Dos caminos alternativos hacia el plano regordete

por Manuel Sáenz

¿Qué queremos resolver? Supongan que nos interesa encontrar el campo eléctrico en todo el espacio $\vec{E}(\vec{r})$ generado por un plano infinito de grosor d y densidad en volumen ρ_o. El objetivo de estas notas es mostrar que uno puede responder esta pregunta por dos vías alternativas y llegar al mismo resultado: lo puede hacer usando la ley de Gauss o recordando cuál es el campo generado por un plano infinito (sin grosor) y haciendo una superposición apropiada.

Por ley de Gauss. Primero encontremos el campo buscado utilizando la ley de Gauss. Por argumentos de simetría idénticos a los utilizados para calcular el campo de un plano sin grosor, tenemos que:

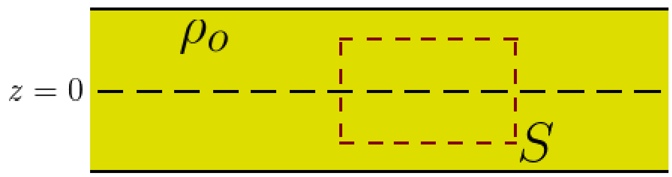
$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{z}$$

Es decir, el campo sólo dependerá de la coordenada z y sólo tendrá componente en $\hat{z}$. Las superficies de Gauss S que nos permitirán calcular el campo en esta situación son las mismas que nos sirvieron para el caso del plano infinito sin grosor: prismas de base cuadrada de lado l[1] y de altura $2z$. Al igual que en este caso, a los prismas los ubicaremos de simétricamente alrededor de $z = 0$ de tal forma que el campo sobre la tapa superior e inferior cumpla que $\vec{E}(\text{Tapa superior}) = -\vec{E}(\text{Tapa inferior})$, por la simetría del problema.

La única diferencia con el caso del plano infinito sin grosor es que ahora deberemos distinguir dos casos en los cuales tendremos que calcular la carga encerrada por la superficie S: cuando $|z| < d/2$ y cuando $|z| > d/2$.

Cuando $|z| < d/2$, la carga encerrada por S será igual al volumen del prisma encerrado por S veces la densidad de carga ρ_o. Esto es así, porque como se puede ver en la figura, en este caso todo el interior de S se encontrará lleno de carga según esta densidad volumétrica. Obtendremos entonces que $\frac{Q_{enc}}{\epsilon_o} = \frac{2l^2 z\rho_o}{\epsilon_o}$.

[1] Recordemos que el tomar a la base del prisma como cuadrada no es necesario. En principio podría ser un prisma de base arbitraria. Sin embargo, tomarla cuadrada simplifica la representación gráfica del problema.



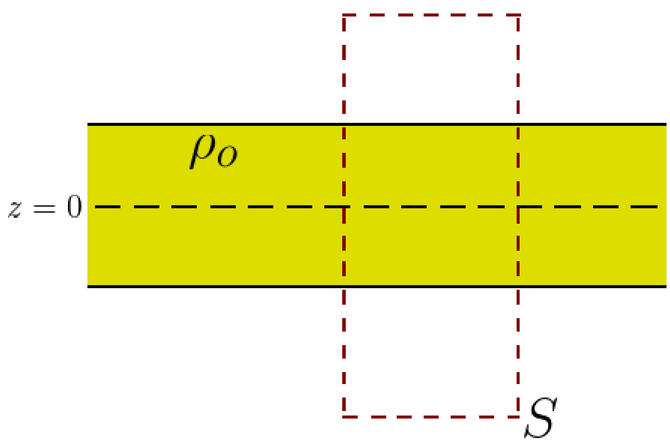
Por otro lado, la ley de Gauss nos dice que:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = 2E(z)l^2 = \frac{2l^2 z\rho_o}{\epsilon_o}$$

O sea que el campo cuando $|z| < d/2$ vendrá dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{z\rho_o}{\epsilon_o}\hat{z}$$

Pero cuando $|z| > d/2$, como se puede ver en la figura de abajo, la cantidad de carga encerrada por S será independiente de su altura y será siempre igual a $Q_{enc} = l^2 d\rho_o$.



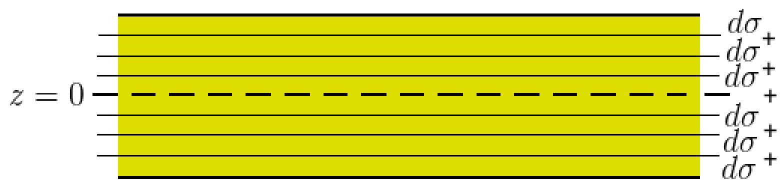
Por la ley de Gauss tendremos que en este caso el campo vendrá dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathrm{sgn}(z)\frac{\rho_o d}{2\epsilon_o}\hat{z}$$

Que es el mismo campo que el de un plano infinito sin grosor con densidad superficial de carga $\rho_o d$. Esto significa que afuera del plano “veremos lo mismo que si hubiera un plano sin grosor concentrado en $z = 0$". Esto es muy parecido a lo que sucede con una esfera cargada en volumen.

Por superposición. Ahora intentemos llegar al mismo resultado pero por un camino distinto. Lo que vamos a hacer es pensar al plano con grosor como muchos planos sin grosor[2], uno arriba del otro. De esta manera, el campo buscado será superposición de los campos generados por estos. Como ya conocemos el campo que generan los planos sin grosor ($\vec{E}_{z_o}(\vec{r}) = \text{sgn}(z - z_o)\frac{\sigma}{2\epsilon_o}\hat{z}$, si se ubica en z_o), sólo tendremos que calcular la suma de ellos y listo.

La idea intuitiva será pensar al plano como una suma de planos con una densidad superficial de carga "chiquita" de valor $d\sigma$, tal como se muestra en la figura de abajo.



Para seguir por este camino, lo primero que nos tendremos que responder es ¿cuánto vale $d\sigma$? Una forma simple de pensarlo es la siguiente. Imaginemos que partimos al plano grueso en muchos planos finitos de grosor dz. Si hacemos esto, entonces cada uno de estos planos finitos contendrá una cantidad de carga $\rho_o dz$ por unidad de área[3]. Entonces como la altura dz de estos planos será un diferencial, los podremos pensar como planos de densidad superficial de carga $d\sigma = \rho_o dz$.

Si tuviéramos que superponer los campos $\vec{E}_i$ generados por cierta cantidad finita de distribuciones de carga ρ_i, el campo total sería entonces la suma de los campos individuales:

$$\vec{E}_{total} = \sum_i \vec{E}_i$$

Nuestro caso será completamente análogo, pero como estamos sumando infinitos campos infinitesimales la suma pasará a ser una integral, quedando:

[2] Mas bien, los vamos a pensar como planos muy delgados, tanto que los podremos aproximar como planos sin grosor sin cometer error.

[3] Si tenemos un área A, la carga que hay en un cacho A de alguno de los planos finitos será el área (A) multiplicada por su altura (dz) y por la densidad de carga (ρ_o). El valor por unidad de área lo obtenemos dividiendo esto por A.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{-d/2}^{d/2} \vec{E}_{d\sigma(z')} dz' \tag{1}$$

donde con $\vec{E}_{d\sigma(z')}$ simbolizamos el campo generado por el plano finito que pasa por z'. Ahora sólo nos falta decir cuál es $\vec{E}_{d\sigma(z')}$ e integrar. Pero este campo será el campo generado por un plano sin grosor y de densidad superficial $\rho_o dz$, con lo cual sabemos que en módulo $E_{d\sigma(z')} = \frac{\rho_o dz}{2\epsilon_o}$. Acá hay una sutileza: si $z > z'$, entonces $\vec{E}_{d\sigma(z')}$ apuntará en el sentido de $\hat{z}$; y si $z < z'$, en el sentido de $(-\hat{z})$ ¿Cómo hacemos para reflejar esto en la integral?

Para incorporar el sentido del campo, debemos analizar por separado tres casos. En primer lugar, qué pasa cuando la posición del campo que estamos calculando cae dentro del plano de carga ($-d/2 < z < d/2$). En este caso, tendremos que partir la integral de (1) en dos partes:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\int_{-d/2}^{z} \frac{\rho_o}{2\epsilon_o} dz' - \int_{z}^{d/2} \frac{\rho_o}{2\epsilon_o} dz' \right) \hat{z} \tag{2}$$

En la primera de las integrales sumamos todos los planos que estén por debajo del lugar en donde estamos calculando el campo (que tiene altura z); y en la segunda, todos los que estén por arriba. Como los planos que estén por arriba generarán un campo que apunta hacia abajo, la segunda de las integrales de (2) tiene un signo negativo adelante.

Por último, integrando obtenemos entonces que para $-d/2 < z < d/2$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_o z}{\epsilon_o} \hat{z} \tag{3}$$

Los otros dos casos que quedan por analizar son los casos en que el punto del campo que estamos mirando está completamente por encima ($z > d/2$) o completamente por debajo ($z < -d/2$) del plano con carga. Estos dos casos serán más sencillos ya que la dirección del campo de todos los planos finitos será la misma, con lo cual no será necesario partir la integral. Quedan entonces de ejercicio.

Conclusión. Es importante señalar que ambos caminos son equivalentes y que usar uno u otro será decisión personal de cada uno. En general, la mayoría de los ejercicios saldrán a nivel cuentas más rápido aplicando la ley de Gauss (siempre que esto sea posible). Sin embargo, hay casos en donde pensar una distribución de carga en volumen como una superposición de muchas densidades superficiales infinitesimales será útil para anticipar la solución (antes de hacer las cuentas) o para predecir algunas de sus propiedades cualitativas. Por ejemplo, en el caso que discutimos acá, pensándolo con superposición podríamos haber anticipado que por fuera de la zona en donde hay cargas el campo debería ser constante.