

# FISICA 3 (y algo mas). Ley de Maxwell y propagación de la luz en el vacío y en medios materiales

Curso verano de 2014

J. Miraglia

(Dated: March 31, 2014)

Abstract

**LEY DE MAXWELL.** Corriente de desplazamiento. Ecuaciones de Maxwell. Ecuaciones de Poisson y Laplace generalizadas. Gauge de Coulomb generalizado.

## **PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS**

Propagación en el vacío. Energía de la radiación. Vector de Poynting. Presión de la radiación. Propagación en medios materiales. Aisladores, malos y buenos conductores. Índice de refracción complejo. Conductores reales: modelo de Drude para  $\sigma(\omega)$ . Medio con osciladores: modelo de Lorentz para  $\varepsilon(\omega)$ . Modo longitudinal.

(**Falta:** incluir figuras y tablas, corregir. Tal vez, incluir  $\mu$  y  $\mu(\omega)$  )

**Incluye:** manipulaciones algebraicas. Pude dar todo )

PACS numbers:

## I. LEY DE MAXWELL (1831-1879)

Hasta el presente tenemos las 3 leyes fundamentales, Coulomb, Biot-Savart y Faraday, y encontramos que los campos satisfacen (en el vacío):

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \end{array} \quad (1)$$

y los potenciales  $V$  y  $\vec{A}$  se definen así:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \text{con } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{gauge de Coulomb}), \quad (3)$$

y están relacionados a las fuentes  $\rho$  y  $\vec{J}$ ,

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0, \quad (4)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}, \quad (5)$$

A todas estas ecuaciones habría que sumarle la ecuación de continuidad (conservación de la carga):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (6)$$

Reemplazando  $\rho(\vec{r})$  en términos de la divergencia del campo eléctrico, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J}_D + \vec{J} \right) = 0, \quad (7)$$

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{corriente de desplazamiento} \quad (8)$$

Si una variación del campo magnético produce un campo eléctrico (Faraday), es atractivo conjeturar que una variación del campo eléctrico produzca un campo magnético. La genialidad de Maxwell consiste en imponer  $\vec{J} \rightarrow \vec{J}_D + \vec{J}$ , con lo que produce:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \vec{J}_D \right) = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{ecuación de Maxwell}, \quad (9)$$

donde hemos usado que la velocidad de la luz es  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ . Las 4 ecuaciones de Maxwell quedan entonces:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho(\vec{r})/\epsilon_0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}, \end{aligned}} \quad (10)$$

A pesar que esta ley fue introducida en forma teórica es confirmada por la experiencia. Esta nueva ley generalizará la definición del gauge de Coulomb.

### A. Ecuaciones de Poisson y Laplace generalizadas

Veamos como dependen los potenciales de las fuentes. Reemplazando (2) y (3) en las ecuaciones de Maxwell (10):

$$\vec{\nabla} \cdot \overbrace{\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}\right)}^{\vec{E}} = \rho/\epsilon_0, \quad (11)$$

$$\vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)}_{\vec{B}} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}\right)}_{\vec{E}}. \quad (12)$$

Usando la expansión de  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$  (ver Apéndice), se encuentra que

$$-\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (13)$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \quad (14)$$

En el caso estacionario habiamos usado el gauge de Coulomb:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ; aqui lo generalizamos a

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} V = 0, \quad \text{gauge de Coulomb generalizado}, \quad (15)$$

que obviamente se reduce a  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  en el caso estacionario. Esta definición hace que se cancele el segundo término de la RHS con el segundo de la LHS de la ecuación (14). Luego queda:

$$-\nabla^2 V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = \rho / \epsilon_0 , \quad (16)$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = \mu_0 \vec{J} . \quad (17)$$

Podemos llevarlo a su forma mas elegante haciendo uso de 4 dimensiones. Llamando  $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$ ,  $z \equiv x_3$  y  $ict \equiv x_4$ , entonces:

$$-\square^2 V = \rho / \epsilon_0 , \quad (18)$$

$$-\square^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} , \quad (19)$$

donde hemos generalizado el Laplaciano al Dalambertiano  $\square^2 = \Sigma_i \partial^2 / \partial x_i^2$  [Es mas conveniente introducir la variable  $-ct \equiv x_0$  y  $\Sigma_{i=1}^4 \rightarrow \Sigma_{i=0}^3$ ]. Usando el hecho de que dimensionalmente vale:

$$[\rho c] = \frac{C \times m}{m^3 \times seg} = \frac{C}{m^2 \times seg} = \frac{Ampere}{m^2} = [J] , \quad y \quad (20)$$

$$[V/c] = \frac{Vol \times seg}{m} = [A] , \quad (21)$$

se puede compactar mas generalizando  $\vec{A}$  a 4 dimensiones,

$$-\square^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0 \mu_0} \rho = \mu_0 c^2 \rho \quad (22)$$

$$-\square^2 \frac{V}{c} = \mu_0 (c\rho) \quad (23)$$

y podemos compactar (23) y (19) llamando:

$$A_x = \mathcal{A}_1, \quad A_y = \mathcal{A}_2, \quad A_z = \mathcal{A}_3, \quad \frac{V}{c} = \mathcal{A}_4 , \quad y \quad (24)$$

$$J_x = \mathcal{J}_1, \quad J_y = \mathcal{J}_2, \quad J_z = \mathcal{J}_3, \quad c\rho = \mathcal{J}_4 , \quad (25)$$

con lo que podemos resumirlas en una sola expresion:

$$-\square^2 \vec{\mathcal{A}} = \mu_0 \vec{\mathcal{J}} . \quad \text{ecuación de Poisson generalizada} \quad (26)$$

En el subespacio en que no hay ni cargas ni corrientes, la ecuación se reduce a la de Laplace:

$$-\vec{\square}^2 \vec{\mathcal{A}} = 0, \quad \text{ecuación de Laplace generalizada} \quad (27)$$

que debe ser resuelta conociendo las condiciones asintóticas de Dirichlet o Neuman. Cuando se usa el sistema gaussiano es conveniente remover  $\mu_0$ , así:

$$-\vec{\square}^2 \vec{\mathcal{A}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \mu_0 \vec{\mathcal{J}} = \frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \vec{\mathcal{J}} \quad (28)$$

$$-\vec{\square}^2 c^2 \vec{\mathcal{A}} = \frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0} \vec{\mathcal{J}} \Big|_{4\pi\epsilon_0=1} = 4\pi \vec{\mathcal{J}} \quad (29)$$

Las expresiones se simplifican mas aun si se usan unidades electromagnéticas:  $\hbar = e = c = 1$  (no confundir con las unidades atómicas:  $\hbar = e = m = 1$ ), con lo que la ecuación luce mas simplificada  $-\vec{\square}^2 \vec{\mathcal{A}} = 4\pi \vec{\mathcal{J}}$  con  $\mathcal{J}_4 \equiv \rho$  y  $\mathcal{A}_4 \equiv V$ .

## B. Corriente de Desplazamiento

La ecuación de Maxwell nos permite retener la noción de que la corriente es continua. Veamos nuevamente la carga del capacitor de placas paralelas. Fluye al capacitor una determinada corriente  $i(t)$ . Al llegar a la placa positiva deposita una cantidad de carga positiva  $dQ = +i dt$ . En la otra placa se carga con  $dQ = -i dt$  y sigue el flujo de corriente. En principio la corriente se interrumpe dentro del capacitor. Con la ecuación de Maxwell esto tiene otra lectura. Pensemos en una dimension dentro del modelo mas sencillo. Dentro del capacitor se crea un campo  $E(t)$ , según la ecuación de Maxwell tenemos una corriente de Desplazamiento:

$$J_D = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E(t) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{1}{S} = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} = \frac{i}{S}. \quad (30)$$

La corriente que circula dentro del capacitor debido a  $J_D$  es:

$$i_d = \iint J_D ds = \iint \left( \frac{i}{S} \right) ds = \frac{i}{S} S = i. \quad (31)$$

En definitiva la corriente no se interrumpe, sino que se cierra dentro del capacitor via  $J_D$ . Este era el interés original de Maxwell.

## II. PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICA

### A. Propagación en el vacío

Supongamos que ocurriera una cierta perturbación electromagnética, tal como una variación de  $\rho_0(t)$  ó  $\vec{J}_0(t)$ , o un decaimiento electrónico, etc, distante, y nos concentramos en un subespacio lejano (digamos un caja cubica), lejos de la fuente. En ese lugar vale la ecuación de Laplace  $\nabla^2 \vec{A} = 0$  es:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] A_{x,y,z} = 0, \quad (32)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] V = 0. \quad (33)$$

Supongamos que la condición asintótica imponga que  $A_y = A_z = 0$ , y que  $A_x = A_x(z, t)$  o sea una propagación en la dirección  $z$  del tipo ondulatorio,

$$\vec{A}(z, t) = \hat{e}_x A_x(z, t) = \hat{e}_x A_N \sin(kz - \omega t), \quad (34)$$

y  $V = 0$  (o una constante), ya que el gauge de Coulomb requiere que:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} V = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\partial}{\partial x} A_x(z, t) = 0. \quad (35)$$

Reemplazando (34) en (32) resulta que:

$$\omega = kc, \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{velocidad de la luz en el vacío} \quad (36)$$

El argumento del seno se reescribe como  $(kz - \omega t) = k(z - ct)$ , lo cual nos indica que la onda se propaga con  $z = ct$ : con la velocidad de la luz  $c$ , tal cual lo habíamos adelantado.

Una vez que tenemos  $\vec{A}$  podemos calcular  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ ,

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = +\hat{e}_x A_N c k \cos(kz - \omega t), \quad (37)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A(z, t) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$= +\hat{e}_y A_N k \cos(kz - \omega t). \quad (39)$$

Obviamente  $E = cB$ ,  $\vec{E}$  es perpendicular a  $\vec{B}$  y ambos están en fase. En la óptica la dirección de  $\vec{E}$  corresponde al versor de polarización de la luz. Esta onda describe la luz, ya sea: rayos infrarrojos, visible, ultravioletas, rayos x, rayos  $\gamma$ , etc.

## B. Potenciales retardados

## C. Energía de la radiación

En nuestra caja la energía  $U$  por unidad de volumen del campo eléctrico y magnético está dado por las ecuaciones ya vistas,

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E}{c}\right)^2, \quad (40)$$

$$= \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 A_N^2 c^2 k^2 \cos^2(kz - \omega t). \quad (41)$$

Promediando en el tiempo, como siempre,

$$\langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kz - \omega t) dt = \frac{1}{2}, \quad (42)$$

con lo que

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 A_N^2 \omega^2 = \rho(\omega). = \text{densidad de energía} \quad (43)$$

Aquí, el coeficiente  $A_N^2$  puede determinarse conociendo cuántos corpusculos (fotones) hay en el volumen  $V$  y cual es la energía de cada uno de ellos. Digamos que hay  $N$  fotones con energía  $\epsilon_{ph}$  cada uno, luego:

$$\rho(\omega) = \frac{N\epsilon_{ph}}{V} = \frac{U}{V} = \epsilon_0 \frac{1}{2} A_N^2 \omega^2 \quad (44)$$

$$A_N = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 \omega^2} \rho(\omega)} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 \omega^2} \frac{N\epsilon_{ph}}{V}} \quad (45)$$

La mecánica cuántica nos dirá que  $\epsilon_{ph} = \hbar\omega = h\nu$ , pero eso es después de 1905.

#### D. Vector de Poynting

Definamos:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{vector de Poynting} \quad (46)$$

Veamos primero las unidades:

$$[S] = \frac{\text{Ampere}}{\text{tesla} \times \text{m}} \times \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} \times \text{tesla} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^2 \times \text{seg}}, \quad (47)$$

que tienen un sentido bien claro: el flujo de energía por unidad de tiempo sobre la unidad de superficie. Reemplazando  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , resulta:

$$\vec{S} = \hat{k} \frac{1}{\mu_0} E \frac{E}{c} = \hat{k} \frac{1}{\mu_0 c} \overbrace{A_N^2 c^2 k^2 \cos^2(kz - \omega t)}^{E^2}, \quad (48)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \hat{k} \frac{1}{\mu_0 c} A_N^2 c^2 k^2 \frac{1}{2} = \hat{k} c \rho(\omega) = \hat{k} c \frac{N \epsilon_{ph}}{V} \quad (49)$$

y  $\hat{k} = \hat{E} \times \hat{B} = \vec{k}/k$ , denota la dirección de propagación de la luz.

Las fuentes reales en general no producen una radiación en particular sino una cierta banda, con polarizaciones al azar, y con ángulos iniciales también al azar. Para tener una idea, el sol es la fuente de radiación más importante de la naturaleza. El vector de Poynting para el sol en la Tierra (teniendo en cuenta todas las frecuencias !)

$$S = 1.395 \frac{\text{kiloJoule}}{\text{metro}^2 \times \text{segundo}} = 1.395 \frac{\text{kiloWatt}}{\text{metro}^2} \quad (50)$$

o sea del orden del consumo de una casa (a la superficie de la tierra llega  $\sim 1 \text{ kW/m}^2$ ). Se encuentra también que, lejos de la fuentes,

$$\iint_{\text{OS}} \vec{S} \cdot d\vec{a} = \text{Potencia [Watts]} \quad (51)$$

por lo que podemos determinar  $A_N$  sin especular sobre la existencia de fotones: solo conociendo la potencia de la fuente. Y esa es la forma tradicional pre-1905. Para tener una equivalencia: si nos llegase del sol solamente luz amarilla (no es así) la energía de cada fotón sería (según Einstein:  $\epsilon_{ph} = h\nu$ ) :

$$\epsilon_{ph} = h\nu = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Joule} \times \text{seg} \times 0.5 \times 10^{15} 1/\text{seg} = 3.3 \times 10^{-19} \text{ Joule} \quad (52)$$

con lo cual nos llegaría del sol  $10^3/10^{-19} \sim 10^{22}$  fotones /seg/m<sup>2</sup>.

### E. Presión de la radiación

Definamos  $\vec{P} = \vec{S}/c$ , las unidades son:

$$[P] = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^2 \times \text{seg}} \times \frac{\text{seg}}{\text{m}} = \frac{\text{Newton}}{\text{m}^2} = [\text{presion}], \quad (53)$$

$$= \frac{\text{kg} \times \text{m}/\text{seg}}{\text{m}^2 \times \text{seg}} = [\text{mom. lineal}/(\text{seg} \times \text{m}^2)]. \quad (54)$$

Para tener una idea la presión del sol a la altura de la Tierra es  $5 \times 10^{-6} \text{ Nw/m}^2$ , y toda la tierra recibe una fuerza de  $10^8 \text{ Newtons}$  (la gravitatoria es  $10^{22}$ ) (veleros fotónicos son posibles para distancias mas alejadas que plutón).

## III. PROPAGACIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA EN MEDIOS MATERIALES

Nos preguntamos aqui como viaja la luz en un medio. Desarrollaremos el modelo de Lorentz que fue la visión mas o menos dominante hasta fines del siglo XIX, antes de la aparición de la mecánica cuántica. Las interacciones atómicas eran interpretadas por resortes y el movimiento de los electrones libres representados con el modelo de Drude.

Dentro de la longitud de onda de la radiación caben muchisimos átomos (excepto para los rayos X o mas duros), por lo cual una interpretación macroscópica es aceptable. Para tener una idea: la luz amarilla tiene una longitud de onda de 590 nanómetros y cubre alrededor de  $10^3$  átomos.

Hay que tener cuidado en cuanto a la interpretación de una onda electromagnética viajando dentro de un medio. La luz en el medio no es realmente una onda electromagnética pura, sino una mezcla de ondas y movimientos (excitaciones) electrónicos, ensamblados unos con otros (Dexter). Esta mezcla se desplaza dentro del material y si sale la radiación electromagnética tal como entró, decimos que la luz no fue absorbida, si ocurre lo contrario se lo atribuimos a un proceso de absorción.

Supongamos que el medio esta formado por dipolos eléctricos y magnéticos de modo tal que se polarise y magnetise. Por ejemplo los electrones en presencia del campo eléctrico  $\vec{E}(t)$  sufrirán una fuerza  $\vec{F}(t) = q_e \vec{E}(t)$ , y los electrones se desplazarán respecto al centro de carga produciendo una polarización  $\vec{P}(t)$  instantánea que contribuirá a crear un campo eléctrico inducido, modificará el campo total, y por lo tanto el desplazamiento de la onda electromagnética. Si además el medio tiene electrones libres, en presencia de  $\vec{E}$  generarán una densidad de corriente  $\vec{j}$  de acuerdo a la ley de Ohm microscopica, que contribuirá al campo magnético y así también al desarrollo de la onda electromagnética. Es todo un ensamble.

Supongamos medios LIH caracterizados con los parámetros  $\mu$ ,  $\epsilon$  y  $\sigma$  tal que podamos escribir:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \text{y} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (55)$$

Recordemos que  $\mu$ ,  $\epsilon$  y  $\sigma$  son constantes (por ahora), no dependen de la frecuencia de los campos. Las ecuaciones de Maxwell lejos de las fuentes externas ( $\rho_0$  y  $\vec{J}_0$ ) serán:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (56)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{H}}{\mu} \right) \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0, \quad (57)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H} \implies \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}, \quad (58)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \underbrace{-\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}}_{\vec{j}_D} + \underbrace{\sigma \vec{E}}_{\text{Ohm}} = \left( -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \vec{E}, \quad (59)$$

Por simplicidad trabajaremos con  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  y usaremos fasores. Proponemos la solución ondulatoria,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \Big|_{\text{real}} = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}, t)], \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t), \quad (60)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) \Big|_{\text{real}} = \text{Re}[\vec{H}(\vec{r}, t)], \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t). \quad (61)$$

Comparandolo con (37) resulta que  $E_0 = A_N c k$ . Antes de continuar es conveniente recordar dos propiedades que usaremos

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{j} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) = i (\vec{k} \cdot \hat{j}) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (62)$$

$$\vec{\nabla} \times \hat{j} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) = i (\vec{k} \times \hat{j}) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (63)$$

Y además tengamos en cuenta la posibilidad de tener  $k$  con valor complejo, o sea  $\vec{k} = (k_r + ik_i)\hat{k}$ , tal que  $\vec{k} \cdot \vec{k} = (k_r + ik_i)^2 = \text{complejo}$  y  $\vec{k}^* \cdot \vec{k} = (k_r^2 + k_i^2) = \text{real}$ .

De (56) y (57) obtenemos:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \text{y} \quad \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \quad (64)$$

Con lo cual nos conformarán la base:

$$\hat{E}_0 \times \hat{H}_0 = \hat{k} \quad (65)$$

De (58) obtenemos:

$$i (\vec{k} \times \vec{E}_0) = +i\mu\omega\vec{H}_0 \quad (66)$$

Los vectores ratifican (65) y en modulo producen;

$$kE_0 = +\mu\omega H_0 \quad (67)$$

De (59) obtenemos:

$$i (\vec{k} \times \vec{H}_0) = -i (\vec{H}_0 \times \vec{k}) = (-i\varepsilon\omega + \sigma) \vec{E}_0 = -i(\varepsilon\omega + i\sigma) \vec{E}_0 \quad (68)$$

Los vectores ratifican nuevamente (65) y producen:

$$kH_0 = (\varepsilon\omega + i\sigma) E_0 \quad (69)$$

De (67) y (69), tenemos:

$$\boxed{k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\sigma\mu\omega} \quad (70)$$

Que sera la ecuación basica a seguir. [Ya que hay tantas variables en juego es interesante chequear la identidad dimensional de (70)]. Se desprende de esta ecuación que el número de onda  $k$  es complejo, escribiendo  $k = k_r + ik_i$  obtenemos luego de simple algebra:

$$k_r = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{\sqrt{1 + \sigma^2/(\varepsilon\omega)^2} + 1}{2}}, \quad (71)$$

$$k_i = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{\sqrt{1 + \sigma^2/(\varepsilon\omega)^2} - 1}{2}} \quad (72)$$

Veamos 3 casos: aisladores ( $\sigma = 0$ ), malos conductores ( $\sigma \rightarrow 0$ ) y buenos conductores ( $\sigma \rightarrow \infty$ ).

**Aisladores** ( $\sigma = 0$ ). El material no tiene electrones libres,  $\sigma = 0$ ,  $k_i = 0$ , por lo que  $k$  es real, y:

$$k_r = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v}, \quad \text{con } v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad (73)$$

luego tenemos la solución standard:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[ik_r(\hat{k} \cdot \vec{r} - ivt)], \quad (74)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp[ik_r(\hat{k} \cdot \vec{r} - ivt)] \quad (75)$$

Por ultimo veamos los modulos. De (67):

$$H_0 = \frac{k}{\mu\omega} E_0 = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\mu\omega} E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0, \quad \text{o mejor} \quad (76)$$

$$B_0 = \mu H_0 = \sqrt{\mu\varepsilon} E_0 = \frac{1}{v} E_0 \quad (77)$$

Se concluye que:

i) La onda no se amortigua, o sea no decrece su intensidad  $|\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 = cte.$  (cuerpos transparentes o casi, digamos el cristal de NaCl).

ii) Viaja con velocidad  $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ .

iii) El campo eléctrico esta en fase con el magnético:  $H_0/E_0 = \sqrt{\varepsilon/\mu} = \text{real}.$

4i) Los módulos se relacionan asi:  $E_0 = vB_0$ , y  $|E_0|^2 = v^2 |B_0|^2.$

**Malos conductores** ( $\sigma \rightarrow 0$ ). Tomando el limite

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} k_r = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1+1}{2}} + \mathcal{O}(\sigma^2) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k_{r0} = \frac{\omega}{v} \quad (78)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} k_i = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\sigma^2/(\varepsilon\omega)^2 - 1}{2}} = \frac{\sigma\omega}{2\varepsilon\omega}\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = k_{i0} \quad (79)$$

Con lo cual  $k_r$  es independiente de  $\sigma$  y  $\omega$ , mientras que  $k_i$  crece con  $\sigma$ . Veamos los campos:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(k_r + ik_i)\hat{k} \cdot \vec{r} - i\omega t], \quad (80)$$

$$= \vec{E}_0 \exp[-k_i\hat{k} \cdot \vec{r}] \exp[ik_r(\hat{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)], \quad (81)$$

Específicamente si tomamos  $\hat{E}_0 = \hat{e}_x$ ,  $\hat{H}_0 = \hat{e}_y$ , y  $\hat{k} = \hat{e}_z$ , entonces:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \underbrace{\vec{E}_0 \exp[-k_i z]}_{\text{amortiguamiento}} \exp[ik_r(z - vt)], \quad (82)$$

y el campo eléctrico  $\vec{E}$  se debilita con  $z$ . Notese que  $k_{i0}$  no depende de  $\omega$ . Finalmente podemos escribir:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}z\right) \exp[ik_r(z - vt)]. \quad (83)$$

Resulta interesante ver la intensidad magnética. Partiendo de (67):

$$H_0 = \frac{1}{\mu\omega}kE_0 = \frac{k_r + ik_i}{\mu\omega}E_0 = e^{i\varphi_k} \frac{|k|}{\mu\omega}E_0 \quad (\text{no están en fase!}), \quad (84)$$

$$\varphi_k = \tan^{-1}\left[\frac{k_i}{k_r}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon\omega}\right] = \mathcal{O}(\sigma), \quad (85)$$

$$\frac{H_0}{E_0} = e^{i\varphi_k} \frac{|k|}{\mu\omega} = e^{i\varphi_k} \frac{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon + \frac{\sigma^2\mu}{4\varepsilon}}}{\mu\omega} = e^{i\varphi_k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + \mathcal{O}(\sigma^2), \quad \text{o mejor} \quad (86)$$

$$B_0 = \mu H_0 = \sqrt{\mu\varepsilon} e^{i\varphi_k} E_0 = \frac{1}{v} e^{i\varphi_k} E_0, \quad (87)$$

Se concluye que:

i) La onda se amortigua, decrece su intensidad  $|\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \propto \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}z)$  (cuerpos opacos, pero el amortiguamiento no depende, en este modelo, de  $\omega$ ).

ii) Viaja con velocidad  $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ .

iii) El campo eléctrico NO esta en fase con el magnético: difieren en  $\varphi_k$ ,

4i) Los modulos se relacionan  $E_0 = v e^{i\varphi_k} B_0$ , pero igualmente  $|E_0|^2 = v^2 |B_0|^2$ :

**Buenos conductores** ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). Tomando el limite

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} k_r = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} = \sigma \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon}} = k_\infty \rightarrow \infty, \quad (88)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} k_i = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} = \sigma \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon}} = k_\infty \rightarrow \infty. \quad (89)$$

Con lo cual  $k_r = k_i$ , y se puede resumir en una sola forma:

$$k = k_r + ik_i = \sigma \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sigma \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{i}. \quad (90)$$

Notese que ni  $k_r$  ni  $k_i$  depende de  $\omega$ . Valen las mismas conclusiones anteriores, excepto que cambia la velocidad por una forma mas complicada. La ondas se amortiguan fuertemente y esta es la razón por la cual los conductores no son transparentes. Además como  $k_r = k_i$ ,  $\varphi_k = \pi/4$ : los campos tienen un desfase de 45 grados.

#### IV. FIN FÍSICA 3 =====

##### A. Índice de refracción complejo

Agunos libros hacen referencia al índice de refracción complejo. Esto resulta de reinterpretar (70) asi:

$$\mu \varepsilon = \frac{k^2 - i\sigma \mu \omega}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}, \quad (91)$$

$$\frac{c^2}{v^2} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - i\sigma \frac{\mu c^2}{\omega} = n^2, \quad (92)$$

siendo  $n$  el índice de refracción del medio en cuestión. La parte imaginaria surge debido a la presencia de electrones libres. Si  $\sigma = 0 \Rightarrow n = ck/\omega = \text{real}$ . Si estamos en presencia de un material tal que  $\mu \cong \mu_0$ , y utilizando el sistema gaussiano, produce:

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \frac{i\sigma \overbrace{\varepsilon_0 \mu_0 c^2}^1}{\omega \varepsilon_0} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \Bigg|_{4\pi \varepsilon_0 = 1} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - i\sigma \frac{4\pi}{\omega}, \quad (93)$$

que es una forma muy usada en el formalismo dieléctrico. Otra forma, encontrada en la literatura, es definir una respuesta dieléctrica compleja  $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$  ( por razones historicas se llaman a la parte real e imaginaria,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ ) A partir de (70):

$$k^2 = \mu\omega^2 \left( \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right) = \mu\omega^2(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) , \quad (94)$$

$$\varepsilon_1 = \text{Re}[\varepsilon] = \varepsilon , \quad y \quad \varepsilon_2 = \text{Im}[\varepsilon] = \sigma/\omega , \quad (95)$$

y así lo vamos a encontrar mas adelante.

### B. Conductores reales. Modelo de Drude para $\sigma(\omega)$ .

Ya lo vimos en circuitos para el caso estacionario. Repasemos: se supuso un electrón de carga  $-e$  que se mueve en un medio Ohmico (conductor real) en presencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$ . El electrón choca con los otros electrones e iones del material y recibe una fuerza de rozamiento  $\vec{F}_r = -\alpha \vec{v}$  [igual que la ley de Stokes]. La ley de Newton nos dice que:

$$\sum \vec{F} = -e\vec{E} - \alpha \vec{v} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} , \quad (96)$$

y  $\alpha = m_e/\tau$  es el rozamiento. En el estado estacionario  $d\vec{v}/dt = 0$ , entonces  $\vec{v} = -e\tau \vec{E}/m_e$ . Si tenemos  $n_e$  =densidad de electrones, entonces podemos definir la densidad de corriente:

$$\vec{J} = -en_e \vec{v} = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e} \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad \text{ley de Ohm microscópica} \quad (97)$$

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e} = \quad \text{conductibilidad estacionaria} \quad (98)$$

Esto vale para un modelo estacionario, no para el caso en el cual el campo eléctrico varie fuertemente con el tiempo. La ley de Newton con un campo  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  es

$$\sum \vec{F} = -e \underbrace{\vec{E}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)}_{\vec{E}(\vec{r}, t)} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} . \quad (99)$$

Proponiendo:  $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$ , la solución es:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{-e\tau \vec{E}(\vec{r}, t)}{m_e(1 - i\omega\tau)}, \quad (100)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -en_e \vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e(1 - i\omega\tau)} \vec{E}(\vec{r}, t) = \sigma(\omega) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (101)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e(1 - i\omega\tau)} = \frac{\sigma(\omega = 0)}{1 - i\omega\tau}, \quad (102)$$

y  $\sigma(\omega = 0)$  es la conductibilidad estacionaria definida anteriormente. Para  $\omega\tau \ll 1$ ,  $\sigma$  es real y vale la aproximación estacionaria, pero para  $\omega\tau > 1$  la conductividad es compleja y depende fuertemente de la frecuencia. Pensemos en un conductor: Cu, donde  $\tau \sim 10^{-13}$ , implica que  $\sigma$  es complejo para frecuencias mayores a  $1/\tau > 10^{13}$  (desde el infrarojo-visible)

### C. Medio de osciladores. Modelo de Lorentz para $\varepsilon(\omega)$ .

Tambien lo vimos para el caso estacionario. Repasemos: consideremos un oscilador que posee un electrón activo de masa  $m_e$  y carga  $-e$  vibrando alrededor de la posición de equilibrio provocado por el campo eléctrico  $\vec{E} = cte$ . El desplazamiento respecto a la posición de equilibrio  $\vec{u}$  esta determinado por la ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m_e \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = -(m_e \omega_0^2) \vec{u} - e \vec{E}, \quad (103)$$

donde  $m_e \omega_0^2$  es la constante del resorte [la situación es igual a la de un resorte bajo el efecto de la gravedad]. El valor medio del desplazamiento es:

$$\langle \vec{u} \rangle = \left\langle -\frac{e \vec{E}}{m_e \omega_0^2} + u_0 \cos(\omega_0 t) \right\rangle = -\frac{e \vec{E}}{m_e \omega_0^2} \quad (104)$$

La polarización del oscilador es simplemente:  $\vec{p} = -e \langle \vec{u} \rangle$ . Si tenemos una determinada densidad de osciladores por unidad de volumen  $n_a$ , el vector polarización es:

$$\vec{P} = n_a \vec{p} = \frac{n_a e^2 \vec{E}}{m_e \omega_0^2} = \chi_e \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} \quad (105)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{n_a e^2}{m_e \omega_0^2} = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) = \varepsilon_0 K_e, \quad \text{donde} \quad (106)$$

$$\omega_p^2 = \frac{n_a e^2}{m_e \varepsilon_0} \quad \text{frecuencia de plasmon} \quad (107)$$

y este es el caso estático.

Consideremos ahora al electrón vibrando alrededor de una posición de equilibrio provocado por el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . El desplazamiento respecto a la posición de equilibrio  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  esta determinado por la ley de Newton

$$\sum \vec{F} = m_e \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = -(m_e \omega_0^2) \vec{u} - \alpha \frac{d\vec{u}}{dt} - e \vec{E} , \quad (108)$$

y  $\alpha = m_e/\tau$  es nuevamente el rozamiento. Esta ecuación es exactamente igual al oscilador forzado de la mecánica básica; y se resuelve igual. Podemos trabajar directamente en el campo complejo. Proponemos

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0 \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t) , \quad (109)$$

reemplazando en (108), encontramos que

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = -\frac{e}{m_e \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \vec{E}(\vec{r}, t) . \quad (110)$$

Siguiendo los pasos anteriores llegamos a

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 K_e(\omega) = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \right] , \quad (111)$$

La primera observación es que se obtiene una "constante" dielectrica que no es precisamente una constante, sino que depende de  $\omega$ . Obviamente resulta que  $\varepsilon(\omega = 0)$  es la permitividad estática que vimos anteriormente. Además ocurre que es fuertemente imaginaria alrededor de  $\omega \sim \omega_0$  (resonancia) que representa una absorción (excitación). Separando en parte real e imaginaria:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega) , \quad (112)$$

$$\frac{\varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} , \quad (113)$$

$$\omega \neq \omega_0$$

$$\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_0} = \omega_p^2 \frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \pi \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \delta(\omega_0 - \omega) , \quad (114)$$

En nuestro modelo de osciladores (atómicos) no consideramos electrones libres ( $\sigma = 0$ ), la ecuación (70), queda:

$$k^2 = \mu\varepsilon(\omega)\omega^2 = \mu\varepsilon_1(\omega)\omega^2 + i\mu\varepsilon_2(\omega)\omega^2, \quad (115)$$

y todo resulta igual a (70) ; con  $\varepsilon'$  y  $\sigma'$  tal que:

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon_1(\omega) \quad y \quad (116)$$

$$\sigma' \equiv \varepsilon_2(\omega)\omega = \varepsilon_0\pi\frac{\omega_p^2}{2\omega_0}\delta(\omega_0 - \omega)\omega = \frac{n_a\pi e^2}{2m_e}\delta(\omega_0 - \omega) \quad (117)$$

O sea que, a pesar de no tener electrones libres, la parte imaginaria provee un término equivalente  $\sigma'$ . La onda se va a desplazar con  $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon_1}$ , y cuando  $\omega \sim \omega_0$ ,  $\sigma$  sera muy importante y por lo tanto habra una fuerte absorción del medio. Esto se se explica porque los resortes (átomos) absorben la energía, y queda marcado en los espectros de absorción.

En la bibliografía se relaciona a la conductibilidad con la parte imaginaria de la respuesta dieléctrica a partir de (115) asi:

$$\sigma \equiv \omega\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega^4\pi\varepsilon_0}{4\pi} \operatorname{Im}[K_e(\omega)] \Big|_{4\pi\varepsilon_0=1} = \frac{\omega}{4\pi} \operatorname{Im}[K_e(\omega)]. \quad (118)$$

Hay soluciones curiosas de las ecuaciones de Maxwell. Por ejemplo, por simpleza, no consideremos la absorción ( $\omega^2 \not\approx \omega_0^2$ ), entonces la parte real es:

$$\varepsilon \sim \varepsilon_1 \sim \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]_{\omega=\omega_L} = 0, \quad \text{para} \quad (119)$$

$$\omega_L \equiv \omega_0 \sqrt{1 + \omega_p^2/\omega_0^2}. \quad (120)$$

En este caso  $\vec{D} = 0$ ,  $\vec{E} = -\vec{P}/\varepsilon_0$ , de (69)  $H_0 = 0$ , en ese caso se prueba que la onda es longitudinal:  $\vec{E}$  es paralelo  $\vec{k}$