Ejercicio 1 del parcial de repaso

por Manuel Sáenz

Enunciado: Se tiene un arrollamiento de N vueltas de base cuadrada (de lado a) y cuya altura es d, por el cual circula una corriente I. El arrollamiento es lo suficientemente denso como para que pueda despreciarse la componente vertical de la corriente y aproximar este sistema por una densidad superficial de corriente $\vec{g}$ uniforme sin componente vertical, tal como se muestra en la Figura 1. Considere que el origen de coordenadas está centrado en el arrollamiento con los ejes x e y paralelos a los lados de la base cuadrada.

(a) Halle explícitamente $|\vec{g}|$ en función de los datos del problema y calcule el campo magnético en el eje z (es decir, halle $\vec{B}(x = 0, y = 0, z)$).

(b) Utilizando el resultado del punto anterior, ahora se quiere hallar el campo B y el campo H en el eje z de un imán permanente de base cuadrada (de lado a) y altura d y cuya magnetización es M M zˆ = 0 (nuevamente, el eje z se toma de manera que sea perpendicular a la base del imán). Para resolver este punto:

- Calcule las fuentes en superficie y en volumen de los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ del imán.
- Escriba en forma precisa las expresiones para $\vec{B}(x = 0, y = 0, z)$ y $\vec{H}(x = 0, y = 0, z)$ en función de el/los parámetro/s del imán.

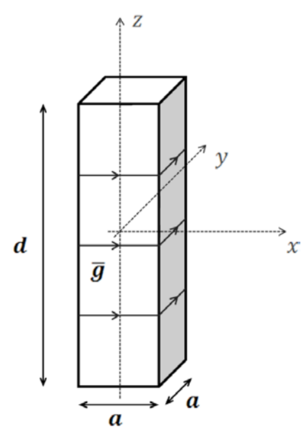

Figura 1.

Resolución: para resolver el ítem (a), vamos a seguir la sugerencia del ejercicio que nos dice que primero mostremos que el campo apunta sólo en una dirección (que veremos que es en el eje z).

Eligiendo un punto sobre el eje z, analicemos cómo es el campo producido *por una sola de las espiras cuadradas* que conforman el solenoide. Vamos a centrarnos en las componentes horizontales (es decir las que están en el plano perpendicular al eje z). Veamos que estas componentes son nulas.

Llamando a los lados del cuadrado como se muestra en la Figura 2, es fácil ver el campo producido por los lados L_1 y L_3 sólo tiene componente en la dirección $\hat{e}_y$[1]. Por otro lado, como los lados L_1 y L_3 están colocados simétricamente respecto del eje, ambos generaran campos cuya componente en y será igual en módulo (es decir, $|\vec{B}_{L_1} \cdot \hat{y}| = |\vec{B}_{L_3} \cdot \hat{y}|$). Pero por cómo están dispuestos los alambres, las componentes y del campo que generan deben apuntar en sentidos opuestos. Esto implica entonces que el campo generado por una espira cuadrada en un punto del eje z, no tiene componente y. Un argumento muy similar se puede usar para descartar la componente x.

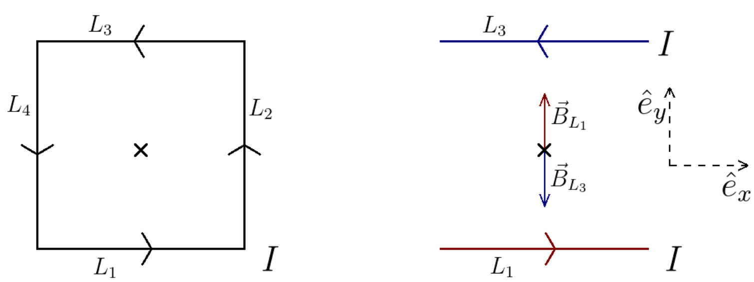

Figura 2.

Entonces el campo generado por una espira cuadrada apunta (sobre su eje) sólo en el eje z. Para simplificar las cuentas, puedo calcular el aporte de uno sólo de los lados de la espira cuadrada. Luego el campo será 4 veces (una por cada lado del cuadrado) la componente calculada. Por ejemplo, calculemos la componente z del campo generado (sobre el eje) por el lado L_1 de la espira. Para eso primero reconozcamos los distintos factores que aparecen en la ley de Biot-Savart:

$$\begin{cases} \vec{r} = z\hat{e}_z \\ \vec{r}' = -a/2\hat{e}_x + y'\hat{e}_y \quad (-a/2 \leq y' \leq a/2) \\ d\vec{l}' = dy'\hat{e}_y \end{cases}$$

[1]Una forma de ver esto es mostrar que (para cada lado) dado un elemento diferencial del alambre, hay un elemento colocado simétricamente tal que las componentes en $\hat{e}_x$ que generan ambos elementos se anulan.

Lo cual implica que $(\vec{r}-\vec{r}') = a/2\hat{e}_x + y'\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ y $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(a^2/4+z^2)+y'^2}$. Entonces, $d\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}') = zdy'\hat{e}_x + a/2dy'\hat{e}_z$. De este producto vectorial, me quedo sólo con la componente z (ya que las otras se anulan con las contribuciones del resto de los lados). Finalmente, me queda que:

$$\left(\vec{B}_{L_1}\cdot\hat{e}_z\right) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{L_1}\frac{a/2dy'}{[(a^2/4+z^2)+y'^2]^{3/2}} = \frac{\mu_o I a}{8\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dy'}{[(a^2/4+z^2)+y'^2]^{3/2}}$$

Usando que por tabla (Wolfram Alpha):

$$\int\frac{dx}{(A+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{A\sqrt{A+x^2}}$$

Obtenemos que:

$$\vec{B}_{C(0),I} = 4\left(\vec{B}_{L_1}\cdot\hat{e}_z\right)\hat{e}_z = \frac{2\mu_o a^2 I}{\pi(a^2+4z^2)\sqrt{a^2/2+z^2}}$$

Donde $\vec{B}_{C(0),I}$ es el campo producido sobre el eje z por una espira cuadrada posicionada en la altura $z=0$ y por la que circula una corriente I. Ahora tenemos que con este resultado calcular el campo sobre el eje del solenoide completo. Para eso, primero notemos que sobre el solenoide (dadas las hipótesis), circula una corriente superficial homogénea de módulo $|\vec{g}| = \frac{NI}{d}$ (piensen por qué está bien esto recordando la definición de $\vec{g}$). Entonces, podemos pensar al solenoide como si estuviera formado por muchas espiras cuadradas apiladas por las cuales circula una corriente diferencial $dI = |\vec{g}|dz' = \frac{NI}{d}dz'$. Siguiendo esta línea de razonamiento, el diferencial de campo generado por la espira cuadrada que tiene altura z' será:

$$d\vec{B}_{C(z'),dI} = \frac{2\mu_o a^2 NIdz'}{d\pi(a^2+4(z-z')^2)\sqrt{a^2/2+(z-z')^2}}\hat{e}_z$$

En donde usé que para pasar del campo generado por una espira en $z'=0$ (que es el que había calculado) a una en $z'>0$, tengo que aplicarle la traslación $z\longrightarrow(z-z')$. Ya casi estamos. Ahora sólo resta sumar (integrar) las contribuciones de cada una de las espiras cuadradas, desde la que se encuentra en $z'=0$ hasta la que está en $z'=d$. Esto nos da:

$$\vec{B}_{eje}(z) = \int_0^d d\vec{B}_{C(z'),dI} = \frac{2\mu_o a^2 NI}{d\pi}\int_0^d\frac{dz'}{(a^2+4(z-z')^2)\sqrt{a^2/2+(z-z')^2}}\hat{e}_z$$

Recurriendo otra vez a tablas (Wolfram Alpha) tenemos que:

$$\int\frac{dx}{(a+(b-x)^2)\sqrt{a/2+(b-x)^2}} = -\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{b-x}{\sqrt{a/2+(b-x)^2}}\right)$$

Lo cual nos lleva finalmente al resultado buscado:

$$\boxed{\vec{B}_{eje}(z) = \frac{\mu_o I N}{2\pi d}\left[\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2/2+z^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{z-d}{\sqrt{a^2/2+(z-d)^2}}\right)\right]\hat{e}_z}$$

El ítem (b) del ejercicio no requiere casi cuentas. Calculando las fuentes de los campos para el caso de un imán sin corrientes libres, obtenemos que[2]:

- La única fuente del campo $\vec{B}$ es una corriente de magnetización que rodea al iman sobre sus caras laterales y que gira en sentido horario. Usando que $\vec{g}_M = \vec{M}\times\hat{n}$ (sobre las superficies donde cambian los medios) obtenemos que $|\vec{g}_M| = M_o$.
- De forma similar para el caso del campo $\vec{H}$, las únicas fuentes presentes para este serán dos cuadrados de cargas de magnetización: uno en la tapa superior del solenoide y de valor $\sigma_{M_1} = M_o$ y otro en la cara inferior y de valor $\sigma_{M_2} = -M_o$. En donde se usó que $\sigma_M = \vec{M}\cdot\hat{n}$ (sobre las superficies donde cambian los medios).

Conociendo las corrientes de magnetización, entonces puedo olvidarme del imán y calcular simplemente el campo $\vec{B}$ generado por estas. Pero estas corrientes son iguales a las del ítem anterior, así que el campo generado sobre el eje por el imán será igual al calculado en el inciso anterior, reemplazando la densidad de corriente $|\vec{g}| = \frac{NI}{d}$ por la densidad de corriente de magnetización $|\vec{g}_M| = M_o$. Obtenemos entonces:

$$\vec{B}_{iman\ eje}(z) = \frac{\mu_o M_o}{2\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2/2+z^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{z-d}{\sqrt{a^2/2+(z-d)^2}}\right)\right]\hat{e}_z$$

Finalmente, puede despejarse de esta expresión el campo $\vec{H}_{iman\ eje}(z)$ utilizando que por definición $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$.

[2]También hat que justificar que no tienen fuentes en volumen calculando $\nabla\times\vec{M}$ y $\nabla\cdot\vec{M}$.