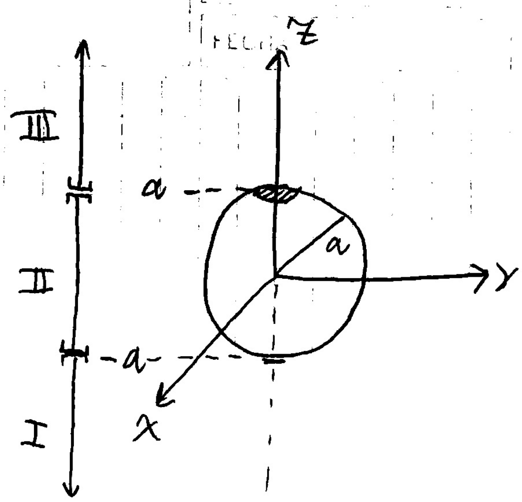
P1 (a)



Simetría de rotación $\Rightarrow \vec{E}(\bar{r}=z\hat{z})$ apunta en $\hat{z}$

$\Rightarrow$ Se puede obtener de ϕ restringido al eje $\hat{z}$, derivándolo.

Superposición: $\phi = \underset{\substack{\sigma,\\ (0,0,0)}}{\phi_{esfera}} + \underset{\substack{-\sigma,\\ (a,0,a)}}{\phi_{disco}}$

$$* \ \phi_{esfera}(\bar{r}=z\hat{z}) = \begin{cases} \dfrac{k\,Q_{esfera}}{a} & |z|\le a \\[2mm] \dfrac{k\,Q_{esfera}}{|z|} & |z|\ge a \end{cases} \underset{\uparrow_{\,Q_{esfera}=4\pi a^2\sigma}}{=} \begin{cases} \dfrac{\sigma a}{\epsilon_0} & |z|\le a \\[2mm] \dfrac{\sigma a^2}{\epsilon_0}\dfrac{1}{|z|} & |z|\ge a \end{cases}$$

* Para un disco de carga uniforme σ_{disco}, radio b, centrado en el origen:

$$\phi(z\hat{z}) = \frac{\sigma_{disco}}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{b^2+z^2}-|z|\right) \xrightarrow[\sigma_{disco}=-\sigma]{\text{desplazar a }(0,0,a)} \phi_{disco}(z\hat{z}) = \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{b^2+(z-a)^2}-|z-a|\right)$$

$$\Rightarrow \phi(z\hat{z}) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\left[+\dfrac{a^2}{z}+\dfrac{1}{2}\left(z-a+\sqrt{b^2+(z-a)^2}\right)\right] & z\le -a & \text{I} \\[2mm] -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(z+a+\sqrt{b^2+(z-a)^2}\right) & -a\le z\le a & \text{II} \\[2mm] -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\left[-\dfrac{a^2}{z}+\dfrac{1}{2}\left(-z+a+\sqrt{b^2+(z-a)^2}\right)\right] & z\ge a & \text{III} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{z}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\left[-\dfrac{a^2}{z^2}+\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{z-a}{\sqrt{b^2+(z-a)^2}}\right)\right]\hat{z} & \text{I} \\[2mm] \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1+\dfrac{z-a}{\sqrt{b^2+(z-a)^2}}\right)\hat{z} & \text{II} \\[2mm] \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\left[+\dfrac{a^2}{z^2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z-a}{\sqrt{b^2+(z-a)^2}}-1\right)\right]\hat{z} & \text{III} \end{cases}$$

(b) El trabajo para traer cuasiestacionariamente desde el ∞ la carga puntual Q es

$$\boxed{W} = Q\Delta V = Q\left(\phi(\bar{r}=2a\hat{z}) - \cancelto{0}{\phi_\infty}\right) = -\frac{\sigma Q}{\epsilon_0}\left[\frac{-a^{\cancel{2}}}{2\cancel{a}}+\frac{1}{2}\left(\overbrace{-2a+a}^{-a}+\sqrt{b^2+(2a-a)^2}\right)\right]$$

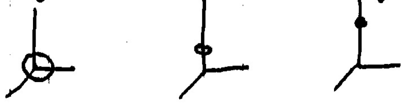
$$= Q\left(\frac{-\sigma}{\epsilon_0}\right)\left(-\frac{a}{2}\right)\left[1+1-\frac{1}{a}\sqrt{b^2+a^2}\right] = \boxed{Q\frac{\sigma a}{2\epsilon_0}\left(2-\sqrt{1+(b/a)^2}\right)}$$

OBS: si $\frac{b}{a} \to 0$, W tiende al trabajo requerido frente a la esfera completa.

(c) Momento monopolar: $\boxed{Q_{TOT}} = Q_{esfera} + Q_{disco} + Q$

$$= 4\pi a^2 \sigma + \pi b^2 (-\sigma) + 4\pi\left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right)(-\sigma) = \boxed{0}$$

Momento dipolar: $\vec{p} = \vec{p}_{esfera} + \vec{p}_{disco} + \vec{p}_{carga}$



* $\vec{p}_{esfera} = 0$ por simetría ante cualquier rotación o reflexión (sobre un plano que pase por el origen)

* $\vec{p}_{disco} = p^{(z)}_{disco}\,\hat{z}$ por simetría de rotación sobre el eje z

$$p^{(z)}_{disco} = \int_{disco} dq' \underbrace{z'}_{=a} = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{b} \rho' d\rho'}_{=\text{área} = \pi b^2} (-\sigma)\, a = -\pi a b^2 \sigma$$

* $\vec{p}_{carga} = Q\,\vec{r}_{carga} = 2aQ\,\hat{z} = (-8\pi a^3 \sigma + 2\pi a b^2 \sigma)\,\hat{z}$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{p} = \pi\sigma(ab^2 - 8a^3)\,\hat{z}}$$

Como el término dipolar es el primero que no se anula en la expansión multipolar de ϕ, es el que domina a distancias grandes de la distribución de cargas:

$$\phi(\vec{r}) = 0 + k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^3\right] \underset{r \gg a}{\simeq} k\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{k\pi\sigma(ab^2 - 8a^3)\,z}{r^3}$$

$$\underset{\text{ESFÉRICAS}}{=} k\pi\sigma(ab^2 - 8a^3)\,\frac{\cos\theta}{r^2}$$