

# Teorema fundamental del cálculo vectorial (a.k.a. Teorema de Helmholtz)

Brevísima y sesgada introducción para Física 3

Ariel Chernomoretz

October 19, 2017

## 1 El teorema de Helmholtz

El siguiente teorema se conoce como el *teorema fundamental del análisis vectorial*.

**Teorema:** Un campo vectorial continuo,  $\vec{A}$ , puede descomponerse como suma de un gradiente y un rotor:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{\omega}(\vec{r}) \quad (1)$$

donde  $\phi$  se denomina *potencial escalar* y  $\vec{\omega}$  *potencial vector*.

**Prueba** Dado el campo de interés,  $\vec{A}$ , para esta demostración vamos a introducir un campo vectorial auxiliar  $\vec{v}(\vec{r})$  definido como:

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Asumiremos además que  $\vec{A} \rightarrow 0$  al menos como  $1/r^2$ , de manera que la integral converja, aún cuando  $V$  sea tomado como todo el espacio.

Comencemos aplicando el operador laplaciano a ambos miembros de la igualdad. Componente a componente, debe valer que

$$\nabla^2 v_i(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V A_i(\vec{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2)$$

1. Concentremonos primero en entender que significa la expresión  $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  que aparece en el integrando. Para ello notemos que el gradiente de  $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  es

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \forall \vec{r} \neq 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{r} &= \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \\ &= 0 \quad \forall \vec{r} \neq 0 \end{aligned}$$

así que el Laplaciano de  $1/r$  es un campo escalar idénticamente nulo en todo punto **salvo** en el origen.

Para ver que ocurre en ese punto en particular notemos que, usando el teorema de Gauss, una integral de volumen de dicha función se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) =_{S(V)} -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} \\ &= -_{S(V)} \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^2} \cdot dS = -_{S(V)} d\Omega \end{aligned}$$

Como vimos en clase, la última integral es la del ángulo sólido subtendido por una superficie cerrada desde el origen. Por lo tanto:

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV = \begin{cases} -4\pi & \text{si } \vec{r} = 0 \in V \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Por lo tanto encontramos que  $\nabla^2 \frac{1}{r}$  es nulo en todo el espacio, excepto el origen, y que su integral sobre cualquier volumen que incluya al origen es igual a  $-4\pi$ . Estas son justamente las propiedades de la Delta de Dirac:  $\delta(\vec{r})$ , que describimos con un poco más en detalle en la Sección (??):

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$$

El caso general se obtiene reemplazando  $r = |\vec{r}|$  por  $s = |\vec{r} - \vec{r}_0|$  en cuyo caso

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Esta última expresión es la que estábamos buscando.

2. Con lo que aprendimos, podemos volver ahora a la ecuación (2)

$$\begin{aligned} \nabla^2 v_i(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V A_i(\vec{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V A_i(\vec{r}') (-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')) dV' = A_i(\vec{r}) \end{aligned}$$

donde la última igual se desprende de cómo actúa la  $\delta$  dentro de la integral (ver eq (??)).

Para poder seguir adelante haremos uso de la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

que, junto con el resultado obtenido arriba para la forma funcional que asumimos para  $\vec{v}$  permite escribir:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\omega}$$

con

$$\phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad \vec{\omega} = -\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

**Corolario:** La divergencia y rotor de un campo vectorial lo definen unívocamente.

1. **Prueba de que rotor y divergencia definen un campo.** Tenemos que

$$\begin{aligned} \phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V A_i(\vec{r}') \partial'_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \end{aligned}$$

La última integral se resuelve integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\int_V A_i(\vec{r}') \partial'_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV &= \int_V \partial'_i \frac{A_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV - \int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \partial'_i A_i(\vec{r}') dV \\
&= \int_S \frac{\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{S} - \int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \partial'_i A_i(\vec{r}') dV
\end{aligned}$$

y como la integral de superficie se anula al considerar  $V$  como todo el espacio (recordar que  $\vec{A} \rightarrow 0$  al menos como  $1/r^2$ ) resulta:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{d(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3)$$

por lo que el potencial escalar,  $\phi$ , queda definido al conocer la divergencia de  $\vec{A}(\vec{r})$ ,  $d(\vec{r})$ .

Así mismo

$$\begin{aligned}
\omega_i(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \times \vec{\omega} &= -\epsilon_{ijk} \partial_j \omega_k \\
&= -\epsilon_{ijk} \partial_j \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{A_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
&= \epsilon_{ijk} \frac{1}{4\pi} \int_V A_k(\vec{r}') \partial'_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'
\end{aligned}$$

nuevamente, integrando por partes y reconociendo que la integral de superficie se anula obtenemos que:

$$\vec{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{c}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (4)$$

con  $\phi$  y  $\vec{\omega}$  definidos, queda definido nuestro campo de interés  $\vec{A}$ .

## 2. Prueba de que el campo definido es único.

Supongamos que hay dos campos,  $\vec{A}_1$  y  $\vec{A}_2$  para los cuales:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_2 = d(\vec{r})$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{A}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_2 = \vec{c}(\vec{r})$ .

Definamos un nuevo campo  $\vec{D}(\vec{r}) = \vec{A}_1 - \vec{A}_2$ . Este nuevo campo satisface que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$ . Por esta última igualdad sabemos que  $\vec{D}$  es un campo conservativo, por lo que  $\vec{D} = -\vec{\nabla}\psi$  y por lo tanto:  $\nabla^2\psi = 0$ .

Vamos a usar ahora la siguiente identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot (\chi \vec{\nabla} \psi) = \chi \nabla^2 \psi + \vec{\nabla} \chi \cdot \vec{\nabla} \psi$$

Integrando en volumen ambos miembros y usando para el primero el teorema de la divergencia, tenemos que:

$$\int_S \chi \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{S} = \int_V [\chi \nabla^2 \psi + \vec{\nabla} \chi \cdot \vec{\nabla} \psi] dV$$

cuando consideramos el caso particular en que  $\chi = \psi$

$$\int_V (\vec{\nabla} \psi)^2 dV = \int_S \psi \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{S} = - \int_S \psi \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

la última igualdad resulta, como antes, de considerar a todo el espacio como el volumen de integración  $V$ , por lo que la superficie borde  $S$  se encuentra en el infinito, donde el integrando se anula. En definitiva la última ecuación implica que  $\vec{\nabla} \psi = 0$  o  $\vec{D} = 0$  o  $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$

## 2 Aplicación a campos E y B estáticos

### 2.1 Electroestática

Las ecuaciones de Maxwell para el campo electrostático definen la forma funcional de la divergencia y el rotor de  $\vec{E}$  para todo punto como:

$$d_E(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{c}_E \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Utilizando estas expresiones en las ecuaciones 3 y 4 que definen el potencial escalar y vector respectivamente para el campo  $\vec{E}$  resulta:

$$\phi_E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (5)$$

$$\vec{\omega}_E(\vec{r}) = 0 \quad (6)$$

por lo que utilizando el teorema fundamental (ec. 1):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{\nabla} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (7)$$

## 2.2 Magnetostática

De la misma manera las ecuaciones de Maxwell determinan que para el campo magnético vale:

$$d_B \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{c}_B(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Utilizando estas expresiones en las ecuaciones 3 y 4 que definen el potencial escalar y vector respectivamente para el campo  $\vec{B}$  resulta:

$$\phi_B(\vec{r}) = 0 \tag{8}$$

$$\vec{\omega}_B(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{9}$$

por lo que utilizando el teorema fundamental (ec. 1) tenemos para  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{10}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \tag{11}$$