V = V_0/K_e$ donde V_0 es la diferencia de potencial medida en el capacitor en el vacío. Resulta entonces la misma relación, ya que

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{(V_0/K_e)} = \frac{K_e Q_0}{V_0} = K_e C_0 \ , \tag{136}$$

El modelo más simple es pensar que hay una cierta carga inducida Q_{ind} en la superficie del dieléctrico en contacto con la armadura de signo opuesto, provocada por la alineación de los dipolos, tal que la carga total Q es

$$Q_{ind} = Q_0 \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \ . \tag{137}$$

Y con este concepto sencillo vamos a explicar los comportamientos básicos. Esta expresi'on no es caprichosa la justificaremos más adelante.

En el caso del capacitor en el vacío podemos usar la ley de Gauss sin inconvenientes

$$\varepsilon_0 \oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}_0 \cdot d\overrightarrow{a} = Q_0 \ . \tag{138}$$

En el caso del capacitor con el medio dieléctrico tenemos un problema, ya que la carga encerrada es $Q = Q_0 - Q_{ind}$, entonces

$$\varepsilon_0 \oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{a} \ = \ Q_0 - Q_{ind} = Q_0 - Q_0 \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) = \frac{Q_0}{K_e} \ . \tag{139}$$

$$\varepsilon_0 K_e \oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{a} \ = \ Q_0 \tag{140}$$

Comparando (138) con (140), y llamando

$$\varepsilon \ = \ K_e \varepsilon_0 \quad \textbf{permitividad eléctrica del medio,} \tag{141}$$

$$\overrightarrow{D} \ = \ \varepsilon_0 K_e \overrightarrow{E} = \varepsilon \overrightarrow{E} \qquad \textbf{vector desplazamiento.} \tag{142}$$

Podemos escribir la ley de Gauss en su forma más útil

$$\boxed{\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{D} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{a} = \mathrm{Q}_0 \quad \textbf{ley de Gauss para medios dieléctricos.}} \tag{143}$$

Comparando los integrandos de (138) con (143) y la identidad (142), encontramos que

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon \overrightarrow{E} \ = \varepsilon_0 \overrightarrow{E}_0 \tag{144}$$

Podemos pensar que tenemos dos campos eléctricos: $\overrightarrow{E}_0$ (el campo externo generado por Q_0) y otro $\overrightarrow{E}_{ind}$ (generado por las cargas Q_{ind}) y por lo tanto se opone a $\overrightarrow{E}_0$, tal que

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 - \overrightarrow{E}_{ind}. \tag{145}$$

Podemos entonces determinar $\overrightarrow{E}_{ind}$ ya que

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 - \overrightarrow{E}_{ind} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\overrightarrow{E}_0 = \frac{1}{K_e}\overrightarrow{E}_0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{E}_{ind} = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right)\overrightarrow{E}_0 \tag{146}$$

El campo $\overrightarrow{E}_{ind}$ es generado por las densidad de cargas inducidas σ_{ind} asi como el campo E_0 es creado por la densidad de cargas libres σ_0,

$$\begin{cases} E_{ind} = \frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{ind}}{S\varepsilon_0} \\ E_{ind} = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) E_0 = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right)\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right)\frac{Q_0}{S\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow Q_{ind} = Q_0\left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \tag{147}$$

que es la hypotesis de partida .(137). Lo importante de la ley de Gauss para medios dieléctricos es que con el uso de ε nos evitamos trabajar con las cargas inducidas. En las ecuaciones sólo intervienen las cargas libres Q_0. Veamos dos ejemplos.

Como <u>primer ejemplo</u>, consideremos una partícula con carga Q_0 en un medio dieléctrico (fluido) caracterizado con ε. Usando la ecuación (143), e integrándola sobre una superficie esférica de radio r, resulta

$$\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{D}\cdot d\overrightarrow{a} = Q_0 \Longrightarrow D = \frac{Q_0}{4\pi r^2} = \varepsilon E \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{148}$$

que es lo mismo que la ley de Coulomb con ε en lugar de ε_0.(se podría decir también que la carga Q_0 resulta apantallada y se comporta como $Q_0\varepsilon_0/\varepsilon = Q_0/K_e$).

Como <u>segundo ejemplo</u> consideremos un capacitor con une dieléctrico caracterizado con ε. Usando gauss en un cilindro de superficie S que encierre la armadura

$$\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{D}\cdot d\overrightarrow{a} = Q_0 \Longrightarrow D = \frac{Q_0}{S} = \sigma_0 = \varepsilon E \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \tag{149}$$

que resulta ser igual al del vacío con ε en lugar de ε_0. Si queremos calcular la capacitancia C, en la forma más simple, resulta

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{El} = \frac{Q_0}{l\frac{\sigma_0}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon Q_0}{l\frac{Q_0}{S}} = \varepsilon\frac{S}{l} = K_e\overbrace{\varepsilon_0\frac{S}{l}}^{C_0} = K_e C_0 \tag{150}$$

que confirma el resultado experimental de partida (136). En la siguiente sección vamos a echar luz sobre lo que aquí hemos obtenido en forma grosera. Un cálculo más detallado requiere de un álgebra más compleja, que veremos a continuación.

B. Electrostática macroscopica

Pasemos a una descripción macroscópica en términos de valores medios. Consideremos un elemento de volumen $d\overrightarrow{r}'$ centrado en la posición $\overrightarrow{r}'_j$. Un solo dipolo $\overrightarrow{p}_j$ ubicado en la posición $\overrightarrow{r}_j$ dentro de dicho diferencial genera un potencial V_j en la posición $\overrightarrow{r}$, que está dado por (43)

$$V_j(r) = k_e \frac{\overrightarrow{p}_j \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j|^3} . \tag{151}$$

Sumemos ahora todos los dipolos ubicado en el elemento de volumen

$$\sum_j V_j(r) = d\langle V(r)\rangle = k_e \sum_j \left. \frac{\overrightarrow{p}_j \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_j|^3} \right|_{\overrightarrow{r}_j \simeq \overrightarrow{r}'} \simeq k_e \sum_j \frac{\overrightarrow{p}_j \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} , \tag{152}$$

$$= k_e \sum_j \overrightarrow{p}_j \cdot \frac{(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} . \tag{153}$$

Definiendo

$$\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') = \frac{\sum_j \overrightarrow{p}_j}{d\overrightarrow{r}'} = \textbf{densidad de dipolos por unidad de volumen,} \tag{154}$$

y haciendo $\sum_j V_j(r) = d\langle V(r)\rangle$ resulta

$$d\langle V(r)\rangle = k_e \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \cdot \frac{(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} d\overrightarrow{r}' , \tag{155}$$

$$\langle V(r)\rangle = k_e \int d\overrightarrow{r}' \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \cdot \frac{(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} . \tag{156}$$

Si estamos interesados en el valor medio del campo eléctrico $\left\langle \overrightarrow{E}(r) \right\rangle$ se obtiene como siempre haciendo $\left\langle \overrightarrow{E}(r) \right\rangle = -\nabla \langle V(r)\rangle$, y usando las formulas del Appendice, llegamos a

$$\left\langle \overrightarrow{E}(r) \right\rangle = k_e \int d\overrightarrow{r}' \left[\frac{3\left(\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')\right) \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^5} - \frac{\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} \right] . \tag{157}$$

Para chequear que está bien, consideremos un solo dipolo en el origen $\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') = \overrightarrow{p}\,\delta(\overrightarrow{r})$, entonces recobramos la ecuación (52).

Sabiendo que

$$\frac{(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} = \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}'} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \tag{158}$$

podemos reescribir la ecuación **??** así

$$\langle V(r)\rangle = k_e \int d\overrightarrow{r}' \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \cdot \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}'} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \tag{159}$$

Ahora recurrimos al truco de cambiar la posición de $\overrightarrow{\nabla}$:

$$\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}'} \left[\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \cdot \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}\right] = \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \cdot \left[\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}'} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}\right] + \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \left[\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{r}'} \cdot \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}')\right] \tag{160}$$

Reemplazando en (159) resulta

$$\langle V(r)\rangle = k_e \oiint_{\mathcal{S}} ds' \frac{\left[\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \cdot \widehat{n}\right]}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} + k_e \int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}' \frac{\left[-\overrightarrow{\nabla}' \cdot \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}')\right]}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}. \tag{161}$$

Donde hemos usado el teorema de la divergencia para el primer término de la RHS. aquí tenemos dos caminos a seguir.

<u>Primer camino.</u> Si integramos SOLO en el volumen $\mathcal{V}$, o sea donde $\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \neq 0$, y la segunda integral sobre la superficie que lo encierra, entonces podemos interpretar que $\langle V(r)\rangle$ es ocacionado por dos densidades de carga inducidas, por el volumen (ρ_{ind}) y por la superficie (σ_{ind})

$$\langle V(r)\rangle \;=\; k_e \int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}' \frac{\rho_{ind}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \;+\; k_e \oiint_{\mathcal{S}} ds \frac{\sigma_{ind}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}\ , \tag{162}$$

$$\rho_{ind}(\overrightarrow{r}') \;=\; -\overrightarrow{\nabla}' \cdot \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \quad \text{y} \quad \sigma_{ind}(\overrightarrow{r}') = \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \cdot \widehat{n}\ , \tag{163}$$

σ_{ind} es igual a la introducida en la sección anterior que se formaba en la superficie del dieléctrico en contacto con la armadura. Además aparece una (inesperada) densidad de volumen ρ_{ind}, que está relacionada con la variación de la densidad, si la hubiese. Ya que las inducciones deben conservar la carga, entonces debe valer

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}'\rho_{ind}(\overrightarrow{r}') \;+\; \oiint_{\mathcal{S}} ds'\sigma_{ind}(\overrightarrow{r}') \;, &(164)\\
&= \int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}' \left[-\overrightarrow{\nabla}' \cdot \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}')\right] \;+\; \oiint_{\mathcal{S}} ds' \left[\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \cdot \widehat{n}\right] \;, &(165)
\end{aligned}
$$

que se satisface, ya que es el teorema de Gauss. Este camino no es el más conveniente.

Segundo camino. Si integramos en TODO el espacio (aquí especificado con $\int_\infty$), hasta el infinito, allí: $\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') = 0$, por lo que la integral sobre la superficie cerrada en el infinito es nula (allí $\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') = 0$). Queda sólo el primer término de la RHS, que tiene la estructura de un potencial con sólo las carga inducida de polarización en volumen

$$
\begin{aligned}
\rho_{ind}(\overrightarrow{r}') &= -\overrightarrow{\nabla}' \cdot \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \quad , \qquad \text{tal que} &(166)\\
\langle V(r)\rangle &= k_e \int_\infty d\overrightarrow{r}' \frac{\rho_{ind}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \;. &(167)
\end{aligned}
$$

Como las densidades de polarización deben compensarse (no generan cargas sino que se reordenan los dipolos), entonces debe valer

$$
\int_\infty d\overrightarrow{r}'\rho_{ind}(\overrightarrow{r}') = 0 \;. \tag{168}
$$

(notar que aquí aparece $\int_\infty$). Volveremos sobre este tema más adelante Volviendo a la ecuación de la divergencia del campo eléctrico (39) y considerando que hay aparte de la densidad de carga inducida ρ_{ind} y otra densidad externa real ρ_0 (libre (*free*) o real (*true*) o externa, etc.), entonces

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 \overrightarrow{\nabla} \cdot \left\langle \overrightarrow{E} \right\rangle &= \rho_{total} = \rho_0 + \rho_{ind} = \rho_0 - \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{P} \;, &(169)\\
\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \left\langle \overrightarrow{E} \right\rangle + \overrightarrow{P}\right) &= \rho_0, \qquad \text{llamando,} &(170)\\
\varepsilon_0 \left\langle \overrightarrow{E} \right\rangle + \overrightarrow{P} &= \overrightarrow{D} = \qquad \textbf{vector desplazamiento ,} &(171)\\
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{D} &= \rho_0 \;, \qquad \text{entonces,} &(172)\\
\oiint_S \overrightarrow{D} \cdot d\overrightarrow{a} &= Q_0, \qquad \textbf{ley de Gauss para medios dieléctricos .} &(173)
\end{aligned}
$$

Notemos que ahora $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{D} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{P}$. Resumiendo tenemos las 4 ecuaciones de la electrostática

$$\boxed{\begin{array}{ll} \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{D}=\rho_0 & \overrightarrow{\nabla}\cdot\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle=\left(\rho_0+\rho_{ind}\right)/\varepsilon_0 \\ \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{D}=\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{P}. & \overrightarrow{\nabla}\times\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle=0. \end{array}} \tag{174}$$

Observesé que la determiación de $\overrightarrow{D}$ se relaciona con ρ_0, nos independizamos totalmente de ρ_{ind} que es un inconveniente ya que generalmente la desconocemos. Para calcular $\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle$ se requiere el conocimiento de $\overrightarrow{P}$ según la relación $\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle = (\overrightarrow{D}-\overrightarrow{P})/\varepsilon_0$. En la próxima sección nos independizaremos de también de $\overrightarrow{P}$ bajo ciertas condiciones.

C. Medios lineales isotropos y homogeneos (LIH)

La expresión del vector desplazamiento $\overrightarrow{D}$ depende de la Polarización $\overrightarrow{P}$ según la ecuación (171). Lo más general es que la polarización sea dada por una expansión perturbativa

$$\overrightarrow{P}=\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r})\ =\overrightarrow{P}_0+\overline{\overline{\chi}}_1\times\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle\times\overline{\overline{\chi}}_2\times\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle+\mathcal{O}(E^3) \tag{175}$$

Si $\overrightarrow{P}_0\neq 0$ significa que el material tiene una polarización aún en ausencia de campo eléctrico ($\langle E\rangle = 0$). El material se llamam **electrete** y tiene una física similar al magnetismo (ferromagnetismo) por lo que a veces se lo llama **ferroeléctricos**. Si $\overrightarrow{P}_0 = 0$ y el segundo término es suficiente para describir la polarizacion, entonces $\overrightarrow{P} = \overline{\overline{\chi}}_1\times\overrightarrow{E}$ y el término se llama **líneal.** Si además es **isótropo** entonces $\overline{\overline{\chi}}_1\equiv\chi(\overrightarrow{r}) =$ **susceptibilidad eléctrica.** Si además el material es **homogeneo,** no depende de la posición (y lo denotaremos con LIH) entonces $\chi = cte$. Por conveniencia escribimos $\chi=\varepsilon-\varepsilon_0$:

$$\overrightarrow{P}\ =\ \chi_e\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle=(\varepsilon-\varepsilon_0)\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle, \qquad \text{entonces} \tag{176}$$

$$\overrightarrow{D}\ =\ \varepsilon_0\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle+\overrightarrow{P}=\varepsilon_0\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle+(\varepsilon-\varepsilon_0)\overrightarrow{E}=\varepsilon\overrightarrow{E} \tag{177}$$

que es la expresión conocida. Vimos que $\left\langle\overrightarrow{E}\right\rangle$ es un valor medio, $\overrightarrow{P}$ también es un valor medio (densidad de dipolos) por lo que deberíamos haberlo notado como $\left\langle\overrightarrow{P}\right\rangle$, por lo que $\overrightarrow{D}$ también debe entenderse como un valor medio y lo tendríamos que haber notado como $\left\langle\overrightarrow{D}\right\rangle$. No se usa, se sobrentiende. Es por este concepto de valores medios (promedios sobre la escala microscópica) que se llama electrostática macroscópica.

D. Efecto de bordes

Hemos desarrollados dos caminos. El primero es elemental. Llegamos a una carga superficial inducida $\sigma_{ind}(\overrightarrow{r}') = \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}') \cdot \widehat{n}$ tal cual lo vimos en el el modelo simple cuando incorporamos la carga inducida Q_{ind}. En segundo camino que integramos hasta el infinito no apareció tal carga inducida sinop la de volumen en todo el espacio. **Donde está** σ_{ind}?.

Analizemos el primer camino a la luz del segundo. Reconsideremos el caso del capacitor de placas paralelas en donde colocamos un dieléctrico LIH con polarización constante P. Por simplicidad trabajaremos en una dimensión e integraremos hasta el infinito como lo requiere el segundo camino. La polarización es entonces

$$P(x) = \begin{cases} 0 & x < -l/2 \\ P & -l/2 < x < l/2 \\ 0 & x > l/2 \end{cases} \tag{178}$$

que se puede escribir en términos de la función Θ de Heaviside así

$$P(x) = P\Theta(x + l/2) - P\Theta(x - l/2) \tag{179}$$

El camino 2 solo define la $\rho_{ind}(\overrightarrow{r}') = -\overrightarrow{\nabla}' \cdot \overrightarrow{P}(\overrightarrow{r}')$, que en una dimensión es

$$\begin{aligned} \rho_{ind}(x) &= -\frac{\partial}{\partial x} P(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[P\Theta(x + l/2) - P\Theta(x - l/2) \right] & (180) \\ &= (-P)\delta(x + l/2) + P\delta(x - l/2) \equiv \sigma_{ind}(x) \ . & (181) \end{aligned}$$

La lectura ahora es simple: hay dos densidades de carga $-P$ y $+P$ en las posiciones $x = -l/2$ y $x = l/2$, respectivamente. Y esas son las densidades de carga inducidas. más aún, la ecuación de neutralidad (168) se cumple perfectamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_{ind}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[(-P)\delta(x + l/2) + P\delta(x - l/2) \right] = -P + P = 0 \ , \tag{182}$$

En conclusión, las densidades superficiales son los efectos de los bordes (matematicamente: la derivada de Θ es la δ).

E. Energía electrostática en presencia de dieléctricos

Repitamos todo lo visto para el caso del vacío. Para construir una distribución (digamos volumétrica) de cargas ρ_0 en un determinado medio dieléctrico, tenemos que hacerlo en presencia de $\langle V\rangle$ y no de sólo V; o sea también contra (o a favor) de los dipolos del medio. Para una distribución continua vale enntonces

$$U = \frac{1}{2}\int d\vec{r}\,'\ \rho_0(r')\ \langle V(\vec{r}\,')\rangle\ , \tag{183}$$

donde hemos introducido el término $\langle V(\vec{r}\,')\rangle$ dado por la ecuación (167) más el de las cargas libres, o sea

$$\langle V(r)\rangle = k_e\int_\infty d\vec{r}\,'\frac{\left[\rho_0(r') - \vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')\right]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ . \tag{184}$$

Físicamente construimos una distribución de cargas (externas) ρ_0 en presencia de todos los potenciales, las otras cargas externas más las inducidas. Sabiendo que $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_0$, tenemos de (183)

$$U = \frac{1}{2}\int d\vec{r}\,'\ \overbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right)}^{\rho_0(r')}\ \langle V(\vec{r}\,')\rangle \tag{185}$$

Ahora recurramos al truco de cambiar la posición de $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{D}\ \langle V\rangle\right] = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right)\ \langle V\rangle\ \ + \vec{D}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\langle V\rangle}_{-\langle\vec{E}\rangle} \tag{186}$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right)\ \langle V\rangle = \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{D}\ \langle V\rangle\right] + \vec{D}\cdot\left\langle\vec{E}\right\rangle, \qquad \text{entonces} \tag{187}$$

$$U = \frac{1}{2}\int d\vec{r}\ \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{D}\ \langle V\rangle\right] + \frac{1}{2}\int d\vec{r}\ \vec{D}\cdot\left\langle\vec{E}\right\rangle, \tag{188}$$

usando el teorema de la divergencia

$$U = \frac{1}{2}\oiint_{\mathcal{S}} d\vec{s}\,'\left[\vec{D}\ \langle V\rangle\right] + \frac{1}{2}\int d\vec{r}\ \vec{D}\cdot\left\langle\vec{E}\right\rangle, \tag{189}$$

y como siempre, en el infinito la integral sobre la superficie se anula ya que

$$\mathcal{S}D\langle V\rangle \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} r^2\frac{1}{r^2}\frac{1}{r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{r} \tag{190}$$

quedando

$$U = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{r}'\ \overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{E}\ . \tag{191}$$

Un ejemplo. Para el caso de un capacitor de placas paralelas con dieléctrico LIH con ε, tenemos (siguiendo las mismas approximaciones)

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{E}\,\overbrace{(Sl)}^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}D\overbrace{\left(\frac{D}{\varepsilon}\right)}^{E}Sl = \frac{1}{2\varepsilon}\overbrace{\left(\frac{q_0}{S}\right)^2}^{D^2}Sl = \frac{q_0^2}{2\varepsilon}\frac{l}{S} = \frac{1}{K_e}\frac{q_0^2}{2\varepsilon_0}\frac{l}{S}, && (192)\\ U_0 &= U(K_e=1) = \frac{q_0^2}{2\varepsilon_0}\frac{l}{S} && (193)\\ U &= \frac{U_0}{K_e} && (194) \end{aligned}$$

donde U_0 es la energía acumulada por el capacitor en el vacío con C_0. Como $\mathrm{K}_e > 1$, entonces $U < U_0$ [de aquí sale el tradicional problema de una pastilla dielectrica oscilando dentro de un capacitor]. En términos de $C = q/V = K_e C_0$, tenemos

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{E}\ Sl = \frac{\varepsilon}{2}E^2Sl = \frac{\varepsilon}{2}\overbrace{\left(\frac{V}{l}\right)^2}^{E^2}Sl = \frac{1}{2}V^2\ \varepsilon\frac{S}{l} = \frac{V^2C}{2} && (195)\\ U &= \frac{CV^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qV}{2}. && (196) \end{aligned}$$

• como $C\propto S/l$, resulta simple predecir como será el resultado del problema con dos pastillas dieléctricas de diferentes ε dentro de un conductor dispuestos en paralelo o en serie.

F. Sobre la ley de Coulomb en medios LIH

Consideremos una partícula cargada con carga q_0 ubicada en el origen de una esfera dieléctrica ("fluido") LIH de radio R_0. Usando la ley de Gauss para medios dieléctricos tenemos

$$q_0 = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{D}\cdot d\overrightarrow{a}, \;\; \Rightarrow \;\; \overrightarrow{D} = \frac{q_0\widehat{r}}{4\pi r^2} \;, \tag{197}$$

$$\left\langle \overrightarrow{E} \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\overrightarrow{D} = \frac{q_0\widehat{r}}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{1}{K_e}\frac{q_0\widehat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{K_e}\overrightarrow{E}_0 = \frac{\overbrace{(q_0/K_e)}^{q}\widehat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \;, \tag{198}$$

con lo cual vemos claramente que la carga q_0 está disminuida (apantallada) en un factor $K_e \geq 1$. Veamos como se distribuyen las cargas inducidas. Calculemos primero la polarización

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{D} - \varepsilon_0 \left\langle \overrightarrow{E} \right\rangle = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right)\frac{q_0\widehat{r}}{4\pi r^2} \;, \tag{199}$$

Por un instante consideremos que la partícula q_0 posee un radio r_0 pequeño, pero finito. Las cargas inducidas en las superficies (interna y externa) ($\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{P} = 0$) del dieléctrico serán

$$q_{ind} = \iint da\;\sigma_{ind} = \oiint_{interna} da\left(\overrightarrow{P}\cdot\widehat{n}\right) + \oiint_{externa} da\left(\overrightarrow{P}\cdot\widehat{n}\right) \;, \tag{200}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{K_e}\right)\frac{q_0\widehat{r}}{4\pi r_0^2}\cdot\widehat{n}_i\,4\pi r_0^2 + \left(1 - \frac{1}{K_e}\right)\frac{q_0\widehat{r}}{4\pi R_0^2}\cdot\widehat{n}_e\,4\pi R_0^2 \;, \tag{201}$$

$$= \underbrace{-\left(1 - \frac{1}{K_e}\right)q_0}_{q_i} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{K_e}\right)q_0}_{Q_i} = 0 \qquad \textbf{OK, neutralidad} \;\;, \tag{202}$$

q_i es la carga inducida que apantalla la partícula y $Q_i = -q_i$ es la carga remanente en la superficie externa. Ahora podemos tender $\mathrm{R}_0 \to \infty$, entonces la carga eléctrica total de la partícula será la externa más la inducida, o sea

$$q = q_0 + q_i = q_0 - \left(1 - \frac{1}{K_e}\right)q_0 = \frac{q_0}{K_e} \;. \tag{203}$$

Como $K_e \geq 1$ entonces cada partícula q_0 queda apantallada en un factor $K_e = \varepsilon/\varepsilon_0$ y se comporta como q_0/K_e. Valen entonces todas las expresiónes del campo eléctrico con $q = q_0/K_e$.

G. Ecuaciones de Poisson y Laplace en medios dieléctricos LIH

De acuerdo a la ley de Coulomb una partícula cargada en la posición $\overrightarrow{r}'$ un medio LIH con ε genera un campo eléctrico en $\overrightarrow{r}$ tal que

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|^3} \ , \tag{204}$$

y las ecuaciones siguen lo mismo con ε en lugar de ε_0. Entonces $\left\langle \overrightarrow{E} \right\rangle = -\nabla \langle V \rangle$, y $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left\langle \overrightarrow{E} \right\rangle = \rho_0/\varepsilon$ por lo que llegamos a la ecuación de Poisson

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_0}{\varepsilon}, \qquad \textbf{Ecuación de Poisson de medios dieléctricos LIH ,}} \tag{205}$$

y puede ser resuelta en forma análoga.

H. Condiciones de contorno entre dos medios dieléctricos

Sean dos medios dieléctricos. un medio interno "1" con $\overrightarrow{E}_1$ y $\overrightarrow{D}_1$ normal $\widehat{n}$, y un medio "2" con $\overrightarrow{E}_2$ y $\overrightarrow{D}_2$. Si hacemos un blister en la superficie y aplicamos el teorema de Gauss, resulta

$$\oint\!\!\oint_S \overrightarrow{D} \cdot d\overrightarrow{a} = q_0 \quad \Rightarrow \left(\overrightarrow{D}_1 - \overrightarrow{D}_2\right) \cdot \widehat{n} = \sigma_0 \ . \tag{206}$$

Si hacemos una circulación

$$\oint_C \left\langle \overrightarrow{E} \right\rangle \cdot d\overrightarrow{l} = 0 \Rightarrow \left(\left\langle \overrightarrow{E}_1 \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{E}_2 \right\rangle\right) \times \widehat{n} = 0 \ . \tag{207}$$

De (206) y (207) se determinan la componente perpendicular del vector desplazamiento y la paralela del campo eléctrico

$$\boxed{\begin{array}{c} (D_{1\perp} - D_{2\perp}) = \sigma_0 \\ \left(E_{1\parallel} - E_{2\parallel}\right) = 0 \end{array}} \tag{208}$$

Si además estamos en presencia de medios dieléctricos LIH, tal que $\overrightarrow{D}_{12} = \varepsilon_{1,2}\overrightarrow{E}_{1,2}$ se encuentra que, en ausencia de cargas libres ($\sigma_0 = 0$), vale

$$\frac{\tan\ \alpha_1}{\tan\ \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ , \tag{209}$$

donde $\cos \alpha_{1,2} = \widehat{n} \cdot \widehat{E}_{1,2}$. Si los medios son dieléctricos y sus propiedades magnéticas son despreciables resulta que $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = n =$ índice de refracción con lo que (209) derivar´a en la ley de Snell de la óptica.

Conductores. Hemos estrictamente considerado dos dieléctricos. En algunos casos es posible modelizar a los conductores ideales considerando que K$=\varepsilon/\varepsilon_0 \to \infty$. El argumento es muy rebuscado, pero vale la pena plantearlo. Consideremos la condición (206) para medios LIH. En ausencia de σ_0, se resume a $D_{1\perp} = \varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} = D_{2\perp}$. Si el medio interno "1" es un conductor entonces $\mathrm{E}_1 = 0$, con lo que ε_1 debe tender a ∞ de tal forma que se verifique $\infty \times 0 = \varepsilon_2 E_{2\perp}$ (!).

I. Clausisus Mossotti

(Mossotti vivió en Argentina alrededor de 1830 y enseñó física. Trabajaba en el convento de Santo Domingo). Supongamos que una esfera dieléctrica de permitividad ε_2 y radio a es colocada en medio de un (fluido) dieléctrico con permitividad ε_1, con un campo inicialmente constante y que a grandes distancias tiene el valor E_0 en la dirección $\widehat{z}$. Resolviendo la ecuación de Laplace para el potencial (no nos importa el álgebra) se llega a que la solución es

$$\begin{cases} V_1 = \left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}\frac{a^3}{r^3} - 1\right) E_0 z, & \text{fuera de la esfera} \\ V_2 = -\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1} E_0 z, & \text{dentro de la esfera} \end{cases} \tag{210}$$

Verifiquemos que la solución satisface todos los requerimientos que demostramos

- $V_1(a) = V_2(a)$.
- $\overrightarrow{E}_1 = -\overrightarrow{\nabla} V_1 \to_{r\to\infty} E_0 \widehat{z}$.
- $\overrightarrow{E}_1(a) \times \widehat{r} = \overrightarrow{E}_2(a) \times \widehat{r}$ ($\overrightarrow{E}_1$ $\overrightarrow{E}_1$)
- Si hacemos $\overrightarrow{D}_1 = \varepsilon_1 \overrightarrow{E}_1$ y $\overrightarrow{D}_2 = \varepsilon_2 \overrightarrow{E}_2$, entonces se verifica que $\overrightarrow{D}_1(a) \cdot \widehat{r} = \overrightarrow{D}_2(a) \cdot \widehat{r}$.

Dentro de la esfera $\overrightarrow{E}_2 = -\overrightarrow{\nabla} V_2 = cte$ y su valor es

$$E_2 = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E_0 \widehat{z} = \frac{\overrightarrow{D}_2}{\varepsilon_2}. \tag{211}$$

Y afuera de la esfera el campo es igual a E_0 más el creado por un dipolo $\overrightarrow{\mu}$ (inducido) en el origen dado por (53).

$$E_1 = E_0\widehat{z} + \frac{k_e}{r^{\acute{o}3}}\left[3\left(\overrightarrow{\mu}\cdot\widehat{r}\right)\cdot\widehat{r} - \widehat{\mu}\right]. \tag{212}$$

y el valor de $\overrightarrow{\mu}$ está dado por

$$\overrightarrow{\mu} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \widehat{z}\ , \tag{213}$$

con lo cual se redujo el efecto de la esfera a un dipolo inducido $\overrightarrow{\mu}$ por $\overrightarrow{E}_0$. Veamos tres casos.

<u>**Cavidad en un dieléctrico**</u> En ese caso ε_2=ε_0, y definiendo la permitividad relativa $K_1 = \varepsilon_1/\varepsilon_0$, resulta

$$E_2 = \frac{3K_1}{1+2K_1}E_0\widehat{z} = \frac{\overrightarrow{D}_2}{\varepsilon_2}\ . \tag{214}$$

$$\overrightarrow{\mu} = \frac{1-K_1}{1+2K_1}4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0\widehat{z}\ . \tag{215}$$

<u>**Esfera dieléctrica en el vacío**</u> En ese caso ε_1=ε_0, y definiendo la permitividad relativa $\mathrm{K}_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_0$, resulta

$$E = \frac{3}{2+K_2}E_0\widehat{z} = \frac{\overrightarrow{D}_2}{\varepsilon_2}\ , \tag{216}$$

$$\overrightarrow{\mu} = \frac{K_2-1}{K_2+2}4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0\widehat{z}\ . \tag{217}$$

y esta es la famosa formula de **Clausius Mossotti** (1850).

<u>**Esfera conductora en el vacío**</u>. Como vimos, en ese caso se toma $K_2 \to \infty$, por lo que

$$\overrightarrow{\mu} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0\widehat{z} = \alpha\overrightarrow{E}_0\ , \tag{218}$$

$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3 = \textbf{polarizabilidad}\ , \tag{219}$$

que ya vimos en la ecuación (66). Notese que en el sistema gaussiano ($4\pi\varepsilon_0 \equiv 1$) por lo que $\alpha = a^3 = (3/4\pi) \times$ Volumen. En este modelo la polarización de los átomos (considerados como esferas conductoras) es proporcional al volumen. Será importantísimo para determinar las propiedades ópticas de ciertos materiales (aisladores por ejemplo).

VI. MATERIALES OHMICOS Y CIRCUITO DE CORRIENTE CONTINUA

A. Ley de Ohm microscópica. Modelo de Drude.

Supongamos un electrón ($q = -e$) que se mueve libremente en presencia de un campo eléctrico $\overrightarrow{E}$. según la 2da ley de Newton recibe una fuerza $\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{E} = m_e\overrightarrow{a} = m_2 d\overrightarrow{v}/dt$ y el electrón se acelera. Si el medio fuese un conductor ideal, el electrón se movería hacia la superficie y permanecería allí ya que no puede escapar. Si es un material óhmico el electrón choca con los otros electrones e iones del cuerpo y recibe una fuerza de rozamiento $\overrightarrow{F}_r = -\alpha\overrightarrow{v}$ (igual que la ley de Stokes). La ley de Newton es entonces

$$\sum \overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{E} - \alpha\overrightarrow{v} = m_e\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \tag{220}$$

el coeficiente de rozamiento α tiene dimensiones de masa sobre tiempo, por lo que nos conviene escribir $\alpha = m_e/\tau$, y a τ se lo conoce como *relaxation time* (o *mean free time*) y tiene que ver con el tiempo entre colisión y colisión. En el estado estacionario $d\overrightarrow{v}/dt = 0$, entonces $\overrightarrow{v} = -e/\alpha\overrightarrow{E}$. A esta velocidad de los electrones en la dirección del campo se la llama velocidad de desplazamiento. Si tenemos $n = N/V$ =densidad de electrones (o cualquier otro *carrier*), entonces podemos definir la densidad de corriente

$$\overrightarrow{J} = -en\overrightarrow{v} = -en(-e\tau/m_e)\overrightarrow{E} = \frac{e^2 n\tau}{m_e}\overrightarrow{E}, \quad \text{entonces} \tag{221}$$

$$\boxed{\overrightarrow{J} = \sigma\overrightarrow{E}\ , \qquad \textbf{ley de Ohm microscópica}} \tag{222}$$

$$\sigma = \frac{e^2 n\tau}{m_e} = \quad \textbf{conductibilidad ,} \tag{223}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \quad \textbf{resistividad .} \tag{224}$$

Nótese que los campos eléctricos a nivel atómico son muy grandes. Por ejemplo tomemos el cobre con una densidad electrónica $n \approx 8 \times 10^{28}$ elec./m^3, de lo que se deduce que la distancia entre ellos es del orden de $d \approx \sqrt[3]{n} \approx 10^{-9}$. El campo eléctrico, será del orden de

$$E_{ee} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{d^2} \approx 10^{11}\frac{N}{C} \approx 10^{11}\frac{Volts}{m}\ , \tag{225}$$

lo cual es enorme. Pensemos a nivel humano (distancias del orden del metro): las baterías son del orden del Voltio, la red domiciliaria $\approx$ 220 Voltios. Aun el transporte de corriente que se hace vía las torres de alta tensión son del orden de los 10^4 Volts. En este sentido, la ley de Ohm $\overrightarrow{J} = \sigma \overrightarrow{E}$ podría pensarse como el primer orden de una serie perturbativa de la densidad de corriente $\overrightarrow{J}(\overrightarrow{E})$ para bajos valores de E. Los electrones libres (*free electron gas*) que fluyen con el campo eléctrico se mueven al azar con velocidades comparativamente enormes (velocidad de Fermi), del orden de, digamos; $1.5{\times}10^6$ m/seg= 1500 Km/seg!. Sin embargo en la dirección del campo ($\overrightarrow{v}$ en (221) es pequeñísima (digamos del orden de los milímetros por segundo) como veremos luego,

B. Corriente eléctrica.

Supongamos una densidad de corriente de electrones $\overrightarrow{J}$ según (221). Si tuviesemos varios *carrier* con cargas eléctricas (electrones, iones, agujeros, etc), entonces se generaliza obiamente a $\overrightarrow{J} = \sum_j q_j n_j \overrightarrow{v}_j$. Se define corriente eléctrica i como la cantidad de carga (Coulombs) que fluye sobre una determinada superficie S por unidad de tiempo (en forma analoga al caudal en un fluido), matematicamente

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{226}$$

La corriente entonces es un escalar y su unidad es $[i]$=C/seg=Ampere. En general vales

$$i = \frac{Q}{t} = \iint_S \overrightarrow{J} \cdot \widehat{n}\, ds = \quad \textbf{corriente eléctrica ,} \tag{227}$$

siendo, como siempre, $\widehat{n}$ la normal a la superficie S. Simplificadamente podemos escribir $i = \overrightarrow{J} \cdot \widehat{n}\; S = qnS(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n})$. Vale entonces $i = qnS(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}) = (-q)nS((-\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{n})$. Luego, i tiene el mismo valor cuando tenemos cargas eléctricas q que se mueven en dirección de $\overrightarrow{v}$, que cargas $-q$ que se mueven en dirección $-\overrightarrow{v}$. Trabajamos por convención con cargas positivas que se mueven con un sentido ($\oplus \rightarrow \ominus$), cuando en realidad en la mayoría de los casos son cargas opuestas (electrones) que se mueven en sentido contrario ($\ominus \rightarrow \oplus$).

C. Velocidad de desplazamiento

Supongamos un simple conductor cilíndrico (un cable) por el que circulan electrones caracterizados por la densidad de corriente $\overrightarrow{J}$ según (221)

$$i = \iint_S \overrightarrow{J} \cdot \widehat{n}\, ds = JS = envS, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{i}{enS} \; . \tag{228}$$

De esta manera podemos calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones en la dirección del campo eléctrico. Supongamos un cable de Cu ($n \approx 8.5 \times 10^{28}$, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulombs, radio del cable= 0.5 mm) por el que circulan 5 Amperes, los electrones tienen una velocidad de 0.46 mm/seg; extremadamente lentos. más aún si lo comparamos con la velocidad al azar del orden de 1500 Km/seg.

D. Ley de Ohm macroscopica

Volvamos al conductor más simple, nuevamente el cable cilindrico, podemos escribir

$$\begin{aligned}
i &= \iint_S \overrightarrow{J} \cdot \widehat{n}\, ds = JS \; , \qquad \text{usando Ohm microscopica} && (229)\\
&= \sigma E\; S, && (230)\\
E &= \text{-}\nabla V = -dV/dx = V/l \; , \quad \text{reemplazando} && (231)\\
i &= \sigma \frac{V}{l} S \quad \text{llamando} \; , && (232)\\
R &= \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S} = \textbf{resistencia} \quad (\text{medio} \times \text{geometria}) && (233)
\end{aligned}$$

entonces

$$\boxed{R = \tfrac{V}{i} \qquad \textbf{Ley de Ohm macroscopica ,}} \tag{234}$$

o equivalentemente

$$C = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{l} \qquad \textbf{Conductancia .} \tag{235}$$

Ahora podemos redefinir las unidades en términos macroscópicos

$$
\begin{aligned}
[R] &= \frac{Vol}{ampere} = \text{Ohm} = \Omega \ , & (236)\\
[C] &= \frac{Ampere}{Vol} = \frac{1}{\Omega} = \text{mho} = \mho, \qquad \text{entonces} & (237)\\
[\sigma] &= \frac{1}{Ohm \times metros} = \frac{\mho}{m} \ , & (238)\\
[\rho] &= Ohm \times metros = \Omega m \ . & (239)
\end{aligned}
$$

Incluir Tabla de conductibilidades.

Notese que si reescribimos la ley de Ohm sabiendo que (en una dirección) $E = -dV/dx$ e $i = dq/dt$, resulta

$$
\frac{dq}{dt} = \sigma S \frac{dV}{dx} \ , \tag{240}
$$

que tiene la misma estructura que la propagación del calor Q

$$
\frac{dQ}{dt} = -k_T S \frac{dT}{dx} \ , \tag{241}
$$

donde k_T la conductibilidad termica y dT/dx es el gradiente de temperatura. La razon es que tanto el calor como la corriente eléctrica son transportados (esencialmente) por los electrones. Un buen conductor de la electricidad (Ag, Cu, Au) generalmente es un buen conductor del calor. Hay otra expresión equivalente a las ecuaciones (240) y (241) para los fluidos reales (con viscosidad) en términos del caudal y del gradiente de la presion.

La resistencia es el segundo elemento circuital (vimos la capacitancia (C) y nos queda ver la inductancia (L)). Podemos conectarlas en serie o en paralelo. Si conectamos 2 resistencias R_1 y R_2 en paralelo, los extremos estaran al potencial y por ambas resistencias pasan i_1 e i_2 tal que $i = i_1 + i_2$, entonces

$$
\begin{cases} i_1 = \frac{V}{R_1} \\ i_2 = \frac{V}{R_2} \end{cases} , \quad \text{sumando} \tag{242}
$$

$$
i = i_1 + i_2 = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = V\frac{1}{R} = i. \tag{243}
$$

O sea se comporta como una sola resistencia de valor $R = R_1 R_2/(R_1 + R_2)$. Si los conectamos en serie por las resistencias pasarán las misma corriente i y en cada una de ellas habra una caida de tensión V_1y V_2

$$\begin{cases} V_1 = iR_1 \\ V_2 = iR_2 \end{cases} , \quad \text{sumando} \tag{244}$$

$$V_1 + V_2 = V = i(R_1 + R_2) = iR, \tag{245}$$

produciendo una suma directa $R = R_1 + R_2$. La generalización a varias resistencias es inmediata

$$\begin{array}{ll} R = \sum_i R_i & \text{en serie} \\ \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} & \text{en paralelo} \end{array} \tag{246}$$

E. Variación de la resistencia con la temperatura

En la práctica se encuentra que la resistividad cambia con la temperatura, o sea: $\rho = \rho(T)$. Si hacemos una serie de potencias alrededor del valor T_0 $(T_0 = 20^{\circ} C)$ resulta

$$\rho(T) = \rho(T_0) + \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{T=T_0} (T - T_0) + \mathcal{O}\left[(T - T_0)^2\right] \tag{247}$$

$$= \rho(T_0)\left[1 + \alpha(T - T_0)\right], \tag{248}$$

$$\alpha = \frac{\left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{T=T_0}}{\rho(T_0)} \simeq \overline{\alpha} = \frac{1}{\rho(T_0)} \frac{\rho(T) - \rho(T_0)}{T - T_0} \tag{249}$$

A $\overline{\alpha}$ se lo conoce como **coeficiente medio de temperatura de la resistividad**. Para conductores Al, Cu y Ag $\overline{\alpha} \simeq 3.9 \times 10^{-3 \circ} K^{-1}$ o sea la resistencia aumenta con la temperatura. El comportamiento de $\rho(T)$ es bastante lineal en un amplio rango de T. En otros casos tales como el grafito la resistividad decrece con la temperatura $\overline{\alpha} \simeq -5 \times 10^{-4 \circ} K^{-1}$. Para construir resistencias patrones se usaba la manganina con $\overline{\alpha}$ muy pequenos: $\overline{\alpha} \simeq 1 \times 10^{-5 \circ} K^{-1}$

F. Ecuación de continuidad. Corrientes estacionarias

La ecuación de continuidad expresa el principio de conservación de la carga (válida también para fluidos e inclusive para la cuántica). Consideremos una superficie cerrada cualquiera $\mathcal{S}$ que intercambia carga con el exterior via una densidad de corriente $\overrightarrow{J}$. La corriente que ingresa al volumen encerrado por $\mathcal{S}$ es

$$i = \oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{J} \cdot \widehat{n}\, ds = \frac{dQ}{dt} \tag{250}$$

y $\widehat{n}$ es el versor perpendicular (saliente) de la superficie. Donde $\overrightarrow{J} \cdot \widehat{n} > 0$ sale carga y donde $\overrightarrow{J} \cdot \widehat{n} < 0$ entra carga. Por otro lado la carga en el interior estara dada por

$$Q = \int_{\mathcal{V}} \rho(\overrightarrow{r}') \, d\overrightarrow{r}' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{\mathcal{V}} \frac{d\rho(\overrightarrow{r}')}{dt} \, d\overrightarrow{r}' \, . \tag{251}$$

La conservación de la carga implica que todo lo que entra se acumula, por lo tanto vale

$$\iint_{\bigcirc \mathcal{S}} \overrightarrow{J} \cdot \widehat{n} \, ds + \int_{V} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\overrightarrow{r}') \, d\overrightarrow{r}' = 0 \, . \tag{252}$$

Usando el teorema de la divergencia resulta que

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(\overrightarrow{r}') + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{J} \right] d\overrightarrow{r}' = 0 \, . \tag{253}$$

Como esta expresión es válida para cualquier volumen que consideremos, entonces

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{J} = 0 \, , \qquad \textbf{ecuación de continuidad .}} \tag{254}$$

En el caso particular de que no se acumule carga en ningun lugar o sea que $\partial\rho/dt = 0$, podemos decir que

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{J} \qquad \textbf{regimen estacionario}} \tag{255}$$

En lo que sigue trabajaremos con corrientes estacionarias.

G. Circulación del campo eléctrico. Fuerza electromotriz

Debido al rozamiento, para mantener la corriente eléctrica en un circuito es necesario la existencia de fuerza externas (digamos químicas.) no conservativas que compensen la energía disipada por los choques.

Circulación sin f.e.m. Tomemos una espira cerrada de material óhmico y supongamos que circulase una corriente eléctrica. Sabemos que los electrones se mueven forzados por un campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ que debe satisfacer $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = 0$, o lo que es lo mismo $\oint \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = 0$ tomando $\widehat{E} \parallel \widehat{dl}$ siendo $\widehat{dl}$ un diferencial de espira. Si el material es Ohmico, entonces vale $\overrightarrow{J} = \sigma \overrightarrow{E}$, por lo que

$$0 = \oint \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = \oint \frac{\overrightarrow{J}}{\sigma} \cdot d\overrightarrow{l} = \sigma \oint \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{l} \approx \sigma J l > 0 \, . \tag{256}$$

Lo que resulta una contradicción (a menos que $\sigma = 0!$). No es posible entonces que el flujo J se mantenga indefinidamente en el tiempo.

Circulación con f.e.m. Supongamos el mismo caso, pero ahora intercalamos una batería en un cierto punto del circuito. Dentro de la batería se hace un trabajo por unidad de carga eléctrica W/q. Los electrones sufrirán una cierta fuerza, que la podriamos llamar "química" $\overrightarrow{F}_{quim}$. En analogía con $E = F/q$, podemos imaginar un campo (no conservativo, a este nivel) tal que sea $\overrightarrow{F}_{Quim}/q$. Consideremos dos puntos del circuito a y b que encierran la batería, podemos escribir entonces

$$\overrightarrow{J} = \sigma\left(\overrightarrow{E} + \frac{\overrightarrow{F}_{quim}}{q}\right) \Rightarrow \overrightarrow{E} = \frac{1}{\sigma}\overrightarrow{J} - \frac{\overrightarrow{F}_{quim}}{q}, \tag{257}$$

e integrando resulta

$$\int_a^b \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{l} = \int_a^b \frac{1}{\sigma}\overrightarrow{J}\cdot d\overrightarrow{l} - \int_a^b \frac{\overrightarrow{F}_{quim}}{q}\cdot d\overrightarrow{l}\ . \tag{258}$$

Analizando cada término, tenemos

$$\int_a^b \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{l} = -\int_a^b \overrightarrow{\nabla}V\cdot d\overrightarrow{l} = V(a) - V(b)\ , \tag{259}$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma}\overrightarrow{J}\cdot d\overrightarrow{l} = \frac{J\Delta l}{\sigma} = \frac{i}{A}\frac{\Delta l}{\sigma} = i\underbrace{\left(\frac{\Delta l}{\sigma A}\right)}_{R} = iR\ , \tag{260}$$

$$\int_a^b \frac{\overrightarrow{F}_{quim}}{q}\cdot d\overrightarrow{l} = \varepsilon = \quad \textbf{fuerza electromotriz ,} \tag{261}$$

y ε es un trabajo ($\overrightarrow{F}_{quim}\cdot d\overrightarrow{l}$) por unidad de carga , se denomina fem y su unidad es $[\varepsilon]$=voltio . Hemos considerado que $\varepsilon > 0$ porque $\overrightarrow{F}_{quim}.d\overrightarrow{l} > 0$ o sea que la fuerza $\overrightarrow{F}_{quim}$, en nuestro caso, trabaja en la dirección de $d\overrightarrow{l}$, que es el sentido de la corriente, de lo contrario será negativa. Luego escribimos

$$V(a) - V(b) = iR - \varepsilon\ . \tag{262}$$

Si $a = b$, tenemos $\varepsilon = iR$. que es lo que esperamos de la ley de Ohm.

H. Ley de Joule

Consideremos el circuito mas sencillo: una batería conectada a un "aparato" (un electrodomestico, motor..etc) por el circuito pasa una corriente i y entre los extremos del aparato hay una diferencia de potencial V. Un diferencial de carga dq que se mueve entre los extremos de del aparato disminuye su energía potencial dU

$$dU = V dq = V(idt) \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = Vi = \frac{\text{Joule}}{\text{Segundo}} = \text{potencia=Watt} \tag{263}$$

Esta es la potencia W entregada por la batería al aparato, luego

$$\boxed{\text{W=Vi} \qquad \textbf{Ley de Joule}} \tag{264}$$

Es interesante notar que el Watt es una unidad introducida en mecanica y aqui se deriva en relación a variables eléctricas Watt=Volt×Ampere. Si el aparato es equivalente a una resistencia (lámpara de filamento 20-100 Watts, bajo consumo 9-20 Watt, 1 plancha ∼500Watt, etc) puedo usar la ley de Ohm, entonces

$$W = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \tag{265}$$

En el caso de ser una resistencia la energía es **disipada** (irreversible), cuando el aparato sea un capacitor o una inductancia la energía será acumulada o **almacenada** (reversible).

Las empresas de electricidad nos vende energía eléctrica y la factura se expresa en KiloWattHora (Energía=Potencia×tiempo) y la relacion es

$$1 \text{ kiloWatt hora} = 10^3 \text{W} \times 3600\text{seg} = 3.6 \ \times 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MegaJoule}$$

Una casa urbana tipo de esta ciudad gasta del orden de 400 kWh por mes. El BM da 3000 kWh per cápita por año para la Argentina (13300 EEUU y 24 Haití). Hoy, el costo del kWh este bimestre (cambia según la provincia) es de 0.23 pesos (0.10 con subsidio) El costo internacional varía mucho alrededor de 0.10 dolares.

I. Leyes de Kirchoff

Nos restringiremos al caso de corriente continua en estado estacionario, $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. Cuando se conectan arbitrariamente resistencias y baterías, las corrientes que circula en cada rama del circuito quedan determinadas por la ubicación y el valor de los componentes (baterías, resistencias y capacitores, hasta ahora). Las dos leyes de Kirchhoff constituyen dos reglas que permiten resolver en forma sistemática los circuitos.

1ra ley de Kirchhoff: Un nodo (*branch point*) es un punto del circuito donde se juntan dos o más conductores. Dice: "la suma algebráica de las corrientes que salen de un nodo debe ser nula". Su demostración es simple. Es una aplicación de la corriente estacionaria, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{J} = 0$. Si encerramos el nodo con una superficie cerrada, entonces

$$0 = \oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{J} \cdot \widehat{n}\, ds = \sum_n \overrightarrow{J}_n \cdot \overrightarrow{S}_n = \sum_n i_n \ . \tag{266}$$

2da. ley de Kirchhoff. Una malla (*loop*) es un camino cerrado en el circuito. Dice: "la suma algebráica de las caidas de potencial a lo largo de un circuito cerrado debe ser nula", o sea

$$\sum_n \varepsilon_n - \sum_j i_j R_j = 0 \ , \tag{267}$$

donde aquí i_j es la corriente que circula sobre la resistencia R_j. Su demostración es una simple extensión de la ecuación (262). Hay que tener cuidado en el caso tener mallas adyacentes. En caso de tener mallas lindantes hay que considerar el pasaje de corriente de las dos mallas sobre una resistencia común. Hay que tener en cuenta el sentido de las corrientes y baterías. El sentido de las baterías es del + al -. Hay una total analogía entre la circulación del agua en presencia de la gravedad con la corriente eléctrica. Una resistencia se comporta como una pendiente con piedras. Una batería es como una noria que eleva baldes de agua para ganar energía potencial.

J. Resistencia interna

La baterías tienen resistencia interna. Se puede demostrar su existencia haciendo un cortocircuito entre sus bornes. En ese caso debería ser $i = \varepsilon/R = \varepsilon/0 = \infty$, que no es cierto sino que se llega cierta $i_{\max} = \varepsilon/r_i$, y a r_i se lo conoce como resistencia interna. De esta manera la fuerza electromotriz real $\varepsilon_{\text{real}} = \varepsilon(i)$ difiere de la ideal ε. La forma más simple es considerar que entre los bornes de una batería hay un fem real tal que

$$\varepsilon_{\text{real}} = \varepsilon_{\text{real}}(i) = \varepsilon - i r_i \ , \tag{268}$$

Si no circula corriente $\varepsilon_{\text{real}}(0) = \varepsilon$, y a medida que crece la demanda de corriente, $\varepsilon_{\text{real}}$ disminuye. A esa resistencia interna se la trata como a cualquier otra del circuito y entra dentro de las ecuaciones de Kirchhoff.

Por ejemplo, si tomamos una pila de ZnCo tiene ε =1.5 Voltios siempre, no importa su estado de uso. Pero su r_i crece con el estado de uso. Si la pila es nueva entonces $r_i = 0.5\Omega$ y aumenta con el uso hasta valores de, digamos $r_i = 5\Omega$. Un ejemplo: supongamos que a esa pila se le coloca una lamparita de resistencia $R = 10\Omega$. Usando la 2da ley de Kirchhoff, resulta que la intersidad que circula es $i = \varepsilon/(R+r_i)$ y la potencia disipada por la lamparita será de

$$P_R = i^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R + r_i}\right)^2 R, \qquad \text{entonces} \tag{269}$$

$$P_R = \left(\frac{1.5}{10 + 0.5}\right)^2 10 = 0.2\ W \qquad \text{batería nueva ,} \tag{270}$$

$$P_R = \left(\frac{1.5}{10 + 5}\right)^2 10 = 0.1\ W \qquad \text{batería vieja .} \tag{271}$$

En este caso la lamparita ha disminuido un 50% de su intensidad lumínica y la batería debe ser cambiada. Para reducir la resistencia interna, conviene acoplar pilas en paralelo más que en serie ya que encontramos que

$$\begin{cases} r_i = r_{i1} + r_{i1} & \text{en serie} \\ \frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_{i1}} + \frac{1}{r_{i2}} & \text{en paralelo} \end{cases} \tag{272}$$

VII. MATERIALES ELECTRICOS. RESUMEN

Resumamos los materiales eléctricos:

• **Conductores ideales** ($E = 0$, o $V = cte$). Los electrones libres son los responsables de esta propiedad.

• **Materiales dieléctricos**. Caracterizados por polarizarse y presentar una densidad de dipolos por unidad de volumen $\vec{P}$ tal que (para medios LIH) $\vec{P} = \vec{P}_0 + \chi \vec{E} + ...$ la polarización $\vec{P}$ surge debido a 3 posibles situaciones:

Ferroeleléctricos o electretes: tienen momentos dipolares permanentes ($\vec{P}_0 \neq 0$).

Dipolares permanentes: El material está formado por moléculas polares que se alinean con el campo (por ejemplo H_2O).

Dipolares inducidas: moléculas originariamente no polares que en presencia de un campo eléctrico se polarizan (el modelo del "resorte") (por ejemplo, átomos en gral. H_2, O_2).

Materiales Ohmicos ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$) Los electrones libres fluyen como un fluido estacionario con rozamiento (chocando enter ellos y con los nucleos del material)