Primer parcial (Electrostática, medios y corrientes estacionarias)

1. Un capacitor está formado por dos conductores (perfectos) cónicos concéntricos, como se muestra en la Fig. 1a. Ambos conductores pueden considerarse infinitos. El conductor interior está conectado a tierra, mientras que el conductor exterior está a potencial V constante.

   (a) Analice la dirección y el sentido del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en todo punto del espacio. Deduzca de qué coordenadas dependerá y realice un dibujo cualitativo de las líneas de campo.

   (b) Considere dos superficies ortogonales a $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, separadas una pequeña distancia $r\,\delta\theta$ (ver Fig. 1b). Obtenga la forma funcional del campo eléctrico (entre los conductores) por aplicación directa de la ley de Gauss cuando $\delta\theta \to 0$. (*ayuda:* puede aproximar $\operatorname{sen}(\theta + \delta\theta) \approx \operatorname{sen}\theta + \cos\theta.\delta\theta$).

   (c) Calcule la densidad de carga en ambos conductores y su diferencia de potencial. Obtenga, a partir de esas magnitudes, los coeficientes de capacidad e inducción C_{11}, C_{12}, C_{21} y C_{22} (por unidad de area) para este capacitor.

2. Un capacitor consta de dos placas gruesas paralelas como se indica en la Fig. 2, separadas una distancia d y con una diferencia de potencial V entre ambas. La región derecha entre las placas está ocupada por un dieléctrico de constante ϵ. La región izquierda está ocupada en parte por un electrete de polarización P_0.

   (a) Calcule los vectores $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ y $\mathbf{P}$ entre las placas.

   (b) Calcule las densidades de carga libre y de polarización.

   (c) Calcule la energía almacenada en el espacio entre una placa y otra.

   (d) Calcule la capacidad del sistema.

   Datos: V, P_0, ϵ, x_1, x_2, h, d, ℓ.
   (nota: considere $d \ll x_1$, $d \ll x_2$ y $d \ll \ell$, y desprecie los efectos de borde en todas las fronteras entre un medio y otro.)

3. Se desea interconectar dos circuitos. Pero la potencia de salida de uno es muy grande y se requiere atenuarla. Por ello se intercala entre ambos un circuito "T" formado por las resistencias R_1, R_2 y R_3, según se muestra en la Fig. 3. La fuente V_g y la resistencia R_g corresponden al equivalente de Thevenin del circuito de mayor potencia. R_c (y $V_c = 0$) corresponden al equivalente de Thevenin del circuito que recibe la potencia. Se sabe que $R_g = R_c$.

(a) Se desea que el circuito "T" esté completamente adaptado, es decir, que la resistencia vista desde los bornes de AB hacia la derecha y desde A'B' hacia la izquierda sean iguales a $R_c = R_g$. ¿Cuál debe ser la relación entre R_1 y R_2? (*ayuda:* puede dar sus argumentos, sin hacer cuentas)

(b) Obtenga el valor de R_3 en función de R_1 y R_c en las condiciones del punto anterior.

(c) Calcule la relación de tensiones $V_{A'B'}/V_{AB}$ como función de R_1 y R_c.

(d) Si se pide que $V_{A'B'} = k\,V_{AB}$ (donde k es un factor de atenuación fijo), exprese los valores de R_1, R_2 y R_3 como función de k.

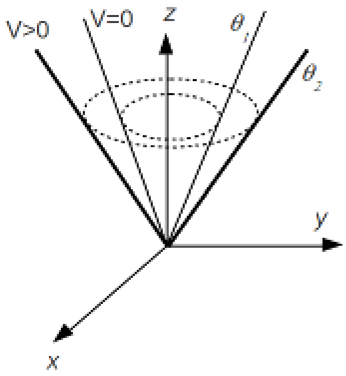

Figura 1a

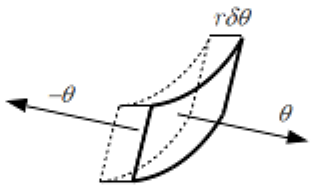

Figura 1b

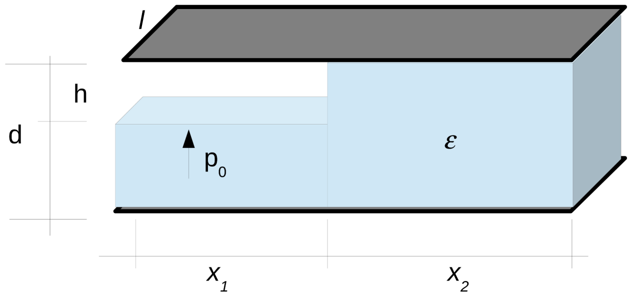

Figura 2

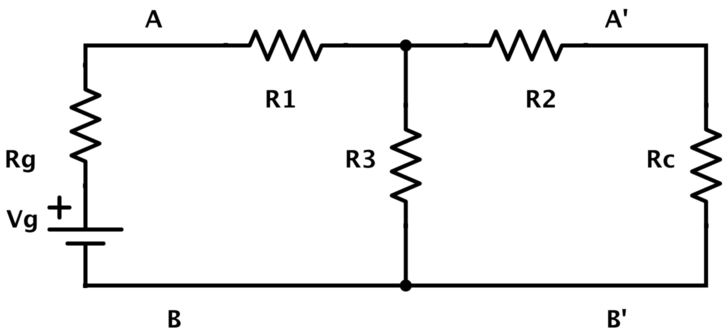

Figura 3

Integrales varias:

$$\int \tan ax\, dx = -\frac{1}{a} \ln\Big(\cos ax\Big) \quad , \quad \int \frac{dx}{\tan(ax)} = \frac{1}{a} \ln\Big(\operatorname{sen} ax\Big) \tag{1}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(ax)} = \frac{1}{a} \ln\left(\tan \frac{ax}{2}\right) \quad , \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(ax)} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctan}(ax) \tag{2}$$

Solución al problema 1

Ambos conductores son perfectos. Por lo tanto, deben coincidir con superficies equipotenciales. Si las superficies equipotenciales tienen dirección en $\hat{\boldsymbol{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ (en coordenadas esféricas), entonces el campo eléctrico sólo puede tener componente $E_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ya que debe ser ortogonal a las superficies equipotenciales. Además, dada la simetría de revolución del condensador, el campo eléctrico no puede depender de la coordenada φ.

$$\mathbf{E} = E(r,\theta)\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{3}$$

En la región encerrada por los conos conductores no hay cargas. En ese caso, según la ley de Gauss, el flujo a traves de todas las caras que encierran un cierto volumen, es nulo. Si consideramos el volumen de la Fig. 1b resulta

$$\Delta\varphi \int_{r_1}^{r_2} r\,dr \Big[E(r,\theta+\delta\theta)\,\mathrm{sen}\,(\theta+\delta\theta) - E(r,\theta+\delta\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\Big] = 0 \tag{4}$$

Como esta integral vale para cualquier (r,θ) dentro del capacitor, entonces el integrando debe ser nulo. Si aplicamos la aproximación propuesta para cuando $\delta\theta \to 0$, resulta

$$\Big[E(r,\theta+\delta\theta) - E(r,\theta)\Big]\,\mathrm{sen}\,\theta = -\delta\theta . E(r,\theta+\delta\theta)\,\cos\theta \tag{5}$$

En el límite cuando $\delta\theta \to 0$, el primer miembro (dividido por $\delta\theta$) se convierte en una derivada parcial y resulta la ecuación

$$\frac{\partial E(r,\theta)}{\partial\theta} = -E(r,\theta)\,\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta} \quad , \quad \frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial\theta} = -\frac{1}{\tan\theta} \tag{6}$$

La solución de esta ecuación es inmediata, pero hay que tener en cuenta que las constantes de integración pueden depender de la coordenada radial.

$$\ln(E) = c(r) - \int \frac{d\theta}{\tan\theta} = c(r) + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\right) \qquad \Rightarrow \qquad E(r,\theta) = \frac{C(r)}{\mathrm{sen}\,\theta} \tag{7}$$

donde $c(r) = \ln[C(r)]$. Para determinar $C(r)$ es necesario examinar las condiciones de contorno del problema. Se sabe que entre las placas se aplica una diferencia de potencial V. Por lo tanto,

$$-V = \int_{r(\theta_1)}^{r(\theta_2)} E(r,\theta)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{C(r)}{\mathrm{sen}\,\theta}\,r\,d\theta = C(r)r\,\ln\left[\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right] \tag{8}$$

con lo que resulta la determinación

$$C(r) = -\frac{V}{r}\,\ln^{-1}\left[\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right] \tag{9}$$

La densidad de carga se obtiene por simple aplicación de la condición de la ley de Gauss. El campo eléctrico es nulo fuera de la región encerrada por los conductores. Por lo tanto,

$$\sigma_1(r) = -\frac{A}{\epsilon_0\,\mathrm{sen}\,\theta_1}\,\frac{1}{r} \quad \text{(interior)} \quad , \quad \sigma_2(r) = \frac{A}{\epsilon_0\,\mathrm{sen}\,\theta_2}\,\frac{1}{r} \quad \text{(exterior)} \tag{10}$$

El coeficiente de inducción $C_{12} = C_{21}$ corresponde a la carga en un conductor cuando el otro está a potencial V. Si se integra la densidad de carga sobre un sector del cono se obtiene

$$\frac{Q_1}{\epsilon_0} = \int_S \mathbf{E}(r,\theta_1)\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}\, r\,\mathrm{sen}\,\theta_1\, dr\, d\varphi = -S\,V\;\ln^{-1}\left(\frac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}\right) \tag{11}$$

y por lo tanto

$$\frac{C_{12}}{S} = -\epsilon_0\;\ln^{-1}\left(\frac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}\right) \tag{12}$$

y de manera similar se obtienen los demás coeficientes.

Solución al problema 2

Sabemos que entre las placas del capacitor se fijó una diferencia de potencial V. Vamos a analizar el comportamiento del campo eléctrico despreciando efectos de borde. Por lo tanto, el análisis sólo será aproximado y debe entenderse lejos de los límites del capacitor y de la región de contacto entre el dieléctrico y el electrete.

Por lo tanto, para cualquier camino que se realice en el seno del dieléctrico, lejos de los bordes) debe cumplirse (por definición) que

$$V = \int \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{d+h} E_z\, dz = E_z\,(d+h) \tag{13}$$

donde se consideró que el campo es uniforme en la dirección $-\hat{\boldsymbol{z}}$ (debido a que se están despreciando los efectos de borde).

En la región ocupada por el electrete (y lejos de los bordes), se debe tomar en cuenta que éste posee cargas de polarización en sus bordes, dadas por $\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \pm P_0(\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}) = \pm P_0$. El signo "+" corresponde al borde superior y el signo "-" al inferior. Por lo tanto, a la altura d tendremos un "salto" de campo eléctrico debido a $\sigma_P = P_0$. Si condideramos una superficie gaussiana para el borde superior del electrete, observamos que

$$E_{d^-} - E_{d^+} = \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} = \frac{P_0}{\epsilon_0} \tag{14}$$

conocida la relación entre el campo en el vacío (E_{d^+}) y en el electrete (E_{d^-}), podemos determinar el campo de ambos a traves de la diferencia de potencial entre las chapas conductores

$$V = \int \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{h} E_{d^+}\, dz + \int_h^{d+h} E_{d^-}\, dz = E_{d^+}\,h + E_{d^-}\,d = E_{d^+}\,(h+d) + \frac{P_0 d}{\epsilon_0} \tag{15}$$

donde resultan los campos

$$E_{d^+} = \frac{1}{h+d}\Big(V - \frac{P_0 d}{\epsilon_0}\Big) \quad , \quad E_{d^-} = \frac{1}{h+d}\Big(V + \frac{P_0 h}{\epsilon_0}\Big) \tag{16}$$

El vector desplazamiento se obtiene inmediatamente porque en el dieléctrico $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, en el electrete $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ y en vacío $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$.

La densidad de carga libre en las chapas conductoras se obtiene por medio de la ley de Gauss. Luego de realizar los cálculo, resulta $\sigma_L = \mathbf{D} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$. En el dieléctrico (lejos de los bordes) $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$.

Solución al problema 3

El circuito "T" se encuentra completamente adaptado y $R_g = R_c$. Por lo tanto, por simple simetría se ve que debe cumplirse que $R_1 = R_2$. Pero además, la condición de adaptación determina el valor de R_3, ya que mirando desde R_g hacia la derecha, debemos observar una resistencia R_c. Entonces,

$$R_g = R_1 + [R_3 \parallel (R_2 + R_c)] \qquad \Rightarrow \qquad R_c = R_1 + [R_3 \parallel (R_1 + R_c)] \tag{17}$$

resolviendo la ecuación, se obtiene

$$R_c = R_1 + \frac{R_3\,(R_1 + R_c)}{R_3 + R_1 + R_c} \qquad \Rightarrow \qquad R_3 = \frac{R_c^2 - R_1^2}{2R_1} \tag{18}$$

Si deseamos encontrar la relación de transferencia $V_{A'B'}/V_{AB}$ como función de R_1 y R_c, debemos hallar las corrientes y tensiones del circuito. En método práctico para hacer esto es poner a tierra el borne negativo de V_g y llamar V_c al nodo central del circuito (nodo común entre R_1, R_2 y R_3). Entonces, podemos escribir la relación de Kirchoff $I_{R_1} = I_{R_3} + I_{R_c}$

$$\frac{V_A - V_c}{R_1} = \frac{V_c}{R_3} + \frac{V_{A'}}{R_c} \qquad \text{y} \qquad V_{A'} = \frac{R_c}{R_2 + R_c}\,V_c = \frac{R_c}{R_1 + R_c}\,V_c \tag{19}$$

se deduce que

$$\frac{V_A}{R_1} - \frac{V_{A'}}{R_c} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)V_c = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)\frac{R_1 + R_c}{R_c}\,V_{A'} \tag{20}$$

y por lo tanto

$$\frac{V_{A'}}{V_A} = \frac{R_c}{2R_1 + R_c + 2R_1[(R_1^2 + R_1 R_c)/(R_c^2 - R_1^2)]} \tag{21}$$

El cociente $V_{A'}/V_A$ representa una atenuación de valor k en el circuito. Si se reemplaza por este parámetro de atenuación en la relación anterior, se obtiene luego de operar algebraicamente

$$R_1 = R_c\,\frac{k - 1}{k + 1} \qquad , \qquad R_3 = 2R_c\,\frac{k}{k^2 - 1} \tag{22}$$