1 Función delta de Dirac

Consideremos una densidad de carga $\rho(\vec{r})$ localizada. Entonces vale que:

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Ahora imaginense que queremos utilizar esta fórmula tambien para el caso en que tengamos una única partícula. Cómo escribimos la 'densidad' de carga asociada a una partícula puntual de carga q ubicada en la posición $\vec{r}_0$? En principio necesitariamos que la función $\rho(\vec{r})$ satisfaga las siguientes propiedades:

$$\rho(\vec{r}) = 0 \qquad \forall \vec{r} \neq \vec{r}_0 \tag{1}$$

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad \text{si} \quad \vec{r}_0 \in V \tag{2}$$

Para escribir una expresión que permita cumplir las dos últimas condiciones emplearemos una *función*, la delta de Dirac $\delta(\vec{x})$, de manera que

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{3}$$

Ahora, $\delta(\vec{x})$ debe ser tal que, cuando el volumen de integración incluya al punto $\vec{r}_0$, valga que

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV = \int_V q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = q \underbrace{\int_V 1\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV}_{1} = q \tag{4}$$

Cuando el dominio de integración incluye un punto en el cual el argumento de la δ se anula (en este caso $\vec{r}_o$), la integral resulta igual al valor de la función que aparece como factor de la δ, evaluada en dicho punto (en este caso dicha función es la funcón constante 1).

Generalizando esto último, vamos a considerarcomo definición, que la *función* δ cumple que

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{si} \ \vec{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \tag{5}$$

1.1 Caso 1D

La *función* δ no es formalmente una función, sino que puede ser descripta como una *secuencia de funciones* que tienen un límite definido cuando se las integra. Existen varias maneras de generar estas secuencias, de manera de cumplir con la propiedad explicitada en (5). En todos los casos la representación de la δ involucra una secuencia de funciones que tienden a una forma de ancho infinitesimal, pero de área unidad. Por ejemplo, en 1 dimensión:

- Representación tipo función escalón:

$$\delta_\epsilon(x-a) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & a-\epsilon < x < a+\epsilon \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- Representación tipo Gaussiana:

$$\delta_\epsilon(x-a) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{x}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\epsilon^2}}$$

En ambos casos se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta_\epsilon(x-a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x-a)\delta_\epsilon(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx[f(a) + xf'(a) + ...]\delta_\epsilon(x) \end{aligned}$$

donde asumimos que $f(x)$ es una función bien comportada en el sentido que todas las integrales convergen para todo valor de ϵ.

Para ver como se comporta la última integral analicemos, utilizando la representación tipo función escalón de la δ, integrales del tipo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \delta_\epsilon(x) &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx x^n \frac{1}{2\epsilon} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1}\epsilon^n & n = 0,2,4,... \\ 0 & n = 1,3,5,... \end{cases} \underbrace{=}_{\epsilon\to 0} \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \end{aligned}$$

De esta manera, todos los términos, salvo el del orden cero, del desarrollo de Taylor se integran a cero en el límite $\epsilon \to 0$ por lo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x-a) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta_\epsilon(x-a) = f(a)$$

Vemos entonces que la representación propuesta de la δ cumple con la propiedad (5).

1.2 El caso 3D

El caso tridimensional resulta

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

2 Teorema de Helmholtz

El siguiente teorema se conoce como el *teorema fundamental del análisis vectorial.*
Teorema: Un campo vectorial continuo, $\vec{A}$, puede descomponerse como suma de un gradiente y un rotor:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{\omega}(\vec{r})$$

donde ϕ se denomina *potencial escalar* y $\vec{\omega}$ *potencial vector*.
Prueba Dado el campo de interés, $\vec{A}$, para esta demostración vamos a introducir un campo vectorial auxiliar $\vec{v}(\vec{r})$ definido como:

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

Asumiremos además que $\vec{A} \to 0$ al menos como $1/r^2$, de manera que la integral converja, aún cuando V sea tomado como todo el espacio.

Comencemos aplicando el operador laplaciano a ambos miembros de la igualdad. Componente a componente, debe valer que

$$\nabla^2 v_i(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V A_i(\vec{r}')\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \tag{6}$$

1. Concentremonos primero en entender que significa la expresión $\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ que aparece en el integrando. Para ello notemos que el gradiente de $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ es

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \forall\vec{r} \neq 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla^2\frac{1}{r} &= \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) \\ &= \vec{\nabla}.\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \\ &= 0 \qquad \forall\vec{r} \neq 0 \end{aligned}$$

así que el Laplaciano de $1/r$ es un campo escalar identicamente nulo en todo punto **salvo** en el origen.

Para ver que ocurre en ese punto en particular notemos que, usando el teorema de Gauss, una integral de volumen de dicha función se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV &= \int_V \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) = \oiint_{S(V)} -\frac{\vec{r}}{r^3}.d\vec{S} \\ &= -\oiint_{S(V)} \frac{\vec{r}.\hat{n}}{r^2}.dS = -\oiint_{S(V)} d\Omega\end{aligned}$$

Como vimos en clase, la última integral es la del ángulo sólido subtendido por una superficie cerrada desde el origen. Por lo tanto:

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV = \begin{cases} -4\pi & \text{si } \vec{r} = 0 \in V \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Por lo tanto encontramos que $\nabla^2 \frac{1}{r}$ es nulo en todo el espacio, excepto el origen, y que su integral sobre cualquier volumen que incluya al origen e sigual a -4π. Estas son justamente las propiedades de la Delta de Dirac: $\delta(\vec{r})$, que describimos con un poco más en detalle en la Sección (1.1):

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$$

El caso general se obtiene reemplazando $r = |\vec{r}|$ por $s = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ en cuyo caso

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Esta última expresión es la que estábamos buscando.

2. Con lo que aprendimos, podemos volver ahora a la ecuación (6)

$$\begin{aligned}\nabla^2 v_i(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V A_i(\vec{r}')\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_V A_i(\vec{r}')(-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'))dV' = A_i(\vec{r})\end{aligned}$$

donde la última igual se desprende de cómo actúa la δ dentro de la integral (ver eq (5)).

Para poder seguir adelante haremos uso de la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times v)$$

que, junto con el resultado obtenido arriba para la forma funcional que asumimos para $\vec{v}$ permite escribir:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\omega}$$

con

$$\phi = -\vec{\nabla}.\vec{v} \quad \vec{\omega} = -\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

Corolario: La divergencia y rotor de un campo vectorial lo definen unívocamente.

1. **Prueba de que rotor y divergencia definen un campo.** Tenemos que

$$\begin{aligned}\phi = -\vec{\nabla}.\vec{v} &= \vec{\nabla}\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_V A_i(\vec{r}')\partial_i^{'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV\end{aligned}$$

   La última integral se resuelve integrando por partes:

$$\begin{aligned}\int_V A_i(\vec{r}')\partial_i^{'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV &= \int_V \partial_i^{'}\frac{A_i(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV - \int_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\partial_i^{'}A_i(\vec{r}')dV \\ &= \int_S \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.d\vec{S} - \int_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\partial_i^{'}A_i(\vec{r}')dV\end{aligned}$$

   y como la integral de superficie se anula al considerar V como todo el espacio (recordar que $\vec{A} \to 0$ al menos como $1/r^2$) resulta:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{d(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

   por lo que el potencial escalar, ϕ, queda definido al conocer la divergencia de $\vec{A}(r), d(\vec{r})$.

   Así mismo

$$\begin{aligned}\omega_i(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\times\vec{\omega} &= -\epsilon_{ijk}\partial_j\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{A_k(\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \\ &= \epsilon_{ijk}\frac{1}{4\pi}\int_V A_k(\vec{r}')\partial_j^{'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\end{aligned}$$

   nuevamente, integrando por partes y reconociendo que la integral de superficie se anula obtenemos que:

$$\vec{\omega}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{c}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

   con ϕ y $\vec{\omega}$ definidos, queda definido nuestro campo de interés $\vec{A}$.

2. **Prueba de que el campo definido es único.**

   Supongamos que hay dos campos, $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ para los cuales: $\vec{\nabla}.\vec{A}_1 = \vec{\nabla}.\vec{A}_2 = d(\vec{r})$ y $\vec{\nabla}\times\vec{A}_1 = \vec{\nabla}\times\vec{A}_2 = \vec{c}(\vec{r})$.

Definamos un nuevo campo $\vec{D}(\vec{r}) = \vec{A}_1 - \vec{A}_2$. Este nuevo campo satisface que $\vec{\nabla}.\vec{D} = 0$ y $\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$. Por esta última igualdad sabemos que $\vec{D}$ es un campo conservativo, por lo que $\vec{D} = -\vec{\nabla}\psi$ y por lo tanto: $\nabla^2\psi = 0$.

Vamos a usar ahora la siguiente identidad vectorial

$$\vec{\nabla}.(\chi\vec{\nabla}\psi) = \chi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\chi.\vec{\nabla}\psi$$

Integrando en volumen ambos miembros y usando para el primero el teorema de la divergencia, tenemos que:

$$\int_S \chi\vec{\nabla}\psi.d\vec{S} = \int_V [\chi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\chi.\vec{\nabla}\psi]dV$$

cuando consideramos el caso particular en que $\chi = \psi$

$$\int_V (\vec{\nabla}\psi)^2 dV = \int_S \psi\vec{\nabla}\psi.d\vec{S} = -\int_S \psi\vec{D}.d\vec{S} = 0$$

la última igualdad resulta, como antes, de considerar a todo el espacio como el volumen de integración V, por lo que la superficie borde S se encuentra en el infinito, donde el integrando se anula. En definitiva la última ecuación implica que $\vec{\nabla}\psi = 0$ o $\vec{D} = 0$ o $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$