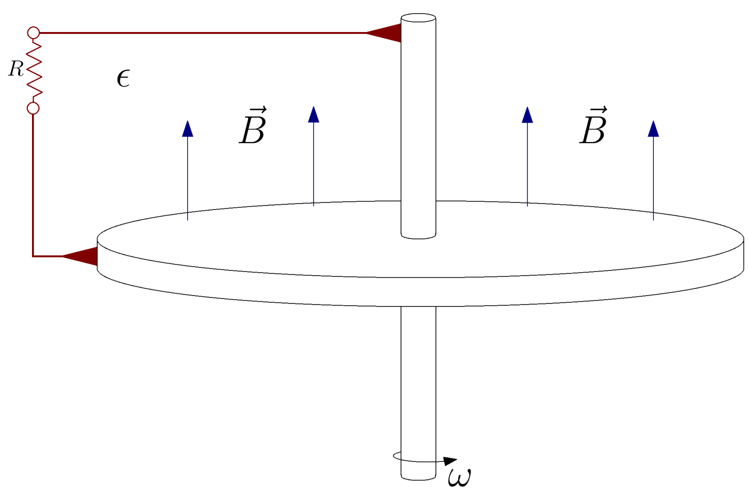
¿Siempre vale la *Regla del Flujo*?

por Manuel Sáenz

La idea de este apunte es analizar un "caso patológico" en donde fallan algunas de las estrategias usuales para calcular corrientes inducidas. Para entender esta situación vamos a tener que discutir un poco sobre el origen de las fuerzas electromotrices, su significado dinámico y de dónde provienen los trabajos que generan las corrientes inducidas. En la figura de abajo se muestra la situación a analizar[1] (un ejemplo de "Disco de Faraday"), que consistente en un disco conductor de radio a cuyo eje es paralelo a un campo magnético uniforme $\vec{B}$ al que se lo hace rotar con una velocidad angular ω; y cerrando el circuito, una resistencia de valor R.



El origen de la fem

Lo primero que nos interesa hallar es la fuerza electromotriz ϵ inducida sobre el circuito. Normalmente, para ello utilizaríamos la Regla del Flujo[2], que relaciona la variación tempo-

[1] Que es una ampliación del ejercicio 2 de la Guía 5 de Física 3 del 2do Cuatrimestre de 2016.

[2] Acá voy a nombrar como "Regla del Flujo" a la expresión $\epsilon = -\frac{d\Phi_{mag}}{dt}$ como se la utiliza en los ejercicios de la guía (es decir, como la ley que expresa la fem inducida por un campo externo) para diferenciarla de la Ley de Faraday que es *siempre* válida. Notar que esto no es una expresión de validez general ya que se desprecian autoinductancias y como se verá en este apunte, no siempre es aplicable al estudio de conductores en movimiento. Para más detalles sobre esto, consultar la sección 17-2 "Excepciones a la regla del flujo" de "Lecciones de física, vol. II" de R. Feynman.

ral del flujo de un campo magnético externo aplicado Φ_{mag} que atraviesa la superficie de un circuito cerrado con la fem inducida en el mismo. En concreto, nos dice que $\epsilon = -\frac{d\Phi_{mag}}{dt}$ donde $\Phi_{mag} = \iint_{S(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{S}$, con $d\vec{S}$ el elemento de superficie correspondiente al interior del circuito $\mathcal{C}$ (simbolizado con $S(\mathcal{C})$).

Pero una fem, por definición, es la integral en algún circuito cerrado $\mathcal{C}$ de una fuerza electromagnética no-conservativa $\vec{F}_{nc}$ por unidad de carga. Entonces, tenemos también que $\epsilon = \int_{\mathcal{C}} \frac{\vec{F}_{nc}}{q} \cdot d\vec{l}$.

Este punto es muy importante de señalar: una fem sólo puede ser producida por una fuerza no-conservativa ya que por definición, es proporcional al trabajo realizado por la fuerza en un circuito cerrado y esta cantidad para fuerzas conservativas es necesariamente nula (porque poseen rotor nulo).

¿Y cuáles son estas fuerzas no-conservativas que actúan sobre las cargas? La pregunta tiene, sorprendentemente, dos respuestas distintas dependiendo de la circunstancia que se nos presenta. Para poder entender el disco de Faraday, será necesario entender en cuál de estos dos casos cae. Tendré entonces que discutir brevemente sobre ellos.

Por un lado, en los casos en los que la variación de flujo se deba a una variación explícita del campo magnético con el tiempo, esta variación del campo magnético inducirá un campo eléctrico no-conservativo $\vec{E}_{ind}$ (resultado de la Ley de Faraday). Entonces, la fuerza no-conservativa que sentirá una carga q dentro de un conductor en presencia de este campo magnético variable vendrá dada por $\vec{F}_{nc} = q\vec{E}_{ind}$.

Pero si en vez de estar en presencia de un campo magnético variable, se introduce un circuito en movimiento con una velocidad $\vec{v}$ dentro de un campo magnético inhomogéneo $\vec{B}$, la fuerza no-conservativa que asegurará la validez de la Regla del Flujo ya no será una fuerza eléctrica sino una magnética (que aparecerá como resultado del movimiento de las cargas del conductor). Aquí la fuerza no-conservativa será $\vec{F}_{nc} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

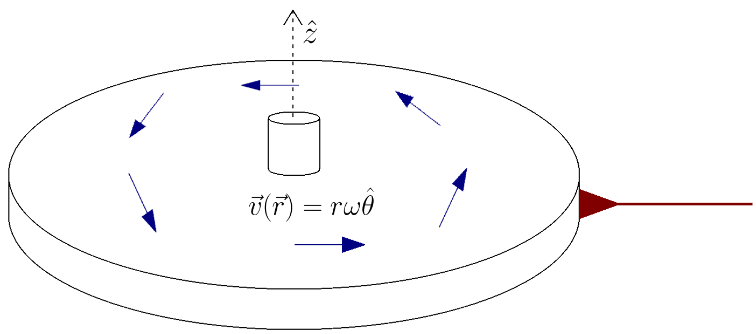
El caso del disco de Faraday es de este segundo tipo: la corriente inducida será el resultado de una fuerza magnética no-conservativa debida al movimiento de los portadores de carga del disco conductor.

¿Qué está pasando en el disco de Faraday?

Como se discute en Feynman (Vol. 2, cap 17-2), el caso del disco de Faraday es uno de los ejemplos en donde la Regla de Flujo no puede ser aplicada ¿Por qué es esto? En este caso no puede ser utilizada ya que los flujos que atraviesan al circuito son siempre los mismos ¡y sin embargo se establece una corriente producto de la fem generada por el campo magnético! Veamos con más detalle qué es lo que está sucediendo.

Inicialmente las cargas dentro del disco se mueven según el campo de velocidades (que se muestra en la figura que sigue, junto con el sistema de coordenadas utilizado) dado por:

$$\vec{v}(\vec{r}) = r\omega\hat{\theta} \tag{1}$$



es decir se mueven de la misma forma que lo hace el cuerpo. Como resultado de estar en presencia de un campo magnético $\vec{B} = B_o\hat{z}$, cada una de las cargas en movimiento sentirá una fuerza de Lorentz dada por:

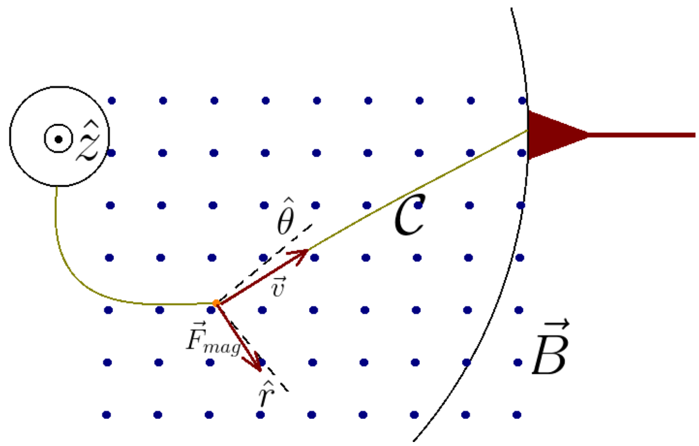
$$\vec{dF}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) \times \vec{B}dq = r\omega B_o dq\ \hat{r} \tag{2}$$

donde dq se corresponde con un elemento de carga del conductor en la posición $\vec{r}$.

A esta altura es importante señalar que a la hora de calcular la fem aplicada por el campo magnético sobre una carga que va desde el centro del disco hasta el borde, voy a asumir que su velocidad vendrá dada por (1) mientras se encuentre dentro del disco[3]. Puede verse que, una vez asumido esto la fem deja de depender del camino $\mathcal{C}$ que recorra la carga (con lo cual puede tomarse como recto). Notar que de toda la curva cerrada $\mathcal{C}$, el único tramo que aportará a la fem es el tramo dentro del disco ya que el resto del circuito se encuentra quieto y por lo tanto no recibirá fuerza magnética. En la siguiente figura se muestra un camino general (no el utilizado para las cuentas); y la relación entre la velocidad de la carga y la fuerza magnética, las dibujo ligeramente desalineadas respecto a los versores para representar gráficamente lo discutido en la nota al pie.
Asumiendo esto y utilizando la expresión (2) para la fuerza magnética, se obtiene entonces que la fem inducida vendrá dada por:

$$\epsilon = \int_0^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^a [(r\omega\hat{\theta}) \times (B_o\hat{z})] \cdot \hat{r}dr = \frac{\omega B_o a^2}{2} \tag{3}$$

[3] Al desplazarse una carga desde el centro al borde, esta comenzará a tener una componente de velocidad en $\hat{r}$ y por lo tanto la fem resultante dejará de ser paralela a $\hat{r}$, lo cual complicaría las cuentas. Este efecto, sin embargo, será despreciable en el caso en que la corriente inducida I sea lo suficientemente pequeña lo cual puede lograrse haciendo que la resistencia del circuito R tenga algún valor lo suficientemente grande. De esta forma, la velocidad radial será pequeña comparada con la angular.



Es decir, la fem fue obtenida integrando la Fuerza de Lorentz (por unidad de carga, por eso no aparece ninguna "q") a lo largo de un camino radial.

¿Cómo circulan las corrientes?

Como ya se discutió, la ϵ es producto de una fuerza no-conservativa y es por ello que se debe hablar de una fem en lugar de una diferencia de potencial (no hay un potencial bien definido). Sin embargo, la Ley de Ohm sigue siendo válida para la fem y con ella podemos calcular la corriente I que se establece en en el circuito como $I = \frac{\epsilon}{R}$, donde R es la resistencia que cierra el circuito (se asume mucho más grande que la resistencia del disco). La corriente vendrá dada entonces por:

$$I = \frac{\omega B_o a^2}{2R} \tag{4}$$

¿Y cuál será el sentido en que circule la corriente inducida? Normalmente responderíamos esta pregunta por medio de la Ley de Lenz; pero en este caso, al no haber una variación de flujo bien definida, no la podemos utilizar para anticipar la dirección de la corriente. Sin embargo, al conocer el sentido en que actúa la fuerza magnética (que apunta en la dirección $\hat{r}$) podemos concluir que circulará desde el contacto posicionado en el centro del disco hasta el que se ubica en su cara exterior. Esto se debe a que esta fuerza es la que está induciendo la corriente y por lo tanto las direcciones de ambas deben coincidir.

¿Hay balance energético?

Otro punto importante a discutir es el siguiente: si la fuerza magnética no puede realizar trabajo ¿de dónde sale la energía que establece la corriente? La respuesta es bastante simple: sale del trabajo de quien sea que esté manteniendo al disco en movimiento. Producto del establecimiento de la corriente, las cargas comienzan a tener un movimiento en la dirección

$\hat{r}$ y por lo tanto comienzan a sentir una fuerza magnética en la dirección $-\hat{\theta}$. Calculando a lo largo de una línea de corriente lineal[4] la potencia tangencial (en $\hat{\theta}$) producto de la fuerza magnética W_{mag}, obtenemos que:

$$W_{mag} = \int_0^a \vec{v}(r) \cdot d\vec{F}_\theta = \int_0^a r\omega\hat{\theta} \cdot (I\hat{r} \times B_o\hat{z})\ dr = -\frac{\omega^2 B_o^2 a^4}{4R} \tag{5}$$

Cantidad que coincide precisamente con la potencia disipada en la resistencia: $W_R = I^2 R = -\frac{\omega^2 B_o^2 a^4}{4R}$. Para mantener el disco en movimiento, se debe entonces imprimir una potencia:

$$W_{ext} = -W_{mag} \tag{6}$$

tal que compense el término que tiende a frenarlo (W_{mag}). Esta potencia que se necesita para mantener el disco en movimiento es, en efecto, igual a la potencia que luego es disipada en la resistencia. En conclusión, la fuerza magnética parece realizar trabajo pero en realidad sólo redirige el trabajo realizado por la persona que gira el disco. En el "Ejemplo 5.3" del Griffiths se discute precisamente esto. Si alguien sigue confundido por esta situación, le recomendaría que lo leyera.

[4] La situación real es un poco más complicada: la corriente se mueve en superficie. Sin embargo, por un argumento de conservación de la carga puede pensarse como lineal.