Distribuciones infinitas

por Manuel Sáenz

"Not only in probability theory, but in all mathematics, it is the careless use of infinite sets, and of infinite and infinitesimal quantities, that generates most paradoxes."

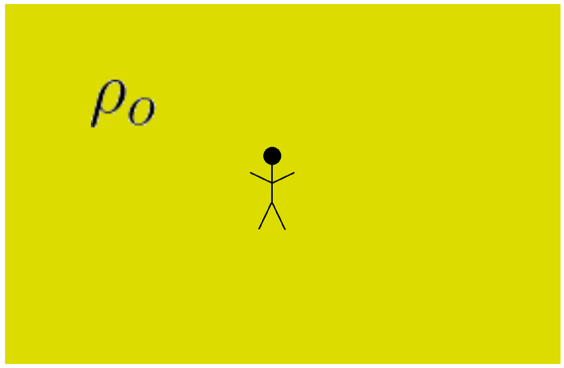
- E. T. Jaynes

"He cometido el peor error que puede ser cometido.
No he sido cuidadoso al hablar de lo infinito."

- J. L. Borges

En este apunte vamos a tratar de responder la siguiente pregunta: ¿Cuál es el campo generado por una distribución de carga uniforme que ocupa todo el espacio? Como veremos, esta pregunta así formulada no va a tener una única respuesta. Esta paradoja nos llevará entonces a tener que pensar con más cuidado qué es una distribución de carga infinita. Llegaremos entonces a la conclusión de que la pregunta que queríamos responder, así como se encontraba planteada, era incompleta.

Primero plantiemos con un poco más de cuidado la situación a analizar. Queremos encontrar el campo generado por una distribución de carga uniforme ρ_o que ocupa todo el espacio. En la figura de abajo se representa por medio del hombre de palitos al observador que siente el campo de la distribución.



Utilizando argumentos de simetría, calculemos este campo utilizando la ley de Gauss. Haremos esto de tres formas distintas y llegaremos a tres resultados que no coincidirán entre sí.

Camino 1. Dada la simetría del problema, podemos en principio estudiar el campo eléctrico en un sistema de coordenadas cartesianas. Por argumentos de simetría, podemos decir que el campo en alguna posición $\vec{r}$ no puede depender de ninguna de las tres coordenadas cartesianas (x, y, z) ya que la distribución de cargas se ve exactamente igual cuando nos desplazamos en alguna de estas direcciones. Por otro lado, al ser todas las direcciones equivalentes (no hay una dirección privilegiada), el campo en $\vec{r}$ no puede apuntar en ninguna dirección en particular. Todo esto nos lleva a concluir que $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ para cualquier posición $\vec{r}$.

Camino 2. Pero como la distribución de cargas del problema también tiene simetría esférica, podemos plantear el mismo problema en coordenadas esféricas. Dada la simetría sabemos que el campo sólo podrá depender de la coordenada r y apuntar en la dirección $\hat{r}$. Eligiendo algún centro O del sistema de coordenadas y utilizando la Ley de Gauss para superficies S esféricas concéntricas a O, llegamos a que el campo debe ser de la forma $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_o r}{3\epsilon_o}\hat{r}$. Resultado que no coincide con el anterior.

Camino 3. De la misma forma, como las cargas también tienen simetría cilíndrica, puedo resolver el problema en coordenadas polares. Dada la simetría sabemos que el campo sólo podrá depender de la coordenada ρ[1] y apuntar en la dirección $\hat{\rho}$. Fijando la posición del eje z del sistema de coordenadas y utilizando la Ley de Gauss para superficies S cilíndricas concéntricas a este eje, llegamos a que el campo debe ser de la forma $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_o \rho}{2\epsilon_o}\hat{\rho}$ ¡Resultado que tampoco coincide con ninguno de los otros dos!

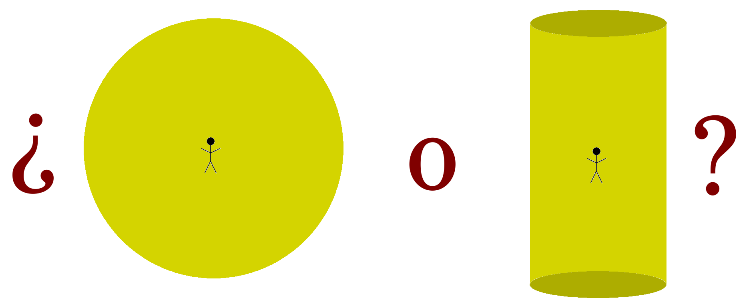
Pero ¿Qué está pasando? ¿Cómo puede ser que siguiendo tres caminos legítimos lleguemos a expresiones que no coinciden? ¿Alguna de las cuenta que hicimos recién está mal? Aunque suene extraño, no, ninguno de los tres camino está mal. No son nuestras tres respuestas las que están mal, sino que la culpa es de la pregunta que estamos queriendo responder...

Y ¿en qué sentido es la pregunta incompleta? Lo que sucede es lo siguiente: el campo de una distribución infinita es en un sentido matemático el límite del campo generado por alguna distribución finita cuando el tamaño de la distribución se va a haciendo cada vez más grande. Entonces al pedirnos calcular el campo de una distribución uniforme que ocupa todo el espacio, nos está faltando información: ¡no sabemos cuál es la distribución finita que se va agrandando hasta ocupar todo el espacio![2]

[1] Ojo, no confundir la coordenada ρ con la densidad de carga en volumen ρ_o.

[2] Una forma alternativa de pensarlo sería decir que nos falta fijar las condiciones de contorno del problema. Cuando la distribución es finita, también debemos fijarlas pero en estos casos podemos usar que las condiciones de contorno son $V = 0$ "lejos de las cargas" (condición que solemos imponer implícitamente al calcular el campo de estas distribuciones). Este tipo de condiciones de contorno no son en general válidas para distribuciones infinitas y es por ello que aparece el problema de fijar nuevas condiciones.

Analicemos esto mejor comparando los resultados del camino 2 y 3. En definitiva, si tuviéramos que interpretar los campos que obtenemos en ambos caminos, lo podríamos hacer de la siguiente manera. El campo que obtenemos siguiendo el camino 2 es el campo resultante de tomar una esfera cargada uniformemente en volumen cuyo radio "es infinito" (o sea, muy grande comparado con las posiciones en las que evaluamos el campo). Por otro lado, el campo que obtenemos siguiendo el camino 3 es el campo resultante de tomar un cilindro cargado uniformemente en volumen cuyo radio y altura "son infinitos". En definitiva, la paradoja se produjo porque no sabíamos si nuestra distribución se correspondía con una esféra o un cilindro muy grande.



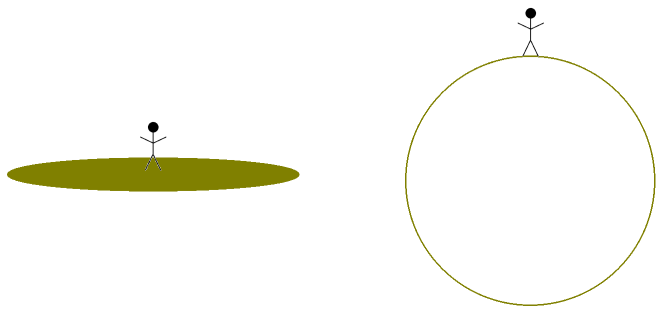
Perfecto. Entonces, si hubiéramos tenido más cuidado al plantear el problema, no hubiera habido ninguna ambigüedad. Pero ¿es esto algo particular de la distribución de este problema? La respuesta es que no, situaciones similares se pueden construir con cualquier distribución infinita...

Otro ejemplo simple se puede ver con el campo generado por un plano infinito. Lo más probable es que ya hayan calculado el campo de un plano infinito cargado con una densidad superficial σ_o. Si lo hicieron, seguramente hayan llegado a la expresión de $\vec{E}_{\sigma_o}(\vec{r}) = \frac{\text{sgn}(z)\sigma_o}{2\epsilon_o}\hat{z}$. Esta expresión está bien para algunos casos y mal para otros. Si pensáramos que la distribución del plano infinito es generada por un disco de carga que se hace cada vez más grande, entonces sería la expresión correcta. Sin embargo, si pensamos que la distribución de carga infinita del plano es generada por una esfera hueca de densidad de carga superficial constante, entonces el campo correspondiente sería

$$\vec{E}_{\sigma_o}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma_o}{\epsilon_o}\hat{z}, & \text{si } z > 0 \\ \hat{0}, & \text{si } z < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Es decir, de un lado del plano habría campo y del otro lado no[3].

[3] Notar que se sigue respetando que el salto del campo es igual a $\frac{\sigma_o}{\epsilon_o}$ al atravesar el plano.



Normalmente, el momento de la deducción en que descartamos esta situación cuando calculamos el campo de un plano infinito es cuando estamos usando la Ley de Gauss y decimos que el campo tiene simetría especular con respecto al plano de $z = 0$ (lo cual implica que $\vec{E}_{\sigma_o}(z) = -\vec{E}_{\sigma_o}(-z)$). Esto sólo es cierto cuando la distribución del plano infinito viene de una distribución finita que tiene esta propiedad. Es decir, al afirmar que el problema tiene simetría especular, descartamos la solución (1) y nos quedamos con la solución conocida: $\vec{E}_{\sigma_o}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{sgn}(z)\sigma_o}{2\epsilon_o}\hat{z}$.

Conclusión. Las distribuciones infinitas son (en un sentido) más complejas que sus contrapartes finitas. Cuando tengamos situaciones en donde hay alguna distribución infinita presente, no nos bastará con conocer la distribución de carga en el espacio $\rho(\vec{r})$ sino que además deberemos saber de qué distribución finita es límite. Sin embargo ¡no se compliquen la vida! Siempre que la situación sea clara en sí misma, no será necesario ser tan puntilloso. Si no hay ambigüedad, no nos vamos a poner tan detallistas...