Delta de Dirac

Brevísima y sesgada introducción para Física 3

Ariel Chernomoretz

October 18, 2017

1 Desde la electrostática

Consideremos una densidad de carga $\rho(\vec{r})$ localizada. Entonces vale que:

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Ahora imaginense que queremos utilizar esta fórmula tambien para el caso en que tengamos una única partícula. Cómo escribimos la 'densidad' de carga asociada a una partícula puntual de carga q ubicada en la posición $\vec{r}_0$? En principio necesitariamos que la función $\rho(\vec{r})$ satisfaga las siguientes propiedades:

$$\rho(\vec{r}) = 0 \qquad \forall \vec{r} \neq \vec{r}_0 \tag{1}$$

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad \text{si} \quad \vec{r}_0 \in V \tag{2}$$

Para escribir una expresión que permita cumplir las dos últimas condiciones emplearemos una *función*, la delta de Dirac $\delta(\vec{x})$, de manera que

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{3}$$

Ahora, $\delta(\vec{x})$ debe ser tal que, cuando el volumen de integración incluya al punto $\vec{r}_0$, valga que

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV = \int_V q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = q \underbrace{\int_V 1\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV}_{1} = q \tag{4}$$

Cuando el dominio de integración incluye un punto en el cual el argumento de la δ se anula (en este caso $\vec{r}_o$), la integral resulta igual al valor de la función que aparece como factor de la δ, evaluada en dicho punto (en este caso dicha función es la funcón constante 1).

Generalizando esto último, vamos a considerarcomo definición, que la *función* δ cumple que

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dV = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{si } \vec{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \tag{5}$$

1.1 Caso 1D

La *función* δ no es formalmente una función, sino que puede ser descripta como una *secuencia de funciones* que tienen un límite definido cuando se las integra. Existen varias maneras de generar estas secuencias, de manera de cumplir con la propiedad explicitada en (5). En todos los casos la representación de la δ involucra una secuencia de funciones que tienden a una forma de ancho infinitesimal, pero de área unidad. Por ejemplo, en 1 dimensión:

- Representación tipo función escalón:

$$\delta_\epsilon(x-a) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & a-\epsilon < x < a+\epsilon \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- Representación tipo Gaussiana:

$$\delta_\epsilon(x-a) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{x}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\epsilon^2}}$$

En ambos casos se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta_\epsilon(x-a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x-a)\delta_\epsilon(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx[f(a)+xf'(a)+...]\delta_\epsilon(x) \end{aligned}$$

donde asumimos que $f(x)$ es una función bien comportada en el sentido que todas las integrales convergen para todo valor de ϵ.

Para ver como se comporta la última integral analicemos, utilizando la representación tipo función escalón de la δ, integrales del tipo:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \delta_\epsilon(x) &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx x^n \frac{1}{2\epsilon} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n+1}\epsilon^n & n = 0, 2, 4, ... \\ 0 & n = 1, 3, 5, ... \end{cases} \underbrace{=}_{\epsilon \to 0} \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}
\end{aligned}$$

De esta manera, todos los términos, salvo el del orden cero, del desarrollo de Taylor se integran a cero en el límite $\epsilon \to 0$ por lo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x-a) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta_\epsilon(x-a) = f(a)$$

Vemos entonces que la representación propuesta de la δ cumple con la propiedad (5).

1.2 El caso 3D

El caso tridimensional resulta

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$