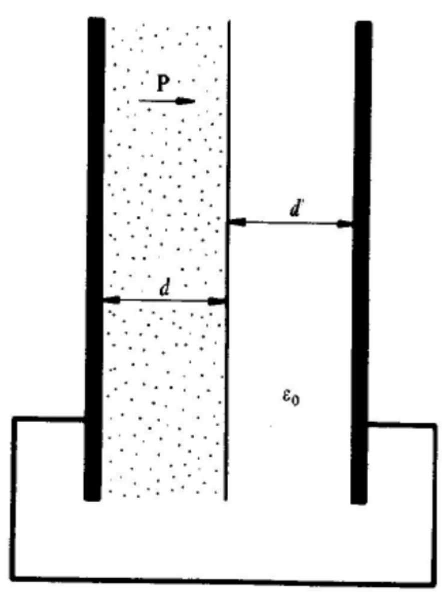
Sobre electretes y planos conductores

por Manuel Sáenz

"L'diélectrique est semblable à l'homme: on ne saura jamais jusquà quel point on peut l'polariser, ni de combien d'charges sublimes il est capable. Mais un électret, il est un ami qui ne cache rien nous."

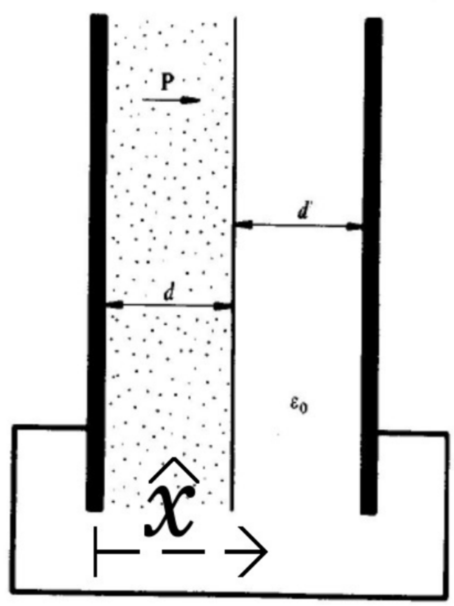
- C. Baudelaire

Supongan que dispongo de una placa de dieléctrico, de espesor d y superficie S, que está polarizada con una polarización uniforme $\vec{P}$. A esta placa la ubico entre dos láminas conductoras unidas entre sí por un conductor, como se ve en la figura ¿Cómo puedo hacer para hallar los valores de los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ correspondientes a esta situación y las distintas distribuciones de carga que intervienen?



Antes de arrancar con el ejercicio en sí, voy a hacer un par de aclaraciones sobre las hipótesis de trabajo a partir de las cuales voy a resolverlo. Para empezar, en todas las cuentas voy a asumir que tanto los planos como las interfaces del electrete se tratan de planos infinitos. Esto es equivalente a decir que las dimensiones de las placas son mucho mayores que la separación entre ellas, y que los campos calculados se corresponden con los campos lejos de los bordes. La razón básica para asumir esto es que simplifica mucho las cuentas dejando, sin embargo, ver bastante de la física detrás del problema. Otro supuesto es que el conductor (que no se encuentra conectado a ninguna batería) tiene una carga total Q conocida. Tomar a esta cantidad como conocida podría parecer ilegítimo, pero luego veremos que los campos en el interior de las placas no dependen de ella, con lo cual no es una hipótesis tan fuerte.

En la figura de abajo muestro el sistema de coordenadas que voy a usar.

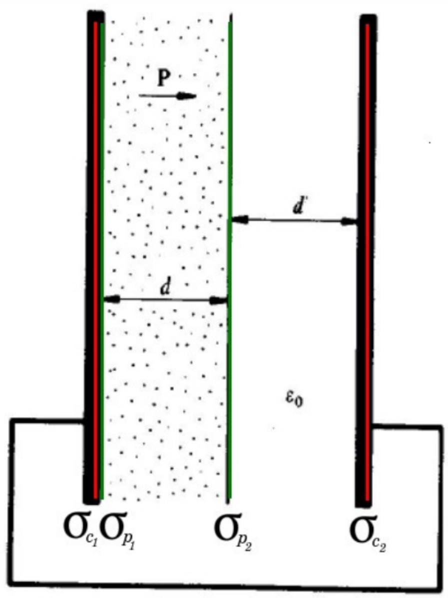


En general en los ejercicios de medio materiales, el primer paso para encararlos es reconocer las distintas fuentes de los campos a estudiar, y este problema no es una excepción. Como material de consulta sobre esto, en el libro de Feynman volumen 2 secciones 10-1 y 10-2 van a poder encontrar detallada la imagen pictórica que se suele utilizar para anticipar el comportamiento de dieléctricos lineales; mientras que en las secciones 10-3 y 10-4 hay un buen resumen sobre las distintas fuentes de los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$.

Volviendo al problema, es importante notar que el único medio material presente es el electrete, o sea, un material que tiene una polarización permanente $\vec{P}$ conocida. Esto significa que puedo calcular explícitamente cuáles son las cargas de polarización presentes en el medio ¿Cuál es el sentido de hacer esto? Al calcular las cargas de polarización, conoceré las cargas totales del problema, y de esa manera voy a poder trabajar con el campo $\vec{E}$ en vez de con el campo $\vec{D}$.

Las cargas de polarización en volumen vienen dadas por $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$, pero como la polarización del electrete es constante[1], entonces $\rho_p = 0$. Esto sólo deja entonces la posibilidad de que haya cargas de polarización superficiales en los bordes del electrete. Como las cargas de polarización en la interfaz de un medio vienen dadas por $\vec{P}\cdot\hat{n}$; en el caso del problema, sobre la interfaz en contacto con la placa conductora habrá una carga superficial de polarización $\sigma_{p_1} = P\hat{x}\cdot(-\hat{x}) = -P$, y sobre la otra interfaz una $\sigma_{p_2} = P\hat{x}\cdot\hat{x} = P$. Aparte de las cargas de polarización, el campo eléctrico tendrá como fuentes a las cargas libres inducidas sobre ambas placas del conductor (σ_{c_1} y σ_{c_2}), que por las simetrías del problema sé que serán planos infinitos de densidades constantes.

En la figura de abajo presento un diagrama del problema en donde ubico las fuentes del campo eléctrico que mencioné arriba.



El campo en el interior de las placas es entonces la suma de los campos producidos por estos cuatro planos de carga. Utilizando la expresión para el campo generado por un plano infinito de carga homogénea, obtengo que

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_{\sigma_{c_1}} + \vec{E}_{\sigma_{p_1}} + \vec{E}_{\sigma_{p_2}} + \vec{E}_{\sigma_{c_2}} = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\sigma_{c_1} - \sigma_{c_2} - 2P\right)\hat{x}, & 0 < x \leq d \\ \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\sigma_{c_1} - \sigma_{c_2}\right)\hat{x}, & d < x < d' + d \end{cases} \tag{1}$$

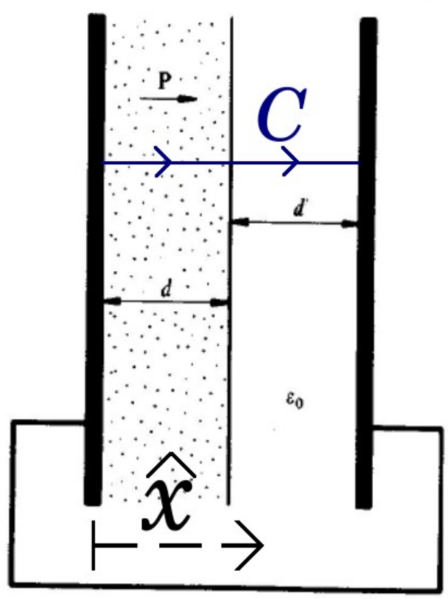
Vale aclarar que de los cuatro planos de carga que aparecen en esta expresión, sólo conozco explícitamente a dos: σ_{p_1} y σ_{p_2} ¿Cuáles serán entonces las cargas inducidas sobres las placas del conductor? Las densidades de carga que se induzcan sobre estas placas tendrán que asegurar que se cumplan dos condiciones:

[1] Ojo con esto: es contante en versores cartesianos (que son versores constantes). Campos del estilo $\vec{P} = P_o\hat{r}$ no tienen necesariamente divergencia nula ya que el verson $\hat{r}$ es distinto en distintos puntos del espacio.

1. Que ambas placas se encuentren a un mismo potencial (ya que se encuentran conectadas por medio de un cable).

2. Que la suma total de las cargas en ambas placas sea igual a la carga total Q del conductor.

Como la variación del potencial entre un punto a y uno b es igual al trabajo que toma llevar a una carga de a hasta b, para que se cumpla la condición 1 basta con que pida que el trabajo que requiere llevar a una carga desde una de las placas hasta la otra sea nulo. Si se lleva a la carga por el camino C que se muestra en la figura de abajo,



entonces el trabajo que requiere hacer esto vendrá dado por

$$
\begin{aligned}
W_{c_1-c_2} &= \int_0^{d+d'} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\
&= \int_0^{d+d'} \left(\vec{E}_{c_1} + \vec{E}_{p_1} + \vec{E}_{p_2} + \vec{E}_{c_2} \right) \cdot \hat{x} dx \\
&= \int_0^{d+d'} \frac{\sigma_{c1}}{2\epsilon_0} dx - \int_0^{d+d'} \frac{P}{2\epsilon_0} dx + \left(- \int_0^d \frac{P}{2\epsilon_0} dx + \int_d^{d+d'} \frac{P}{2\epsilon_0} dx \right) - \int_0^{d+d'} \frac{\sigma_{c2}}{2\epsilon_0} dx \\
&= \frac{\sigma_{c_1} - \sigma_{c_2}}{2\epsilon_0} (d + d') - \frac{P}{\epsilon_0} d
\end{aligned}
$$

Entre paréntesis, en la anteúltima igualdad, se encuentra el término de trabajo correspondiente a la fuerza producida por el plano de carga σ_{p2}; este término debe partirse en dos integrales ya que la fuerza en posiciones a la izquierda del plano apunta en $-\hat{x}$ mientras que en posiciones a la derecha del mismo, lo hace en $\hat{x}$. Este resultado implica que

$$
\sigma_{c_1} - \sigma_{c_2} = \frac{2P\ d}{(d + d')} \tag{2}
$$

Entonces, para obtener el campo $\vec{E}$ sólo me falta reemplazar (2) en (1), de lo cual resulta

$$\boxed{\vec{E}(x) = \begin{cases} \frac{-P\ d'}{\epsilon_0(d+d')}\hat{x}, & 0 < x \leq d \\ \frac{P\ d}{\epsilon_0(d+d')}\hat{x}, & d < x < d' + d \end{cases}} \tag{3}$$

Una vez calculado $\vec{E}$, como conozco a $\vec{P}$ en todo el espacio, puedo obtener $\vec{D}$ directamente a partir de su definición como

$$\boxed{\vec{D} = \begin{cases} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, & 0 < x < d \\ \epsilon_0\vec{E}, & d < x < d' + d \end{cases} = \frac{P\ d}{(d+d')}\hat{x}} \tag{4}$$

¡O sea que el desplazamiento eléctrico es un campo constante dentro de las placas! ¿Es este resultado razonable? Durante todo el ejercicio me concentré por una cuestión de comodidad en $\vec{E}$, y no me detuve a discutir demasiado sobre qué pasaba con $\vec{D}$. Analicemos un poco la situación. Como el campo $\vec{D}$ tiene como fuentes sólo a las cargas libres[2], este va a "ver" únicamente a las cargas inducidas en las placas del conductor. Esto es, el campo $\vec{D}$, de estar bien hechos los cálculos, debería ser el generado por estas dos distribuciones (σ_{c_1} y σ_{c_2}). Lo cual es coherente con el resultado que obtuve, ya que el campo entre dos planos infinitos de densidad de carga distinta pero constante es un campo constante.

Es interesante notar que las expresiones a las que llegué tanto para el campo $\vec{E}$ como para $\vec{D}$, no dependen de la carga total Q del conductor. Esto no es casualidad, sino que está íntimamente relacionado a cómo se distribuyen las cargas dentro de un conductor para anular el campo en su interior. Al final del ejercicio incluyo una discusión breve sobre esto. Lo hago en una sección aparte para no perder el hilo del ejercicio.

Recién calculé las expresiones correspondientes a los campos entre las placas del conductor, pero lo hice sin calcular explícitamente cuánto valen las cargas inducidas sobre cada placa. Rebobinando un poco la película, recordemos que había dicho que las densidades de carga inducidas en las placas debían cumplir dos condiciones. Pero de estas condiciones sólo utilicé la primera, de la cual deduje la relación (2). Utilizando la condición 2 (que me dice que independientemente de cómo se distribuyan las cargas en el conductor, deben conservarse y ser iguales a Q), obtengo entonces que

$$(\sigma_{c_1} + \sigma_{c_2})\, S = Q \tag{5}$$

En donde S es el área de las placas, que es dato. Finalmente, si combino las ecuaciones (2) y (5) puedo despejar las densidades de cargas inducidas

$$\boxed{\sigma_{c_1} = \frac{Q}{2S} + \frac{P\ d}{(d+d')}, \quad \sigma_{c_2} = \frac{Q}{2S} - \frac{P\ d}{(d+d')}} \tag{6}$$

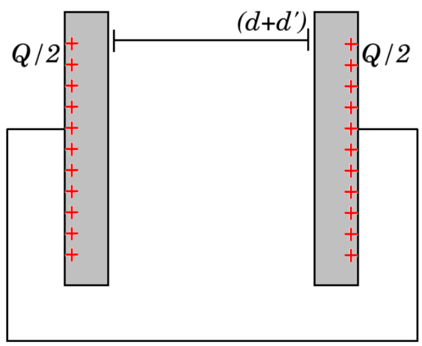
Habiendo calculado esto, conozco entonces todas las densidades de carga del problema.

[2] Recordemos que el campo $\vec{D}$ en electrostática (donde el rotor de $\vec{E}$ es nulo), es determinado únicamente por las cargas libres sólo cuando el rotor de $\vec{P}$ es (también) nulo. Pero nos encontramos en una situación en donde eso se cumple.

Comentario sobre la inducción de cargas en el conductor

En la sección 2.5 del Griffiths hay una discusión muy buena sobre los conductores y sus propiedades. Si pueden, léanla. A partir de estas propiedades, uno se genera una intuición de cómo responden estos ante distintas circunstancias. En el caso que acabo de analizar, nos pueden servir para darnos una idea intuitiva de por qué los campos calculados no dependen de la carga total Q del conductor.

Veamos cómo es esto. Si se miran de cerca las paredes de las placas, estas tendrán cierto espesor. Como ilustro en la figura que sigue, antes de introducir el electrete, la carga total del conductor se encuentra repartida en las caras exteriores de ambas placas (de tal forma que el campo dentro de ellos sea nulo).



Al colocar el electrete, se redistribuyen cargas en las caras internas (de tal manera que los potenciales de ambas placas sigan siendo los mismos) y se inducen las distribuciones que calculé antes, como se muestra en la figura de abajo. Pero la carga Q sigue encontrándose la mitad en cada una de las caras externas (lo cual es fácil de ver usando Gauss). Y como el campo entre dos planos cargados con una misma densidad es nulo, esto significa que la carga Q no está generando ningún campo en el interior de las placas. Es esta la razón por la cual los campos calculados no dependían de esta cantidad.