FISICA 3. Apéndice Matemático.

Resumen de las ecuaciones usadas

Curso de verano de 2014

J. Miraglia

(Dated: January 27, 2014)

Abstract

SISTEMAS DE COORDENADAS

Cartesianas, esféricas y cilíndricas. Formulas que contienen $\overrightarrow{\nabla}$. Integrales de interés. Operaciones vectoriales simples. Expansiones elementales. El teorema de Green. El teorema de Stokes.

EXPRESIONES EXPLICITAS DE LOS OPERADORES

Expresión explícita de los operadores gradiente, divergencia, laplaciano y las direccionales.

LA FUNCION δ DE DIRAC y Θ DE HEAVISIDE

Funciones δ de Dirac en una y tres dimensiones. La funcion Θ de heaviside. Propiedades. Ecuaciones de Poisson y Green.

DESARROLLOS PARTICULARES.

Para determinar el campo magnético $\overrightarrow{B}$. Para determinar la intensidad magnética $\overrightarrow{H}$. Para demostrar la divergencia nula de $\overrightarrow{A}$. Un truco básico.

PACS numbers:

I. SISTEMAS DE COORDENADAS

Coordenadas **cartesianas**: $\{x, y, z\}$, $d\overrightarrow{r} = dxdydz$, $x \in \{-\infty, \infty\}$, $y \in \{-\infty, \infty\}$, $z \in \{-\infty, \infty\}$. Los vectores se escriben como $\overrightarrow{F} = F_x \widehat{e}_x + F_y \widehat{e}_y + F_z \widehat{e}_z$, $F_{x,y,z}$, con $F_{x,y,z}(x, y, z)$, y los versores (definidos sempre en la dirección del crecimiento de la variable) satisfacen

$$\widehat{e}_x \times \widehat{e}_y = \widehat{e}_z, \qquad \widehat{e}_y \times \widehat{e}_z = \widehat{e}_x, \qquad \widehat{e}_z \times \widehat{e}_x = \widehat{e}_y \ , \tag{1}$$

$$\widehat{e}_x \cdot \widehat{e}_y = \widehat{e}_y \cdot \widehat{e}_z = \widehat{e}_z \cdot \widehat{e}_x = 0 \ , \tag{2}$$

Coordenadas **esféricas**: $\{r, \theta, \varphi\}$, $d\overrightarrow{r} = r^2 \sin\theta \ drd\theta d\varphi$, $r \in \{0, \infty\}$, $\theta \in \{0, \pi\}$, $\varphi \in \{-\pi, \pi\}$. La transformación $\{r, \theta, \varphi\} \longleftrightarrow \{x, y, z\}$ es:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = arc\cos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} , \tag{3}$$

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} . \tag{4}$$

Los vectores se escriben como $\overrightarrow{F} = F_r \widehat{e}_r + F_\theta \widehat{e}_\theta + F_\varphi \widehat{e}_\varphi$, con $F_{r,\theta,\varphi} = F_{r,\theta,\varphi}(r, \theta, \varphi)$ y los versores satisfacen

$$\widehat{e}_r \times \widehat{e}_\theta = \widehat{e}_\varphi, \qquad \widehat{e}_\theta \times \widehat{e}_\varphi = \widehat{e}_r, \qquad \widehat{e}_\varphi \times \widehat{e}_r = \widehat{e}_\theta \ , \tag{5}$$

$$\widehat{e}_r \cdot \widehat{e}_\theta = \widehat{e}_\theta \cdot \widehat{e}_\varphi = \widehat{e}_\varphi \cdot \widehat{e}_r = 0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \widehat{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \widehat{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \widehat{e}_y + \cos\theta \widehat{e}_z \\ \widehat{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \widehat{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \widehat{e}_y - \sin\theta \widehat{e}_z \\ \widehat{e}_\varphi = -\sin\varphi \widehat{e}_x + \cos\varphi \widehat{e}_y \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \widehat{e}_x = \sin\theta \cos\varphi \widehat{e}_r + \cos\theta \cos\varphi \widehat{e}_\theta - \sin\varphi \widehat{e}_\varphi \\ \widehat{e}_y = \sin\theta \sin\varphi \widehat{e}_r + \cos\theta \sin\varphi \widehat{e}_\theta + \cos\varphi \widehat{e}_\varphi \\ \widehat{e}_z = \sin\theta \widehat{e}_r - \sin\theta \widehat{e}_y \end{cases} \tag{8}$$

Coordendas **cilíndricas**: $\{\rho, \varphi, z\}$, $d\overrightarrow{r} = \rho\ d\rho d\varphi dz$, $\rho \in \{0, \infty\}$, $\varphi \in \{-\pi, \pi\}$, $z \in \{-\infty, \infty\}$. La transformacion $\{\rho, \varphi, z\} \longleftrightarrow \{x, y, z\}$ es:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\ \frac{y}{x} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases} \tag{9}$$

y obviamente $z = z$. Los vectores se escriben como $\overrightarrow{F} = F_\rho \widehat{e}_\rho + F_\varphi \widehat{e}_\varphi + F_z \widehat{e}_z$, con $F_{\rho,\varphi,z} = F_{\rho,\varphi,z}(\rho, \varphi, z)$ y los versores satisfacen:

$$\widehat{e}_\rho \times \widehat{e}_\varphi = \widehat{e}_z, \quad \widehat{e}_\varphi \times \widehat{e}_z = \widehat{e}_\rho, \quad \widehat{e}_z \times \widehat{e}_\rho = \widehat{e}_\varphi \tag{10}$$

$$\widehat{e}_\rho \cdot \widehat{e}_\varphi = \widehat{e}_\varphi \cdot \widehat{e}_z = \widehat{e}_z \cdot \widehat{e}_\rho = 0 \tag{11}$$

$$\begin{cases} \widehat{e}_\rho = \cos\varphi \widehat{e}_x + \sin\varphi \widehat{e}_y \\ \widehat{e}_\varphi = -\sin\varphi \widehat{e}_x + \cos\varphi \widehat{e}_y \end{cases} \qquad y \qquad \begin{cases} \widehat{e}_x = \cos\varphi \widehat{e}_\rho - \sin\varphi \widehat{e}_\theta \\ \widehat{e}_y = \sin\varphi \widehat{e}_\rho + \cos\varphi \widehat{e}_\theta \end{cases} \tag{12}$$

y obviamente $\widehat{e}_z = \widehat{e}_z$.

A. Vectores

Recordar que

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB\cos\alpha, \qquad \text{con} \qquad \alpha = \widehat{\overrightarrow{A}\ \overrightarrow{B}} \tag{13}$$

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \widehat{e}_x & \widehat{e}_y & \widehat{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & A_z \end{vmatrix} = -\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A} = AB \sin\alpha\, \widehat{e} \quad / \, \widehat{e} \perp (\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \tag{14}$$

Formulas específicas de interés en el curso serán:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{A}\cdot\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right) &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} && (15)\\
\overrightarrow{A}\times\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right) &= \overrightarrow{B}\cdot\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}\right)-\overrightarrow{C}\cdot\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right) \qquad \text{ó} && (16)\\
(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})\times\overrightarrow{C} &= \overrightarrow{B}\cdot\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}\right)-\overrightarrow{A}\cdot\left(\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}\right) && (17)\\
(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{C}\times\overrightarrow{D}) &= \overrightarrow{C}\left[\overrightarrow{A}\cdot\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{D}\right)\right]-\overrightarrow{D}\left[\overrightarrow{A}\cdot\left(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}\right)\right] \qquad \text{ó} && (18)\\
&= \overrightarrow{B}\left[\overrightarrow{A}\cdot\left(\overrightarrow{C}\times\overrightarrow{D}\right)\right]-\overrightarrow{A}\left[\overrightarrow{B}\cdot\left(\overrightarrow{C}\times\overrightarrow{D}\right)\right] && (19)
\end{aligned}
$$

B. Formulas que contienen $\overrightarrow{\nabla}$

Que contienen el **gradiente,**

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}(u+v) &= \overrightarrow{\nabla}u+\overrightarrow{\nabla}v, && (20)\\
\overrightarrow{\nabla}(u\,v) &= v\overrightarrow{\nabla}u+u\overrightarrow{\nabla}v, && (21)\\
\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}) &= (\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{A}+(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B}+\overrightarrow{B}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A})+\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}), && (22)
\end{aligned}
$$

el operador $(\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{A}$ sera definido luego.

Que contienen la **divergencia,**

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) &= \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}+\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B}, && (23)\\
\overrightarrow{\nabla}\cdot(u\,\overrightarrow{A}) &= (\overrightarrow{\nabla}u)\cdot\overrightarrow{A}+u(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}), && (24)\\
\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) &= \overrightarrow{B}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A})-\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}), && (25)\\
\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times u) &= 0. \qquad !! && (26)
\end{aligned}
$$

Que contienen el **rotor,**

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) &= \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}+\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}, && (27)\\
\overrightarrow{\nabla}\times(u\,\overrightarrow{A}) &= (\overrightarrow{\nabla}u)\times\overrightarrow{A}+u(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}), && (28)\\
\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) &= (\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{A}-(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B}-\overrightarrow{B}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A})+\overrightarrow{A}\,(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B}), && (29)\\
\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}) &= \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A})-\nabla^2\overrightarrow{A}, && (30)\\
\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}u) &= 0 \qquad !! && (31)
\end{aligned}
$$

y que contienen el **Laplaciano,**

$$\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \ . \tag{32}$$

C. Integrales de interés

$$\oint_{C_1} \vec{dl}_1 \ = \ 0, \tag{33}$$

$$\oint_{C_1} \vec{dl}_1 \cdot \vec{r} \ = \ 0, \tag{34}$$

$$\oint_{C_1} \vec{r} \times \vec{dl}_1 \ = \ 2A, \qquad / \ A = \text{area encerrada} \tag{35}$$

$$\oint_{C_1} \frac{\vec{dl}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \ = \ \vec{\nabla} \times \oint_{C_1} \frac{\vec{dl}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \tag{36}$$

$$\oint_{C_1} \frac{\vec{dl}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \ = \ 0, \tag{37}$$

$$\int_{V_1} d\vec{r}_1 \frac{\vec{A}(\vec{r}_1) \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \ = \ \vec{\nabla} \times \int_{V_1} d\vec{r}_1 \frac{\vec{A}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \tag{38}$$

D. Operaciones vectoriales simples

Que contienen el **gradiente,**

$$\vec{\nabla}\, r \ = \ \widehat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \tag{39}$$

$$\vec{\nabla}\, r^n \ = \ n r^{n-1}\widehat{r} = n r^{n-2}\vec{r} \ , \tag{40}$$

$$\vec{\nabla}\, \frac{1}{r} \ = \ -\frac{\widehat{r}}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \ , \tag{41}$$

$$\vec{\nabla}\, \frac{1}{r^2} \ = \ -2\frac{\widehat{r}}{r^3} = -2\frac{\vec{r}}{r^4} \ , \tag{42}$$

$$\vec{\nabla}\, \frac{1}{r^n} \ = \ -n\frac{\widehat{r}}{r^{n+1}} = -n\frac{\vec{r}}{r^{n+2}}, \quad n > 0 \ . \tag{43}$$

$$\vec{\nabla}\, (\vec{A}.\vec{r}) \ = \ \vec{A} \ , \tag{44}$$

que contienen la **divergencia,**

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \;=\; 0 \;, \tag{45}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} \;=\; 3 \;, \tag{46}$$

$$\left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{r}}{r^3} \;=\; \frac{\vec{A}}{r^3} - 3\frac{\left(\vec{A} \cdot \vec{r}\right)}{r^5} \vec{r} \;, \tag{47}$$

que contienen el **rotor,**

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \;, \tag{48}$$

y que contienen el **laplaciano,**

$$\nabla^2 \frac{1}{r} \;=\; -4\pi\delta(\vec{r}) \quad \text{Poisson} \;. \tag{49}$$

$$(\nabla^2 + k^2)\frac{e^{\pm i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} \;=\; -4\pi\delta(\vec{r}) \quad \text{función de Green} \;. \tag{50}$$

E. Expansiones elementales

$$\frac{1}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|} \underset{\substack{R\to\infty \\ (R>>r)}}{\longrightarrow} \frac{1}{R} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^3} + \frac{1}{2R^3}\left[\frac{3(\vec{R}\cdot\vec{r})^2}{R^2} - r^2\right] + O\left(\frac{1}{R^4}\right) \;, \tag{51}$$

$$\frac{1}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|^3} \underset{\substack{R\to\infty \\ (R>>r)}}{\longrightarrow} \frac{1}{R^3} + \frac{3\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^4} + O\left(\frac{1}{R^5}\right) \;. \tag{52}$$

F. El teorema de Green

Si la superficie $\mathcal{S}$ es el borde del volumen $\mathcal{V}$ y $d\vec{s} = ds\,\widehat{n}$, con $\widehat{n}$ normal a la superficie, entonces vale (en lo que sigue $\iint_{\bigcirc\mathcal{S}}$ es la integral sobre la superficie cerrada $\mathcal{S}$)

$$\int_{\mathcal{V}} d\vec{r}\; \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) \;=\; \iint_{\bigcirc\mathcal{S}} \underbrace{ds\,\widehat{n}}_{d\vec{s}} \cdot \vec{A} \;, \qquad \text{de la divergencia,} \tag{53}$$

$$\int_{\mathcal{V}} d\vec{r}\; \left(\vec{\nabla}\, f\right) \;=\; \iint_{\bigcirc\mathcal{S}} d\vec{s}\; f \;, \qquad \text{del gradiente,} \tag{54}$$

$$\int_{\mathcal{V}} d\vec{r}\; \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) \;=\; \iint_{\bigcirc\mathcal{S}} d\vec{s} \times \vec{A}, \qquad \text{del rotor, y} \tag{55}$$

$$\int_{\mathcal{V}} d\vec{r}\; f^* \left(\vec{\nabla} f\right) \;=\; \int_{\mathcal{V}} d\vec{r}\; f^* \left(\nabla^2 f\right) + \int_{\mathcal{V}} d\vec{r}\; \left|\vec{\nabla}\, f\right|^2 \;. \tag{56}$$

G. El teorema de Stokes

Si la curva c es el contorno de S y que $d\overrightarrow{l}$ y $\widehat{n}$ satisfacen la regla de la mano derecha, entonces vale

$$\iint_{\bigcirc S} d\overrightarrow{s} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right) \; = \; \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{l}, \quad \text{y una variación} \tag{57}$$

$$\iint_{\bigcirc S} d\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{\nabla} f \; = \; \oint_{\mathcal{C}} f \; d\overrightarrow{l} \tag{58}$$

II. EXPRESIÓN EXPLÍCITA DE LOS OPERADORES

A. El gradiente

En Coordenadas **cartesianas** (x, y, z),

$$\overrightarrow{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \; \frac{\partial}{\partial y} f, \; \frac{\partial}{\partial z} f\right) \; , \tag{59}$$

en Coordenadas **esféricas** (r, θ, φ),

$$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial r} f \; \widehat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f \; \widehat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f \; \widehat{e}_\varphi \; , \tag{60}$$

y en Coordenadas **cilíndricas** (ρ, φ, z),

$$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial \rho} f \; \widehat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f \; \widehat{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f \; \widehat{e}_z \; . \tag{61}$$

B. La divergencia

En Coordenadas **cartesianas** (x, y, z),

$$\overrightarrow{F} \; = \; F_x \widehat{e}_x + F_y \widehat{e}_y + F_z \widehat{e}_z \; , \quad \text{con} \quad F_{x,y,z} = F_{x,y,z}(x, y, z) \; , \tag{62}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} \; = \; \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot (F_x, F_y, F_z) \; , \tag{63}$$

$$= \; \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z \; , \tag{64}$$

en Coordenadas **esféricas** (r, θ, φ),

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \; F_\theta\right) +, \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi \tag{65}$$

y en Coordenadas **cilíndricas** (ρ, φ, z)

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}F_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}F_z \tag{66}$$

C. El rotor

En coordenadas **cartesianas**: $\overrightarrow{F} = F_x\widehat{e}_x + F_y\widehat{e}_y + F_z\widehat{e}_z$, con $F_{x,y,z} = F_{x,y,z}(x, y, z)$,

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \widehat{e}_x & \widehat{e}_y & \widehat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{B} = (B_x, B_y, B_z) \ , \tag{67}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y, -\frac{\partial}{\partial x}F_z + \frac{\partial}{\partial z}F_x, \frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x\right) \ , \tag{68}$$

en Coordenadas **esféricas**: $\overrightarrow{F} = F_r\widehat{e}_r + F_\theta\widehat{e}_\theta + F_\varphi\widehat{e}_\varphi$, con $F_{r,\theta,\varphi} = F_{r,\theta,\varphi}(r, \theta, \varphi)$,

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \widehat{e}_r & r\widehat{e}_\theta & r\sin\theta\widehat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi \end{vmatrix} = \overrightarrow{B}, \tag{69}$$

y en Coordenadas **cilíndricas**: $\overrightarrow{F} = F_\rho\widehat{e}_\rho + F_\varphi\widehat{e}_\varphi + F_z\widehat{e}_z$, con $F_{\rho,\varphi,z} = F_{\rho,\varphi,z}(\rho, \varphi, z)$,

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \widehat{e}_r & \rho\widehat{e}_\varphi & \widehat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{B}. \tag{70}$$

D. El Laplaciano

En Coordenadas **cartesianas** (x, y, z),

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f, \tag{71}$$

en coordenadas **esféricas** (r, θ, φ),

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}f) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}f + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}f + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}f, \tag{72}$$

y en Coordenadas **cilíndricas** (ρ, φ, z),

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}f\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f, \tag{73}$$

Ocacionalmente opera sobre vectores. Por ejemplo $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$$\nabla^2 \overrightarrow{F} = (\nabla^2 F_x, \nabla^2 F_x, \nabla^2 F_x) = \overrightarrow{B} \tag{74}$$

E. El operador $\overrightarrow{\nabla}$ direccional

Pueden operar sobre escalares o vectores. En cartesianas es muy simple y valen

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right) f &= \left[(A_x, A_y, A_z)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\right] f \\
&= \left(A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}\right) f \qquad (75)\\
\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{B} &= \left[\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)B_x, \left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)B_y, \left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)B_y\right] \qquad (76)\\
\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\left(f\overrightarrow{B}\right) &= f\left[\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)B_x, \left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)B_y, \left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)B_y\right] + \overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right) f \qquad (77)
\end{aligned}$$

III. <u>LA FUNCION δ DE DIRAC Y Θ DE HEAVISIDE</u>

A. En una dimensión

Se define la funcion δ de Dirac de infinitas maneras; la mas rústica es:

$$\delta(x) = \mathop{Lim}_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x) = \mathop{Lim}_{\varepsilon\to 0}\begin{cases} 1/\varepsilon, & \text{para } |x|<\varepsilon/2 \\ 0, & \text{para } |x|>\varepsilon/2 \end{cases} . \tag{78}$$

Otras definiciones de interés son

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+x^2)} = \frac{2}{\pi^2}\frac{\varepsilon^3}{(\varepsilon^2+x^2)^2} , \qquad (79)\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x} = \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{x^2} , \qquad (80)\\
&= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{-|x|/\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}e^{-(x/\varepsilon)^2} , \qquad (81)
\end{aligned}$$

y muchisimas mas. La δ esta normalizada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x-x_0) = 1 . \tag{82}$$

La propiedad mas importante es que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x-x_0)f(x) \ = \ f(x_0), \quad \text{ó} \tag{83}$$

$$\int_a^b dx\ \delta(x-x_0)f(x) \ = \ \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x_0 \notin [a,b] \end{cases} . \tag{84}$$

Otras propiedades de interés son

$$\delta(x-x_0)f(x) \ = \ f(x_0)\ , \tag{85}$$

$$x\delta(x) \ = \ 0\ , \tag{86}$$

$$\delta(x) \ = \ \delta(-x)\ , \tag{87}$$

$$\delta(x_1-x_2) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x-x_1)\delta(x-x_2)\ , \tag{88}$$

$$\delta(cx) \ = \ \frac{1}{|c|}\delta(x), \qquad \text{si } c = cte; \tag{89}$$

$$\delta(g(x)) \ = \ \sum_j \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i), \ \text{ tal que } \ g'(x_i) = 0\ . \tag{90}$$

También hay una definición muy usada en el contexto de la transformada de Fourier,

$$\delta(x) \ = \ \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\ \delta_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}e^{\pm ikx-\varepsilon|k|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}e^{\pm ikx}\ , \tag{91}$$

$$\delta'(x) \ = \ \delta^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}e^{\pm ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\pm i)k\frac{dk}{2\pi}e^{\pm ikx}\ , \tag{92}$$

$$(-1)^n f^{(n)}(0) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta^{(n)}(x)f(x)\ . \tag{93}$$

La funcion escalon (*step function*) ó Θ de Heaviside en su forma mas rustica se define así

$$\Theta(x) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\Theta_\varepsilon(x) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\begin{cases} 0, & \text{para } x < -\varepsilon/2 \\ \frac{2x+\varepsilon}{2\varepsilon}, & \text{para } |x| < \varepsilon/2 \\ 1, & \text{para } x > \varepsilon/2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{para } x = 0 \\ 1, & \text{para } x > 0 \end{cases} \tag{94}$$

Las propiedades mas importantes son

$$\frac{d}{dx}\Theta(x) \ = \ \delta(x) \tag{95}$$

$$\Theta(x-x_0) \ = \ \int_{-\infty}^{x} dx\ \delta(x-x_0) \tag{96}$$

B. En 3 dimensiones

Las extensiones son obvias. En coordenadas **cartesianas,**

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\ , \tag{97}$$

en **esféricas**

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\ , \tag{98}$$

y en **cilíndricas**

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(r-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)\ , \tag{99}$$

En todos los casos, satisfacen

$$\int d\vec{r}\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=1\ . \tag{100}$$

En 3 dimensiones la $\delta(\vec{r})$ tine la siguiente representación integral

$$\delta(\vec{r})=\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{(\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}-\varepsilon|k|)}. \tag{101}$$

C. Ecuación de Poisson

El resultado mas importante es

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{r})\qquad \text{ecuación de Poisson.} \tag{102}$$

Hay una generalización que se utilza en la determinación de la función de Green en teoría electromagnética (no lo veremos)

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\frac{\exp^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}=-4\pi\delta(\vec{r}) \tag{103}$$

La demostración de la ecuación de Poisson es muy simple. Partiendo de la identidad

$$\frac{e^{-\epsilon r}}{r}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\frac{d\vec{k}}{k^2+\epsilon^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{104}$$

Operando $\nabla^2_{\vec{r}}$ a ambos términos

$$\nabla^2_{\vec{r}}\frac{e^{-\epsilon r}}{r} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\frac{d\vec{k}}{k^2+\epsilon^2}\underbrace{\nabla^2_{\vec{r}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{(i\vec{k})^2e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}} \tag{105}$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\frac{d\vec{k}\,(k^2+\epsilon^2-\epsilon^2)}{k^2+\epsilon^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{106}$$

$$= -\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2\pi)^3}_{4\pi}\delta(\vec{r}) + \epsilon^2\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\frac{d\vec{k}}{k^2+\epsilon^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{e^{-\epsilon r}/r}$$

$$\left(\nabla^2_{\vec{r}}-\epsilon^2\right)\frac{e^{-\epsilon r}}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \tag{107}$$

Tomando el limite cuando $\epsilon\to 0$, se llega a la ecuacion de Poisson.

IV. DESARROLLOS PARTICULARES

Para determinar el campo magnéticos $\vec{\mathrm{B}}$

Si $\vec{F}_1 = \vec{A}_1\times\vec{B}$, $\vec{F}_2 = \vec{A}_2\times\vec{B}$ y $\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2 = 0$ (son perpendiculares) entonces vale

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_1\times\vec{A}_1}{A_1^2} + \frac{\vec{A}_1\cdot\left[(\vec{F}_2\times\vec{A}_2)\cdot\vec{A}_1\right]}{A_1^2A_2^2} \tag{108}$$

Para determinar la intensidad magnética $\vec{H}$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times(\vec{M}\times\vec{G}) &= -\vec{\nabla}(\vec{M}\cdot\vec{G}) + 2(\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{M} - \vec{G}(\vec{\nabla}\cdot\vec{M})\\ &\quad +\vec{M}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}) + \vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{M}) + \vec{M}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G})\end{aligned} \tag{109}$$

Si $\vec{M} = \vec{M}(\vec{x})$ no depende de las varilables de derivación de $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}$:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\times(\vec{M}\times\vec{G}) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{M}\cdot\vec{G}) + \vec{M}\,(\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\vec{G}) + \vec{M}\times(\vec{\nabla}_{\vec{r}}\times\vec{G}) \tag{110}$$

Si además $\vec{G} = \vec{G}(\vec{r})$ y tiene la siguiente expresión

$$\vec{G}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{x}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}|} \tag{111}$$

entonces $\vec{\nabla}_{\vec{r}}\times\vec{G} = 0$, y $\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\vec{G} = -\nabla^2_{\vec{r}}1/|\vec{x}-\vec{r}| = +4\pi\delta(\vec{x}-\vec{r})$, con lo que queda

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \left(\vec{M}(\vec{x}) \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}|} \right) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(\vec{M}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}|} \right) + 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{r})\vec{M}(\vec{r}) \tag{112}$$

<u>Para demostrar la divergencia nula de $\vec{A}$</u>

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} = \vec{J}(\vec{x}) \cdot \ \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \tag{113}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} = \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{J}(\vec{x})}_{0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} + \vec{J}(\vec{x}) \cdot \ \vec{\nabla}_{x} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \tag{114}$$

Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ (caso estacionario), y sabiendo que

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} = -\frac{\vec{r} - \vec{x}}{|\vec{r} - \vec{x}|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|}, \qquad \text{entonces} \tag{115}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} \ . \tag{116}$$

<u>El truco básico</u>

En varias situaciones vamos a estar interesado en calcular

$$f(\vec{r}) = \int_{\infty} d\vec{x} \ \vec{A}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) \ , \tag{117}$$

donde el ∞ indica que tenemos que integrar en todo el espacio. Usando (24)

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \left(\vec{A}(\vec{x}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) = \vec{A}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right) \ , \tag{118}$$

(117) queda

$$f(\vec{r}) = \int_{\infty} d\vec{x} \, \vec{\nabla}_{\vec{x}} \left(\vec{A}(\vec{x}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} \right) - \int_{\infty} d\vec{x} \, \frac{\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right)}{|\vec{r} - \vec{x}|} \ , \tag{119}$$

y usando Gauss

$$f(\vec{r}) = \iint_{\bigcirc \mathcal{S}\infty} ds \ \frac{\left[\hat{n} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right]}{|\vec{r} - \vec{x}|} + \int_{\infty} d\vec{x} \, \frac{\left[-\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right]}{|\vec{r} - \vec{x}|} \ . \tag{120}$$

Y aquí simpre tenemos dos caminos.

Primer camino: si $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{x})$ es no nulo dentro de un cierto volumen $\mathcal{V}$ cuya superficie es $\mathcal{S}$ entonces

$$f(\overrightarrow{r}) = \oiint_{\mathcal{S}} ds \, \frac{\left[\widehat{n} \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{x})\right]}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{x}|} + \int_{\mathcal{V}} d\overrightarrow{x} \, \frac{\left[-\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{x})\right]}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{x}|} \tag{121}$$

así la cantidad $\left[\widehat{n} \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{x})\right]$ se asociará a una distribución superficial de cargas eléctricas o de polos magnéticos, y $\left[-\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{x})\right]$ se interpretará como una distribución volumétrica de cargas o polos.

El segundo camino consiste en mantener la integral hasta el infinito con lo que alli: $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{x}) = 0$ y por lo tanto la primera integral del RHS se anula. Sobrevive la segunda. En ese caso $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{x})$ tendrá un rango limitado por la Θ de Heaviside y el $\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}$ (derivada) generara (de acuerdo a (95)) una función δ de Dirac en la superficie, que reproducirá el término $\left[\widehat{n} \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{x})\right]$ superficial anteriormente mencionado. Ambas estrategias son equivalentes.