Física 3-Guía 2

Cátedra Grecco

Clase 1

Andrea Buccino

Comentario del ejercicio 1.13

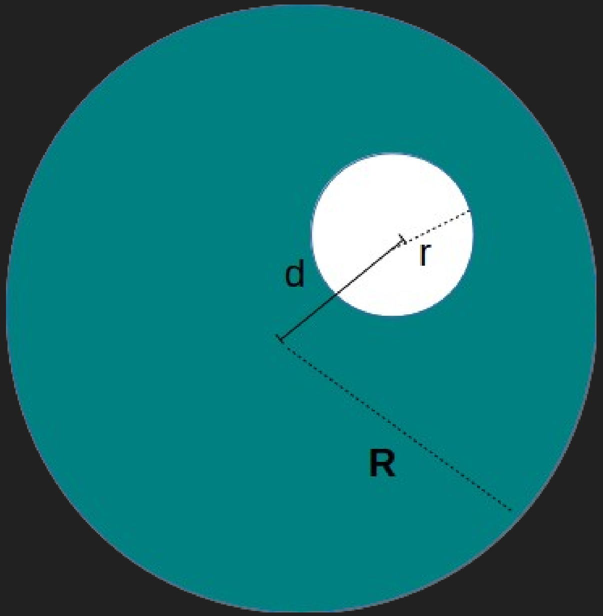
13. • Una esfera de radio R, cargada uniformemente con densidad ρ, posee un agujero esférico de radio r en su interior. El centro del agujero está a una distancia $d < (R - r)$ del centro de la esfera. Obtenga el valor del campo eléctrico sobre el eje de simetría de la configuración. Verifique que en el centro del agujero el valor del campo es el mismo que habría si no se hubiera practicado el agujero.

Este ejercicio integra la aplicación del Principio de Superposición y la aplicación de la Ley de Gauss, conocimientos explorados en la Guía 1.

13. • Una esfera de radio R, cargada uniformemente con densidad ρ, posee un agujero esférico de radio r en su interior. El centro del agujero está a una distancia $d < (R - r)$ del centro de la esfera. Obtenga el valor del campo eléctrico sobre el eje de simetría de la configuración. Verifique que en el centro del agujero el valor del campo es el mismo que habría si no se hubiera practicado el agujero.

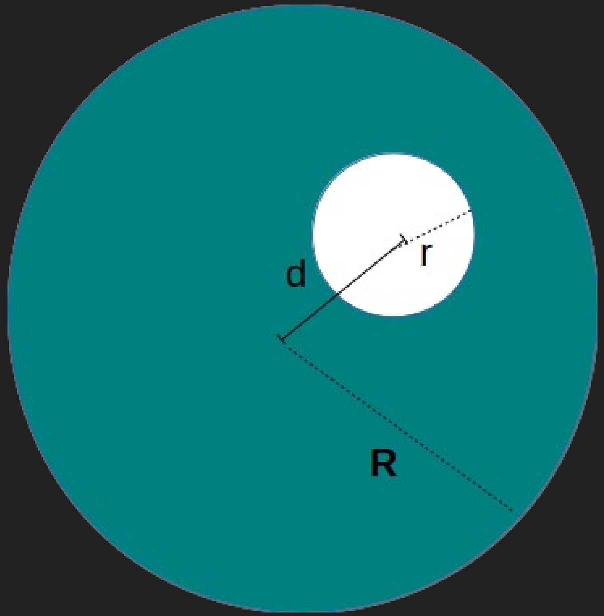
El problema me plantea obtener el campo eléctrico en ele eje de simetría de la configuración.

Para eso me planteo qué simetrías tenemos y por ende qué sistema de coordenadas elegimos.



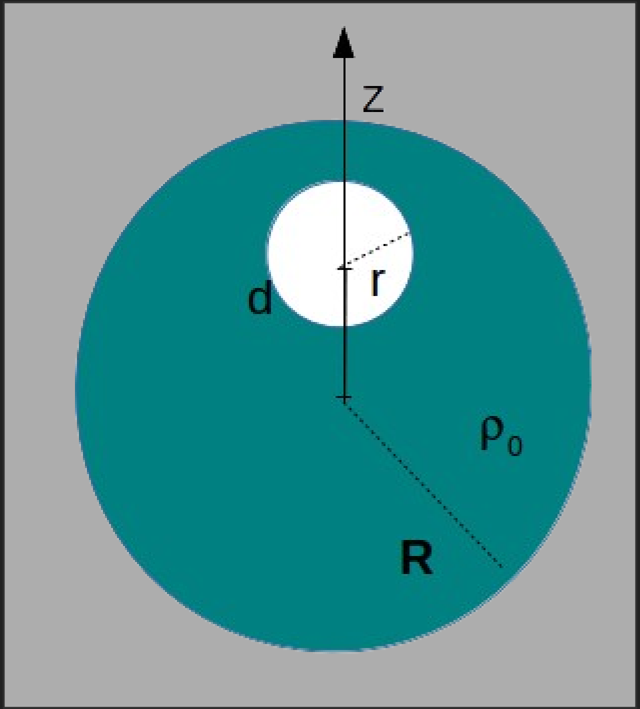
Se puede ver que el problema tiene simetría de rotación en torno al eje que une los dos centros de las esferas.

Por lo tanto conviene elegir el eje z coincidente con esa dirección.



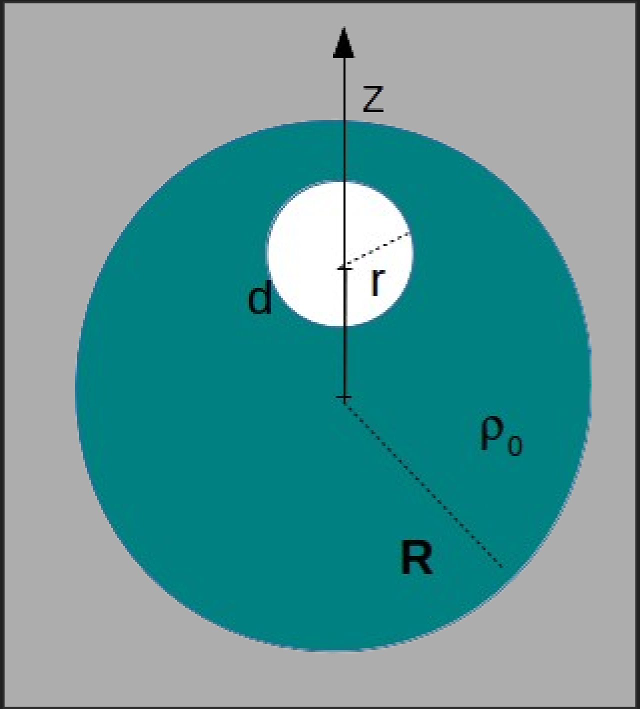
Se puede ver que el problema tiene simetría de rotación en torno al eje que une los dos centros de las esferas.

Por lo tanto conviene elegir el eje z coincidente con esa dirección.



¿Cómo resolvemos este problema?

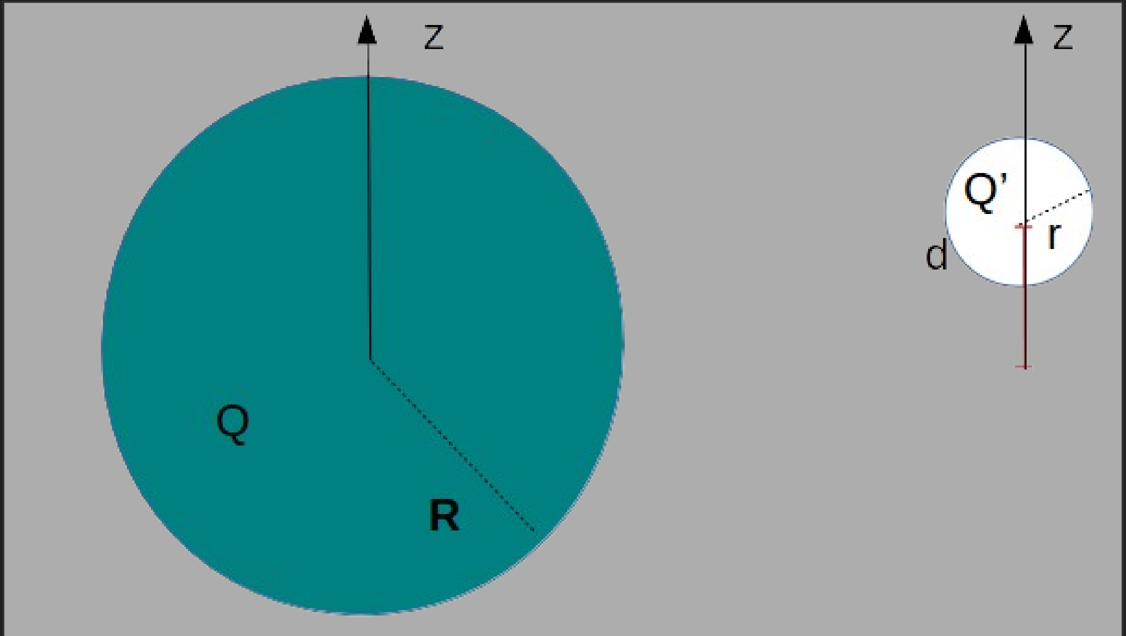
Podemos calcular el campo por definición pero sería un poco" cuentoso" o podemos utilizar resultados previos, ya que en realidad tenemos 2 esferas.



¿Cómo pensamos el agujero?

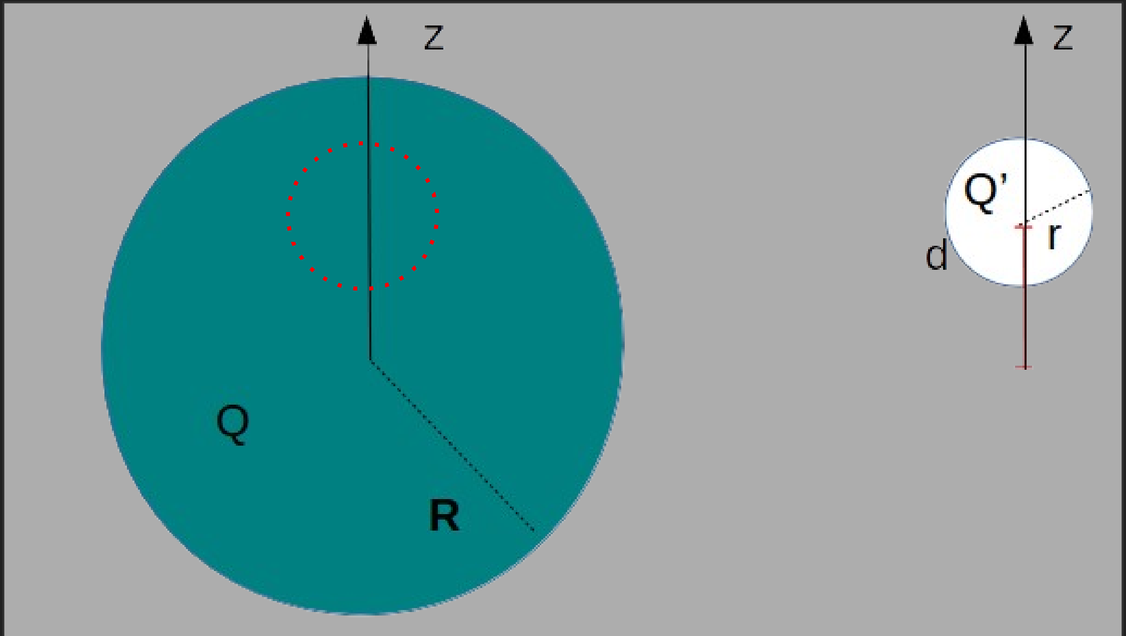
¿Cómo pensamos el agujero?

Podemos pensar como una superposición de 2 esferas de diferentes carga Q y Q'. De manera que al sumar Q y Q' en la esfera se debe cumplir que adentro de esfera chica la carga sea nula.



Es decir Q+Q’=0 dentro de la esfera chica.

¿ cuál es la carga que encierra la esfera roja punteada?

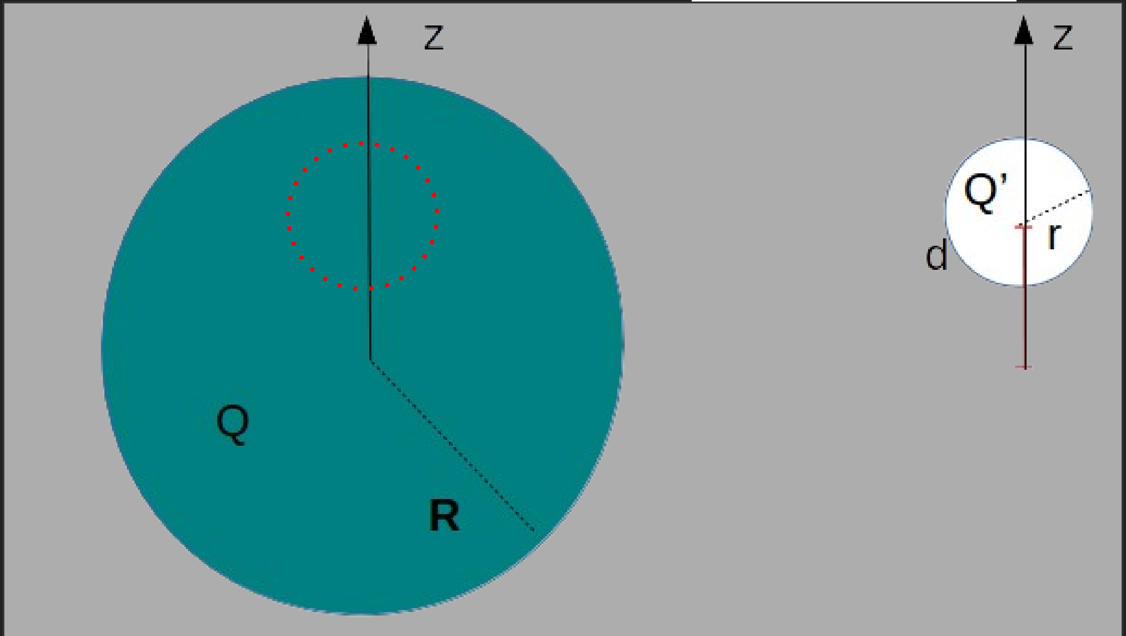


Es decir Q+Q’=0 dentro de la esfera chica.

¿ cuál es la carga que encierra la esfera roja punteada?

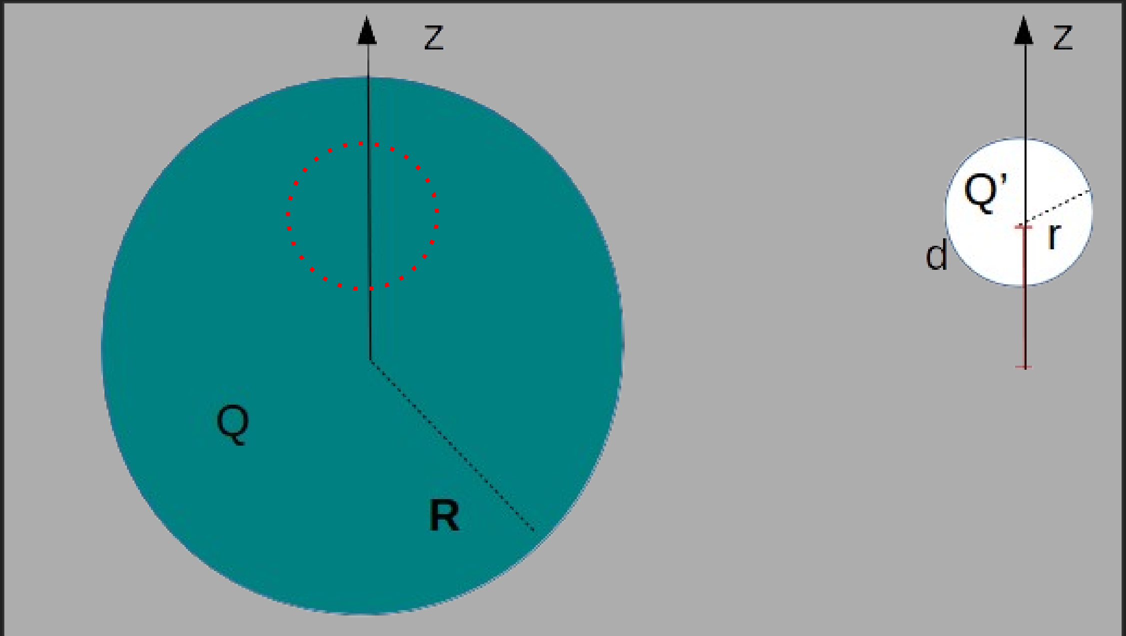
Como la distribución e de carga es uniforme...

$$Q_{rojo} = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_0$$



Entonces $Q_{rojo}+Q'=0$.

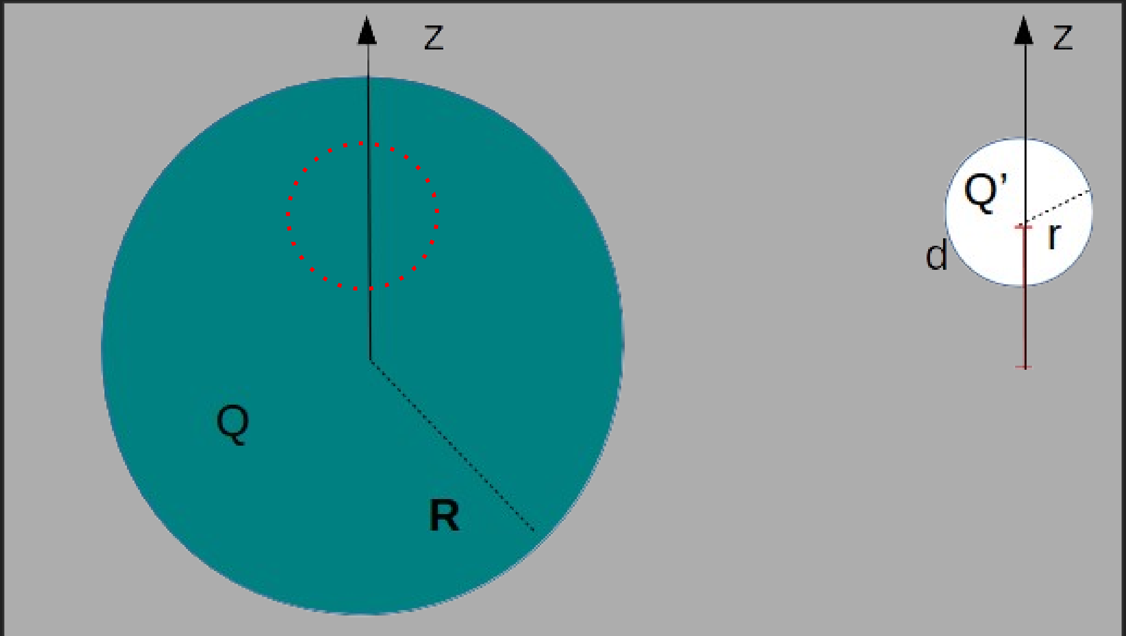
De acá sale que ...



Entonces $Q_{rojo}+Q'=0$.

De acá sale que ...

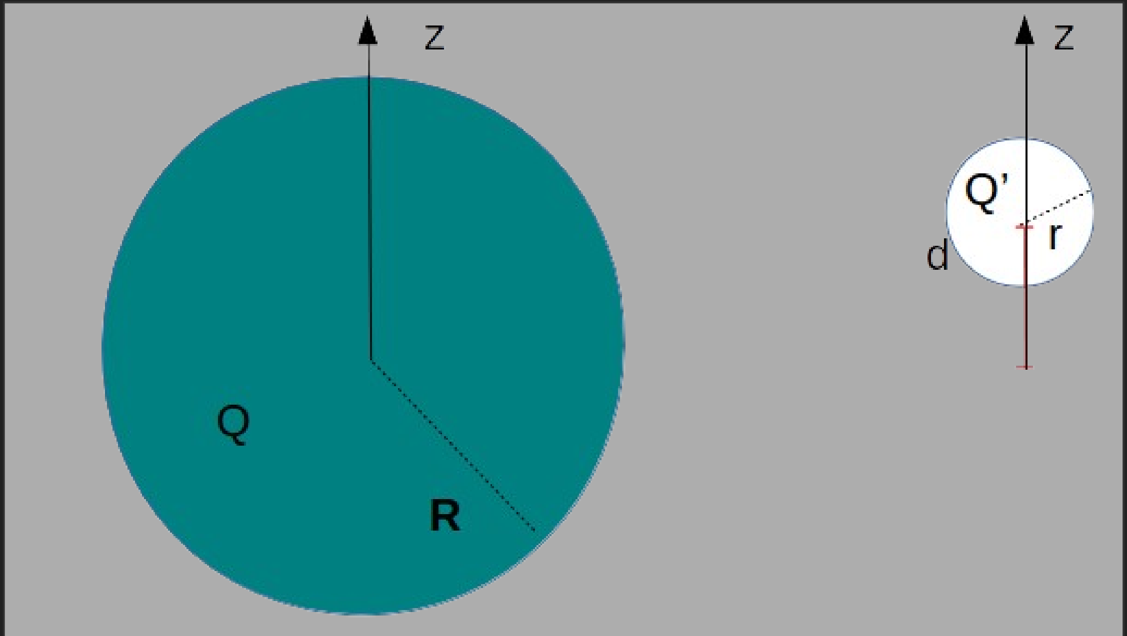
$$Q' = -\frac{4\pi r^3}{3}\rho_0$$



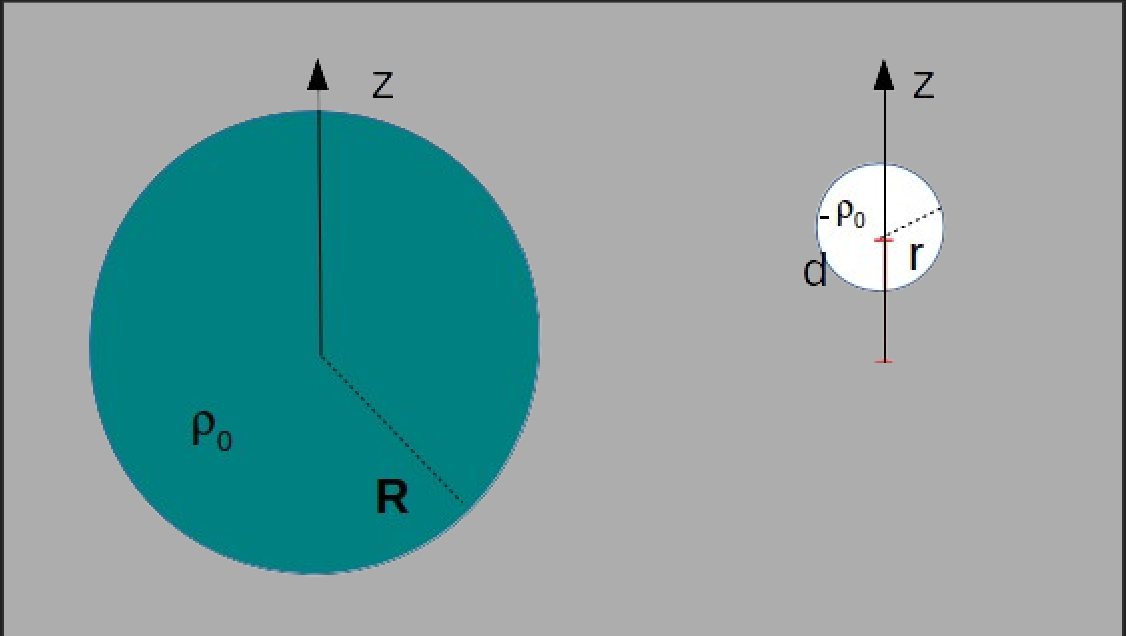
Entonces debo obtener el campo de 2 esferas, una en el centro (grande) y la otr descentrada con cargas Q y Q’-

$$Q = \frac{4\pi R^3}{3}\rho_0$$

$$Q' = -\frac{4\pi r^3}{3}\rho_0$$

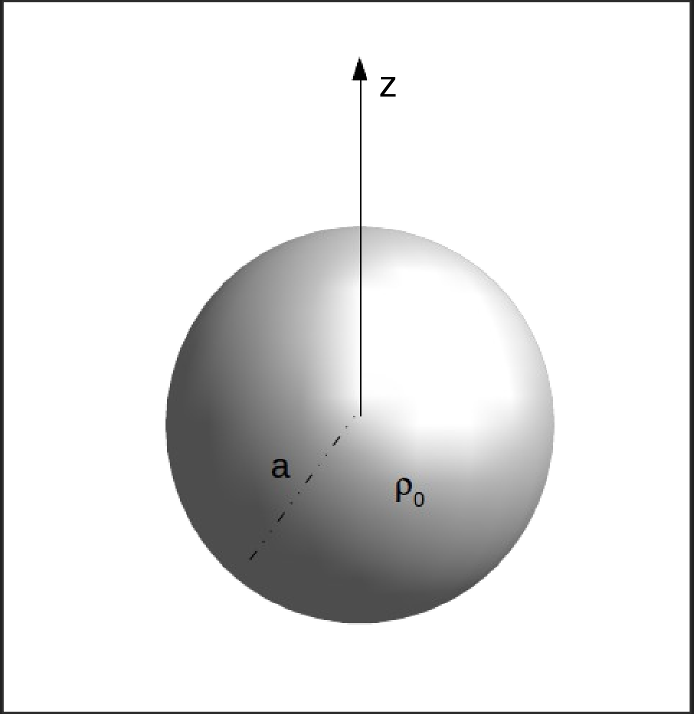


Como las distribuciones de carga son uniformes es equivalente a pensar en este problemas de dos esferas de densidad uniforme como indica la figura.



Ahora bien…

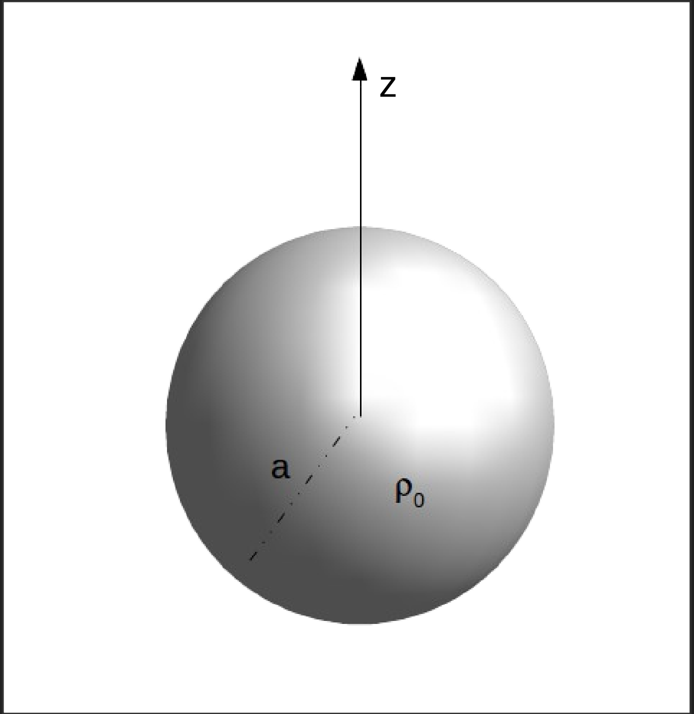
¿Cómo calculamos el campo de una esfera cargada uniformemente en volumen?



-

Ahora bien…

¿Cómo calculamos el campo de una esfera cargada uniformemente en volumen?

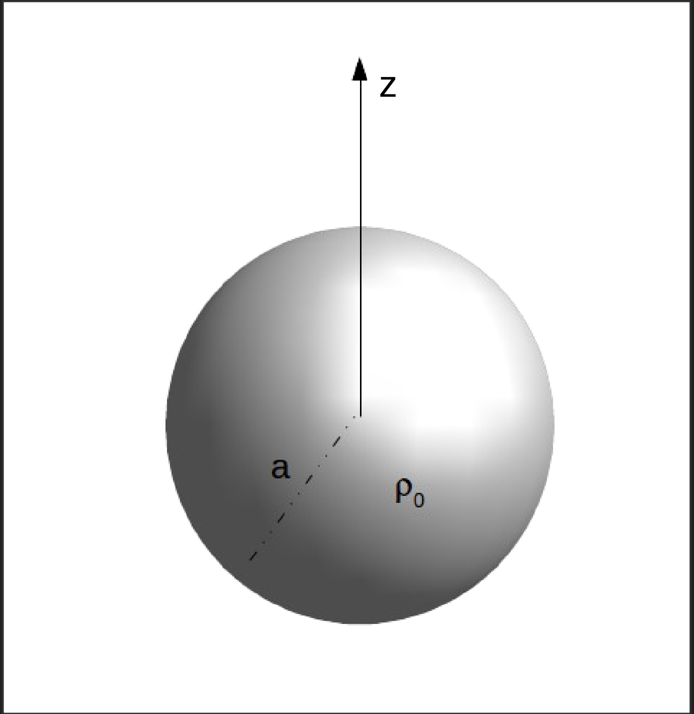


Dada que la distribución de carga es uniforme, el campo tiene simetría esférica.

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Ahora bien…

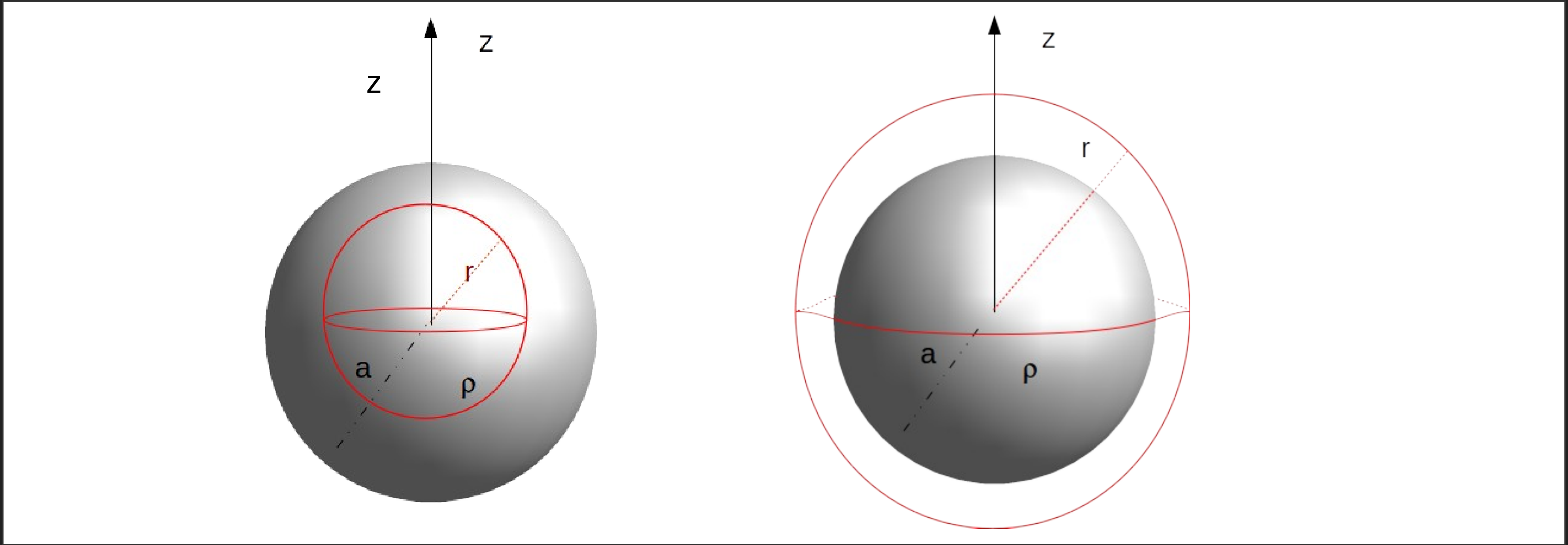
¿Cómo calculamos el campo de una esfera cargada uniformemente en volumen?



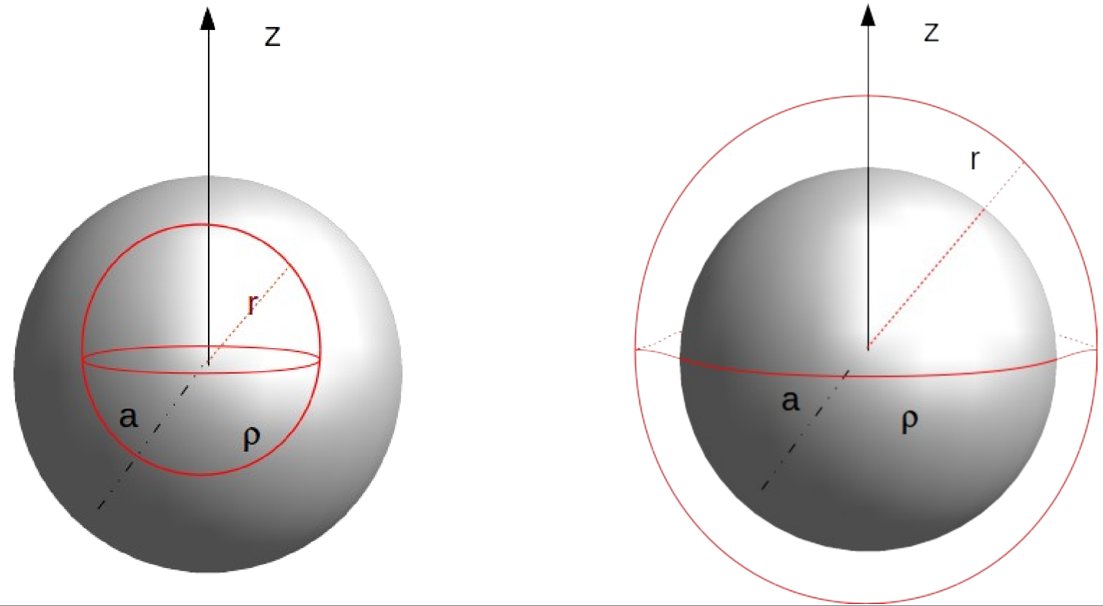
Dada que la distribución de carga es uniforme, el campo tiene simetría esférica.

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

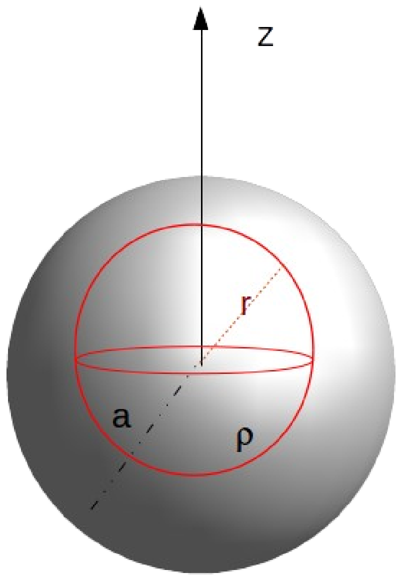
La mejor superficie será un casquete esférico pero debo tener en cuanta que hay carga en volumen y por lo tanto debo calcular el flujo tanto dentro como fuera de la distribución

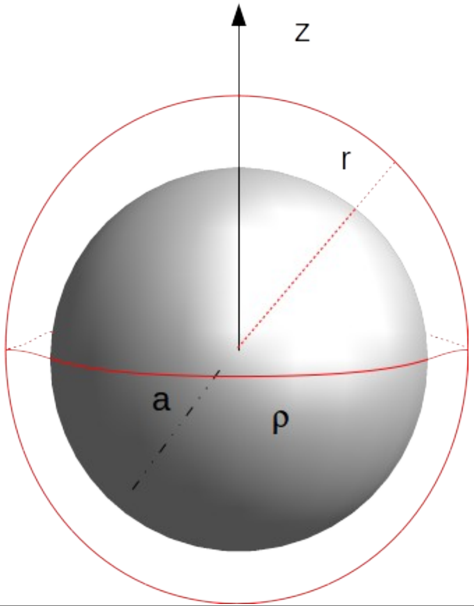


$$E(r)4\pi r^2 = \begin{cases} \dfrac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} & \text{si } r < a \\ \\ \dfrac{4\pi a^3 \rho}{3\varepsilon_0} & \text{si } a < r \end{cases}$$



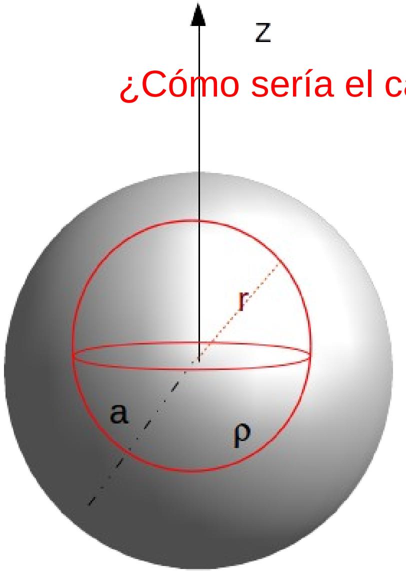
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{r\rho}{3\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } r < a \\ \\ \dfrac{a^3\rho}{3r^2\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } a < r \end{cases}$$

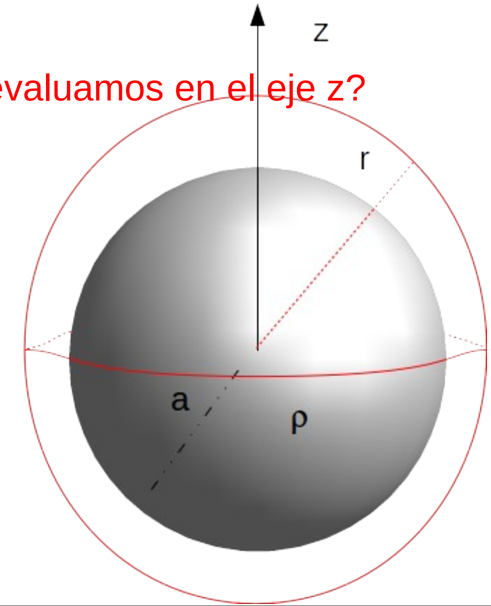




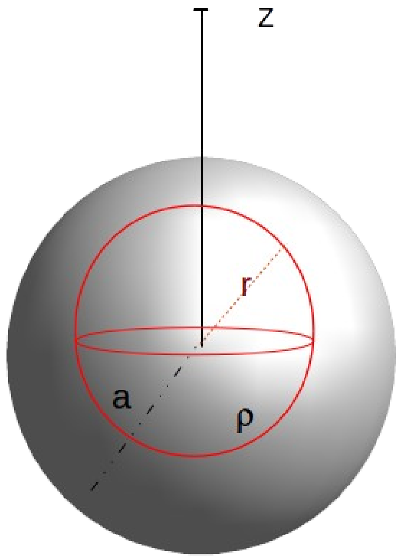
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{r\rho}{3\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } r < a \\[2em] \dfrac{a^3\rho}{3r^2\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } a < r \end{cases}$$

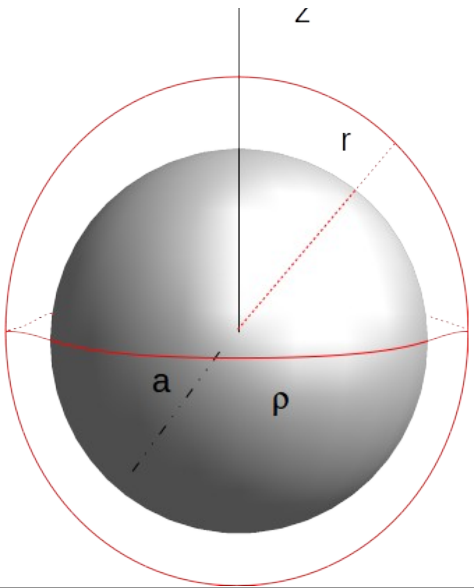
¿Cómo sería el campo si lo evaluamos en el eje z?



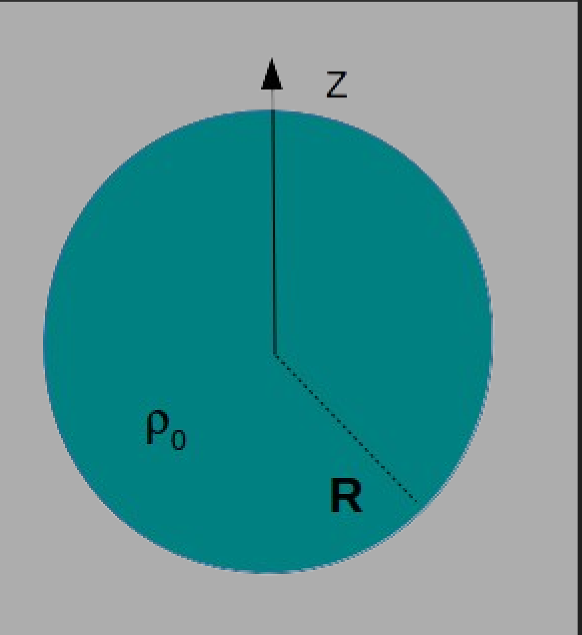


$$\vec{E}(z\hat{z}) = \begin{cases} \dfrac{z\rho}{3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } |z| < a \\ \\ \dfrac{a^3 z\rho}{3|z|^3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } a < |z| \end{cases}$$





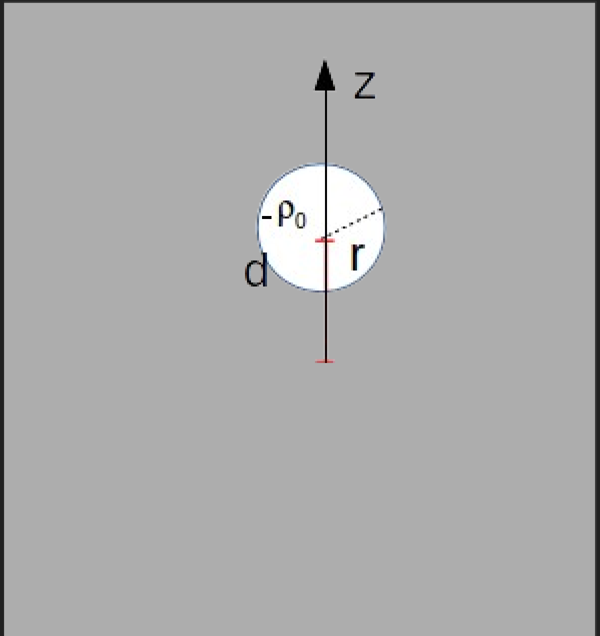
Entonces en este caso podemos decir que el campo sobre el eje z generado por la esfera grande es



$$\vec{E}_{Esf\ Grande}(z\hat{z}) = \begin{cases} \frac{z\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } |z| < R \\ \\ \frac{R^3 z\rho_0}{3|z|^3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } R < |z| \end{cases}$$

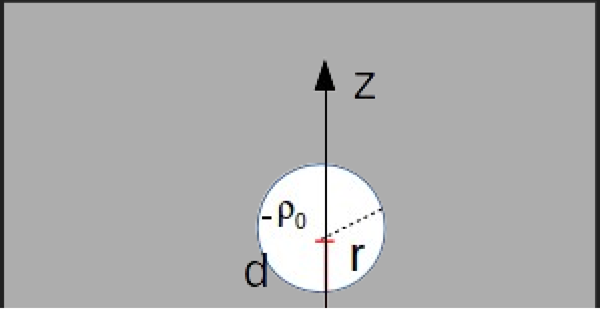
En el caso de la esfera chica debemos tener en cuenta que no está centrada en el origen y por lo tanto:

$$z \to z - d$$



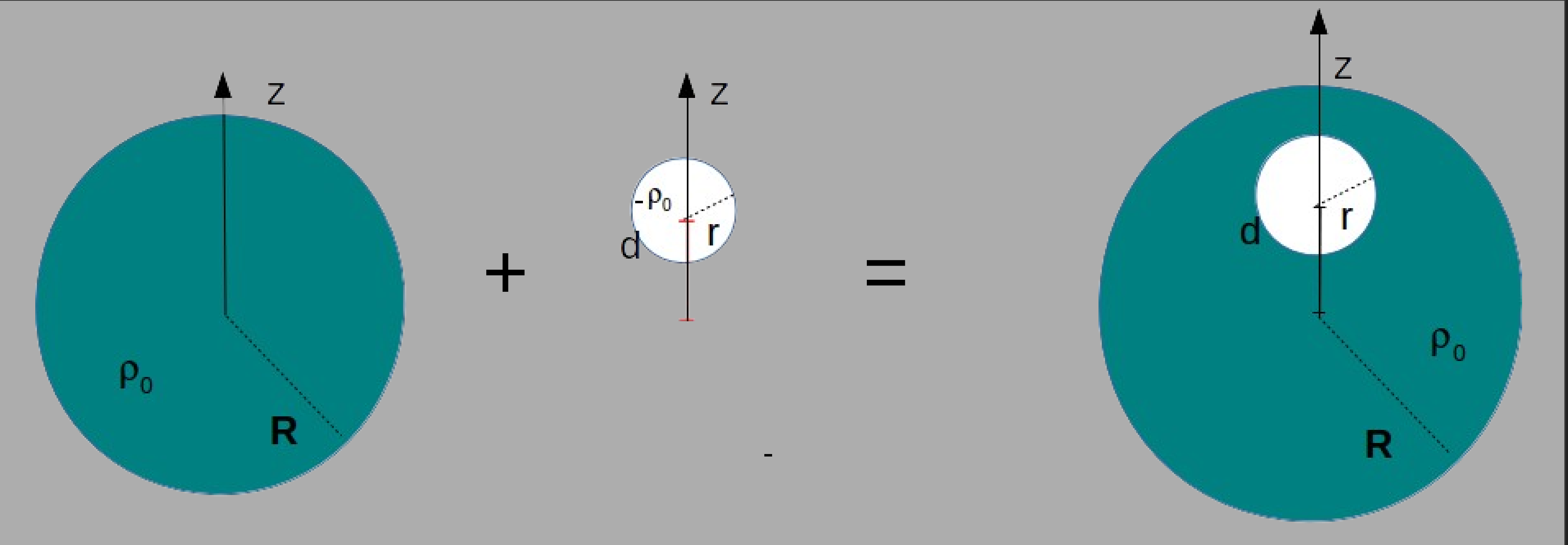
En el caso de la esfera chica debemos tener en cuenta que no está centrada en el origen y por lo tanto:

$$z \to z - d$$



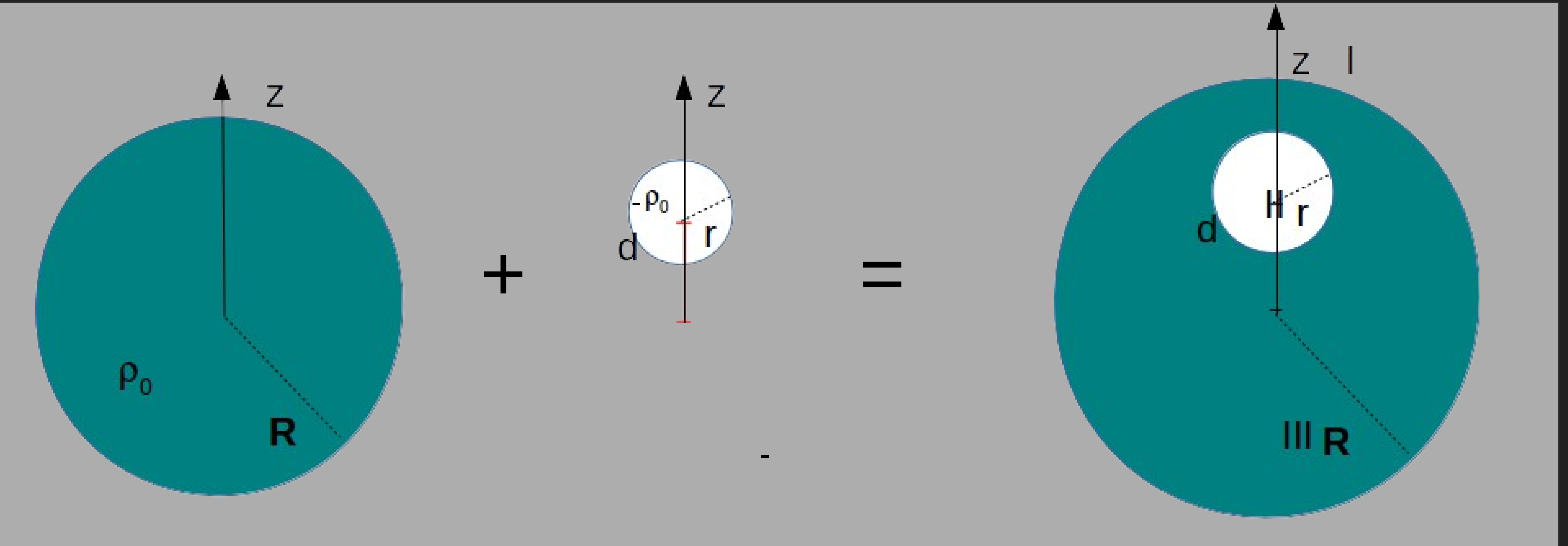
$$\vec{E}_{Esf\ chica}(z\hat{z}) = \begin{cases} -\dfrac{(z-d)\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } |z| < r \\ \\ -\dfrac{r^3(z-d)\rho_0}{3|(z-d)|^3\varepsilon_0}\hat{z} & \text{si } r < |z| \end{cases}$$

Volviendo al problema inicial y conociendo los campos de cada una de las esferas sobre el eje z. Debemos hacer superposición de los campos generados individualmente.

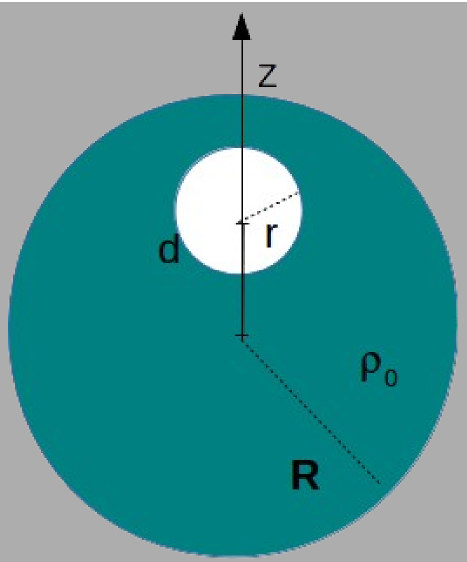


Como los campos de las esferas no son iguales afuera que adentro, hay que realizar una superposición por sectores. Es decir, para conocer el el campo en

Región I: campo exterior de ambas esferas, Región II: campo interior de ambas esferas y Región III: Campo interior esfera grande y exterior de esfera chica.



$$\vec{E}_{Tot}(z\hat{z}) = \begin{cases} \vec{E}^{af}_{Esf\ chica} + \vec{E}^{af}_{Esf\ Grande} & \text{si } -R > z \\ \vec{E}^{af}_{Esf\ chica} + \vec{E}^{ad}_{Esf\ Grande} & \text{si } -R < z < d - r \\ \vec{E}^{ad}_{Esf\ chica} + \vec{E}^{ad}_{Esf\ Grande} & \text{si } d - r < z < d + r \\ \vec{E}^{af}_{Esf\ chica} + \vec{E}^{ad}_{Esf\ Grande} & \text{si } d + r < z < R \\ \vec{E}^{af}_{Esf\ chica} + \vec{E}^{af}_{Esf\ Grande} & \text{si } R < z \end{cases}$$



Guía 2- Medios materiales

En esta clase comenzaremos con la Guía 2 donde estudiaremos algunos materiales en condiciones electrostática.

Las guías están disponibles en

https://campus.exactas.uba.ar/

En esta primera clase veremos las características generales de los conductores, el comportamiento de las cargas en condiciones electrostática.

Con el contenido de esta clase podrán resolver los ejercicios 2.1 a 2.5.

Medios materiales: conductores

Los conductores se caracterizan por poseer cargas libres y por lo tanto ser buenos conductores de carga.

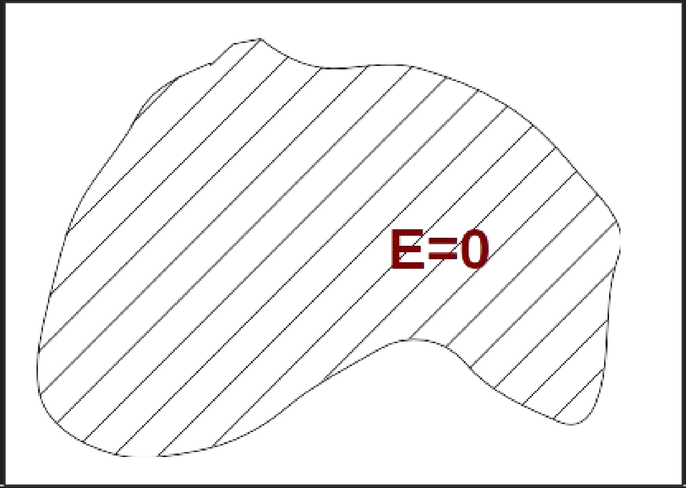
En general en la naturaleza los materiales que mejor conducen la electricidad son los metales. El ejercicio 2.1 nos permitirá ilustrar este punto.

Podemos pensar que los conductores en equilibrio cumplen una serie de características generales.

Características de los conductores en condiciones electrostática

En condiciones electrostática:

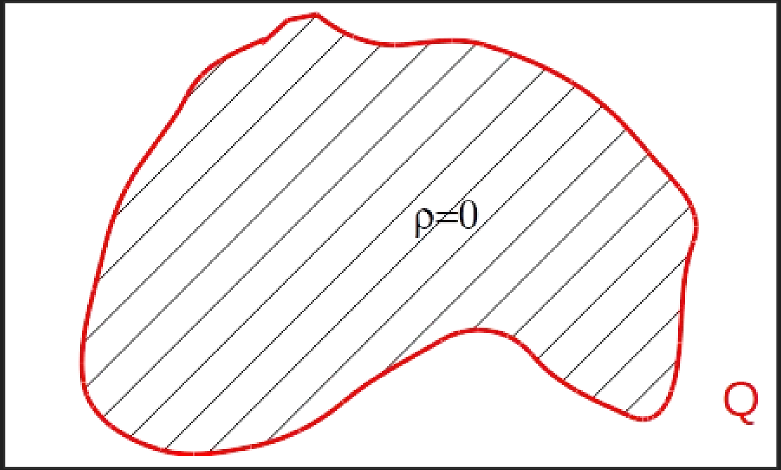
1. El campo E en el interior del conductor es nulo.



Características de los conductores en condiciones electrostática

En condiciones electrostática:

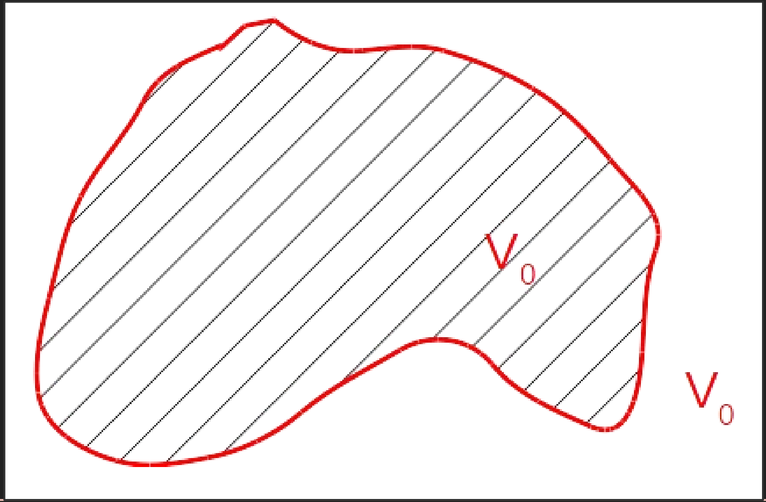
2. La carga se distribuirá en la superficie del conductor (No hay carga en volumen).



Características de los conductores en condiciones electrostática

En condiciones electrostática:

3. El potencial en todo el conductor es constante (volumen equipotencial).



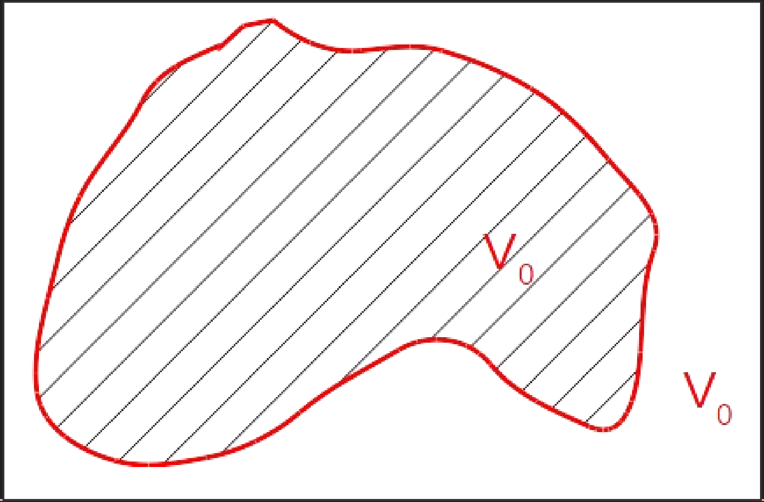
Características de los conductores en condiciones electrostática

En condiciones electrostática:

3. El potencial en todo el conductor es constante (volumen equipotencial).

$$\nabla V = -\vec{E}$$

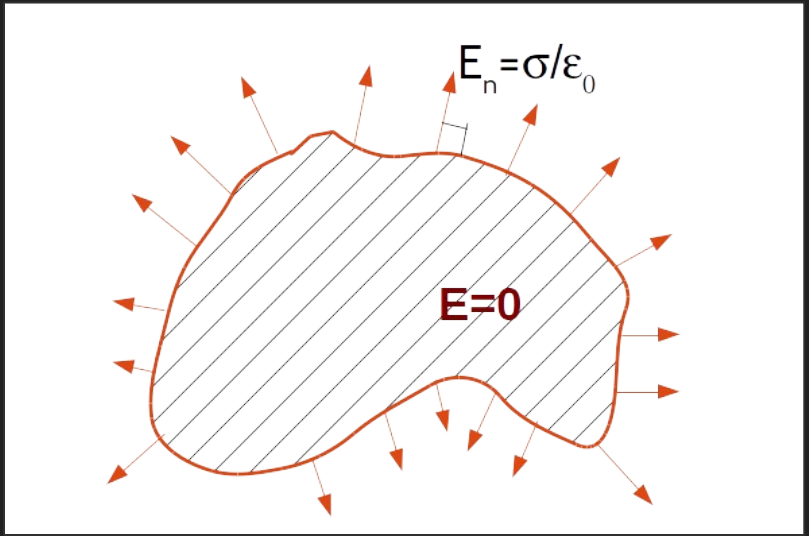
Este punto es equivalente a pedir que el campo es nulo en su interior, ya que la relación entre el campo eléctrico y el potencial está dado a través del gradiente.



Características de los conductores en condiciones electrostática

En condiciones electrostática:

4. El campo sobre la superficie exterior al conductor sólo tiene componente normal ($E_t|_{Sup}$=0) y su valor es σ/ε_0



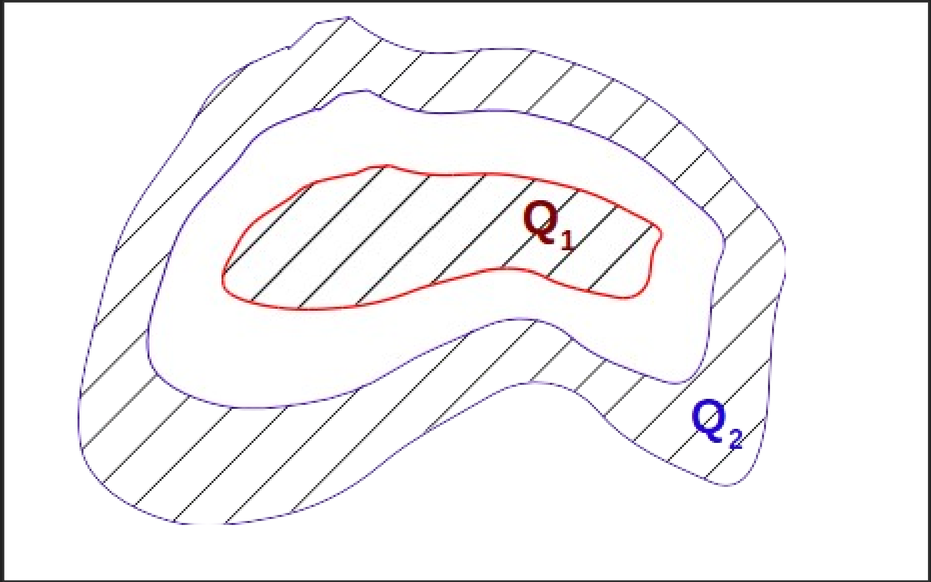
1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

   En los metales las cargas libres son los electrones (q=-1.6021×10^{-19} C), de modo que una carga positiva se logra por vaciamiento de los electrones de esa superficie. Calcule si en una capa atómica superficial hay suficientes electrones para obtener condiciones similares a las del primer inciso, en el caso de que el conductor hueco sea un casquete esférico de radio interior de 4cm y exterior de 6cm. Si (1) el metal es el cobre (Cu) que tiene 8.5×10^{22} át/cm^3 y cada átomo contribuye con un electrón libre. Si (2) es una cáscara esférica semiconductora de silicio (Si) que tiene 5×10^{22} át/cm^3 y el número de portadores libres puede variar segun la temperatura y grado de impurezas entre 10^{14} cm^{-3} y 10^{19} cm^{-3}.

1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

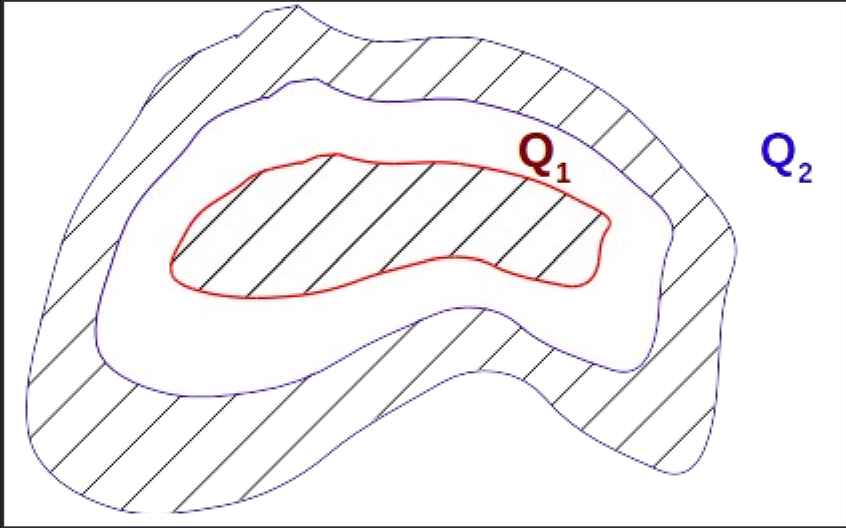
   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

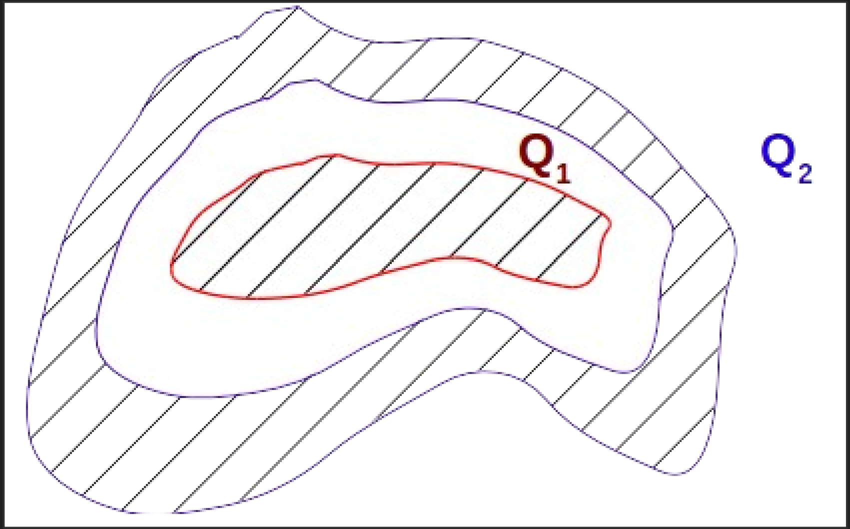
Sabemos que las cargas en los conductores se van a distribuir en las superficies.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

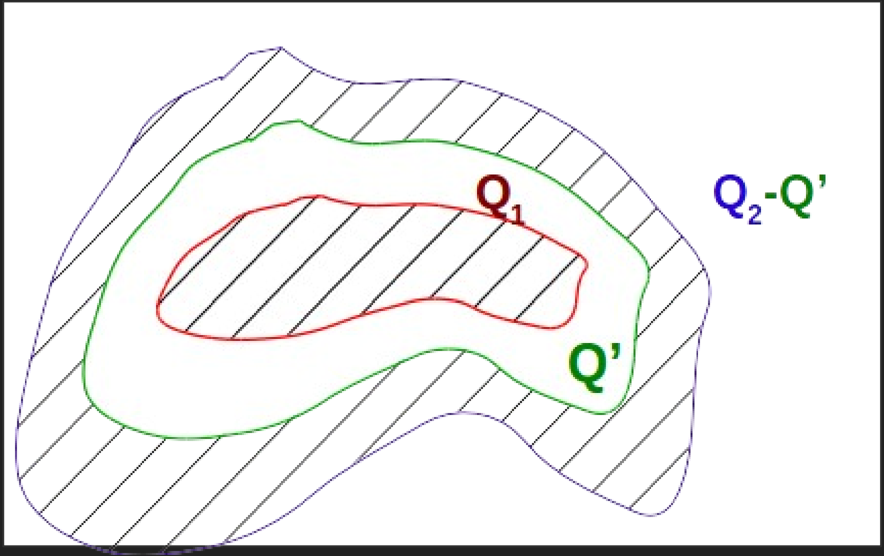
1. En el conductor interior se va a distribuir en la superficie indicada en rojo.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

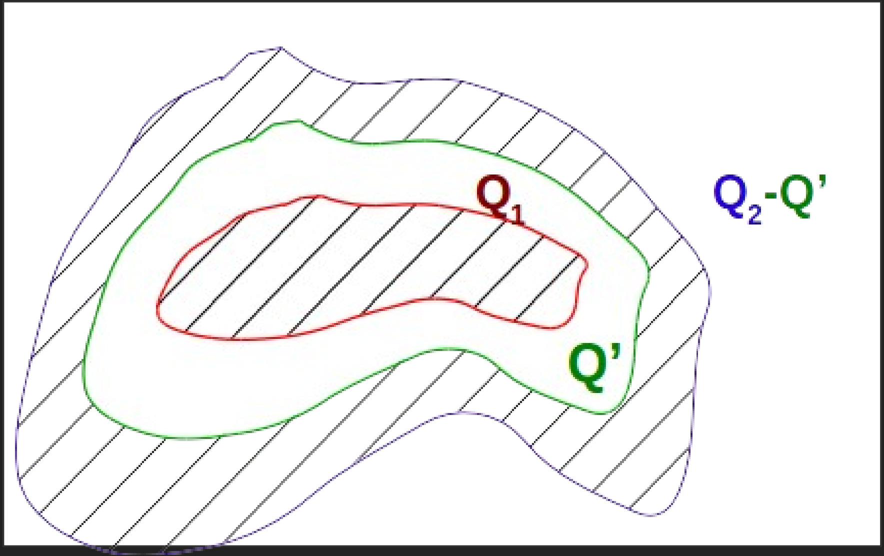
2.En el conductor exterior también se distribuirá en sus superficies interna y externa.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

2.En el conductor exterior también se distribuirá en sus superficies interna y externa.

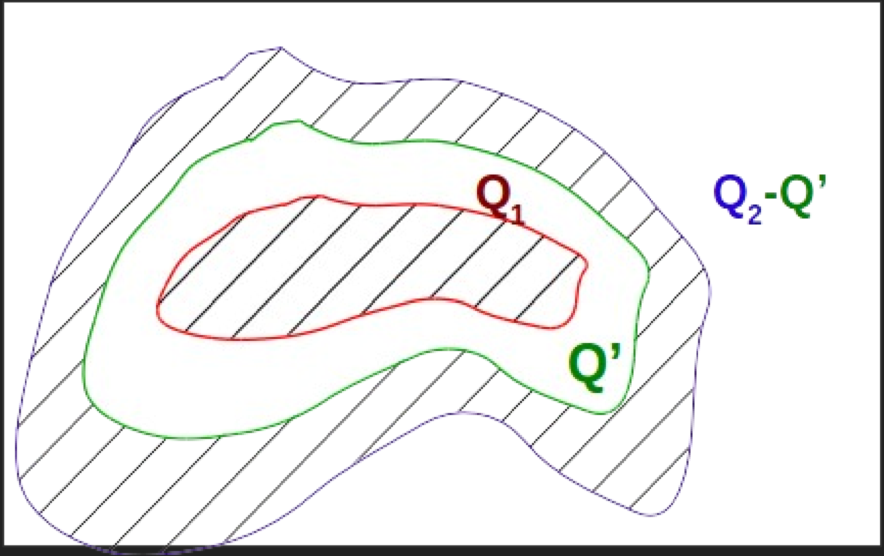


¡¡AL ESTAR AISLADOS SE CONSERVA LA CARGA!!

1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

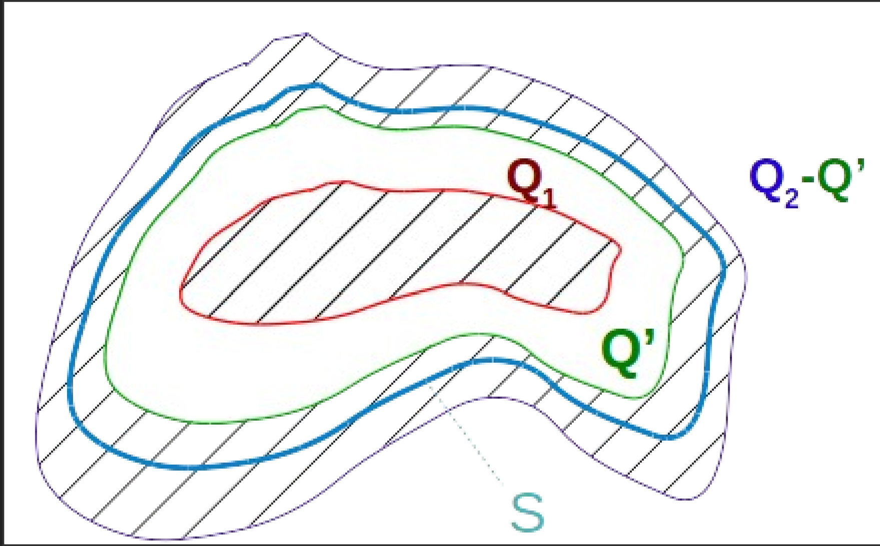
Pero…
¿Cómo se distribuirá?



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

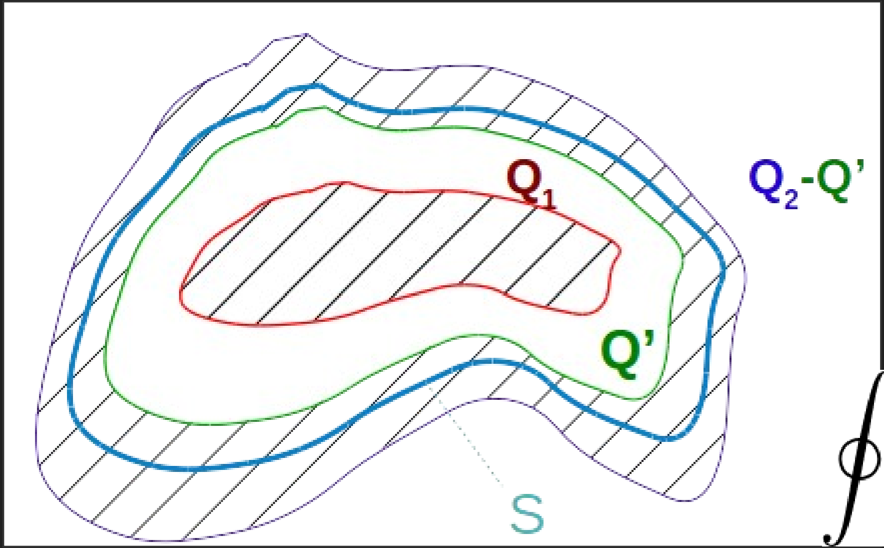
Si calculamos el campo dentro del segundo conductor con la Ley de Gauss con la superficie S.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

Si calculamos el campo dentro del segundo conductor con la Ley de Gauss con la superficie S.



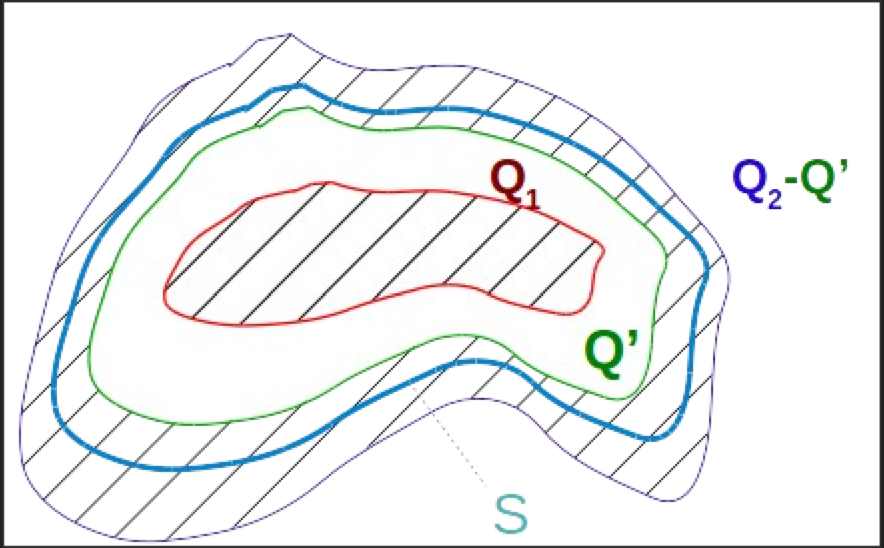
$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{enc} = Q_1 + Q'$$



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

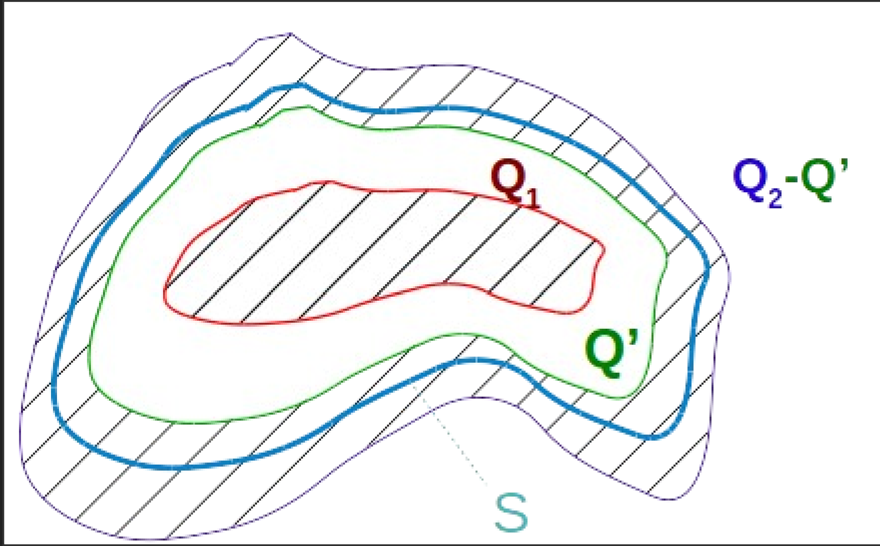
   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{enc} = Q_1 + Q'$$

$$E = 0$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 0$$

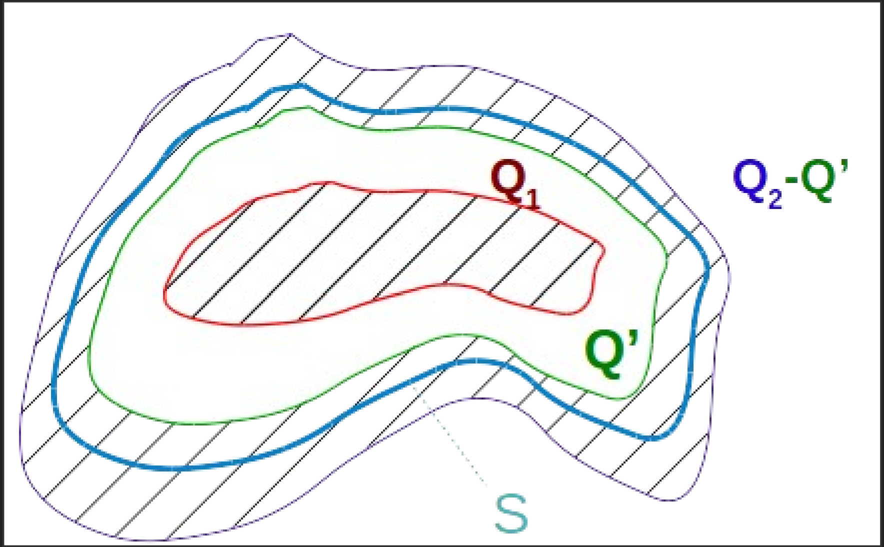


1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

$$Q_{enc} = Q_1 + Q' = 0$$

$$Q' = -Q_1$$

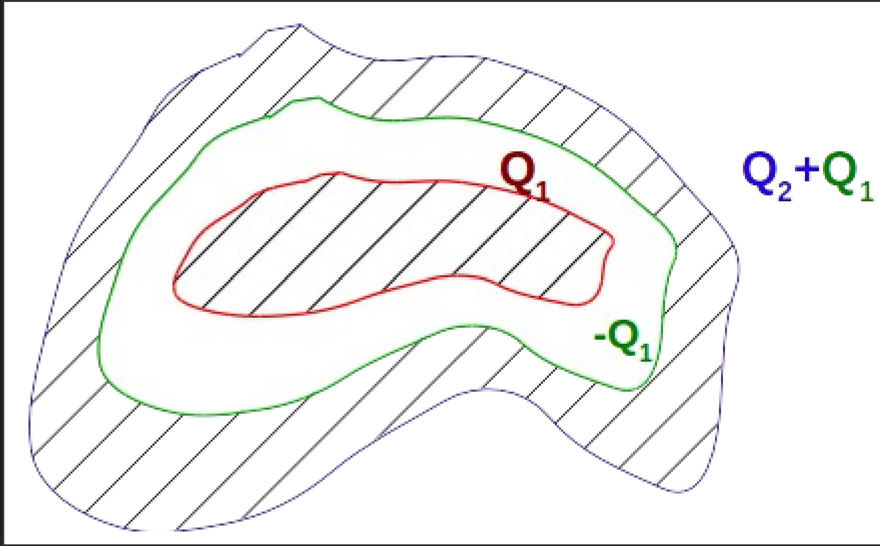


1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

$$Q_{enc} = Q_1 + Q' = 0$$

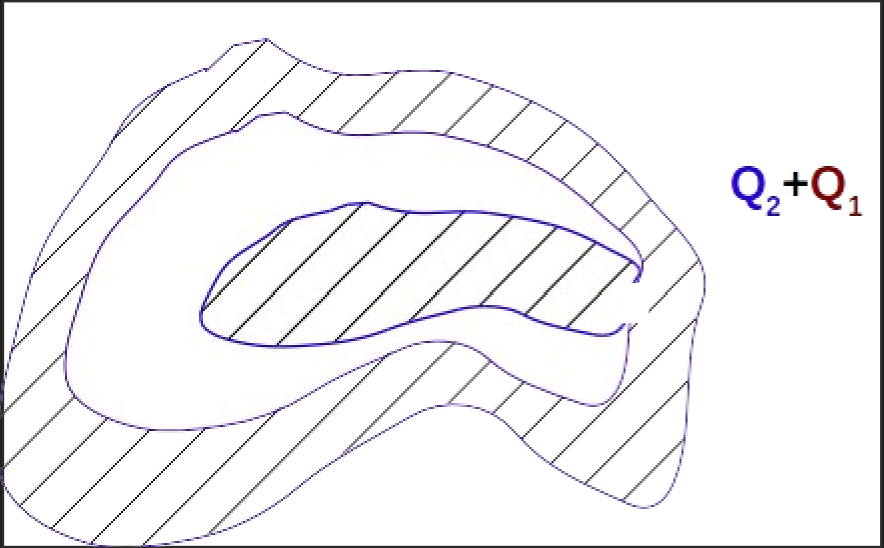
$$Q' = -Q_1$$



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

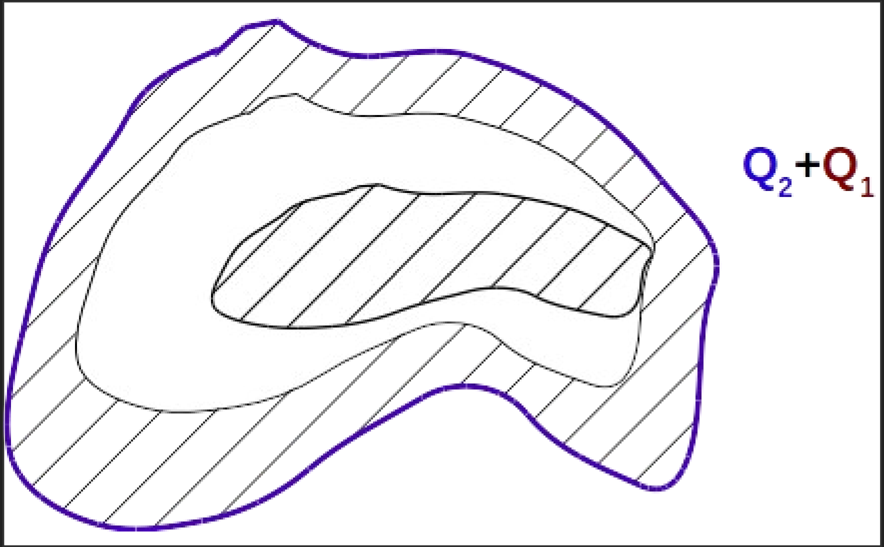
Al tocarse ambos conductores la carga se redistribuye y debemos pensar en un único conductor con carga total Q_2+Q_1. Como ambos conductores están aislados, la carga se conserva.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

- ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
- ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
- Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

La carga se distribuye en la superficie exterior del nuevo volumen conductor, de manera de garantizar que el campo en el interior del conductor es nulo.



1. Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga Q =1nC (10^{-9}C) y al otro con carga Q'= 2nC.

   - ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas y cuál es su valor?
   - ¿Qué ocurre si ambos conductores se tocan?
   - Muestre que si $Q' = -Q$, entonces el campo exterior es nulo.

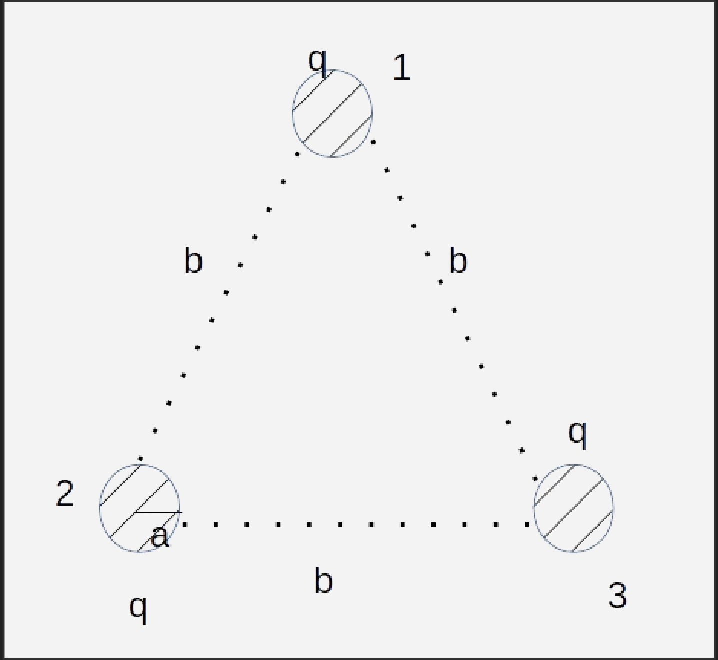
   En los metales las cargas libres son los electrones (q=-1.6021×10^{-19} C), de modo que una carga positiva se logra por vaciamiento de los electrones de esa superficie. Calcule si en una capa atómica superficial hay suficientes electrones para obtener condiciones similares a las del primer inciso, en el caso de que el conductor hueco sea un casquete esférico de radio interior de 4cm y exterior de 6cm. Si (1) el metal es el cobre (Cu) que tiene 8.5×10^{22} át/cm^3 y cada átomo contribuye con un electrón libre. Si (2) es una cáscara esférica semiconductora de silicio (Si) que tiene 5×10^{22} át/cm^3 y el número de portadores libres puede variar segun la temperatura y grado de impurezas entre 10^{14} cm^{-3} y 10^{19} cm^{-3}.

Vol. casquete esférico: $4/3\pi(R_{ext}^3\text{-}R_{int}^3)$

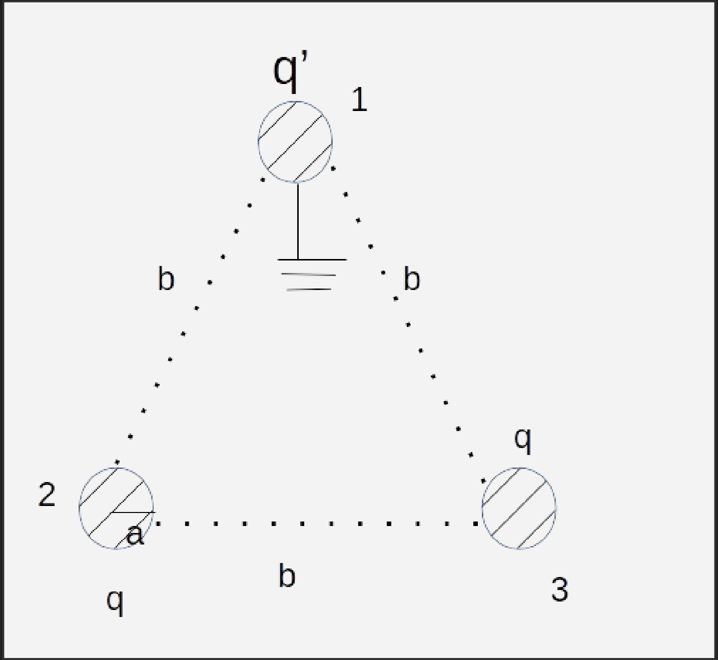
Q_{Cu}=número de atomos*q=Vol*$8.5\text{x}10^{22}\text{cm}^{-3}$*q

Q_{Si}=números de portadores*q=Vol*10^{14}cm^{-3}*q o Vol*10^{19}cm^{-3}*q

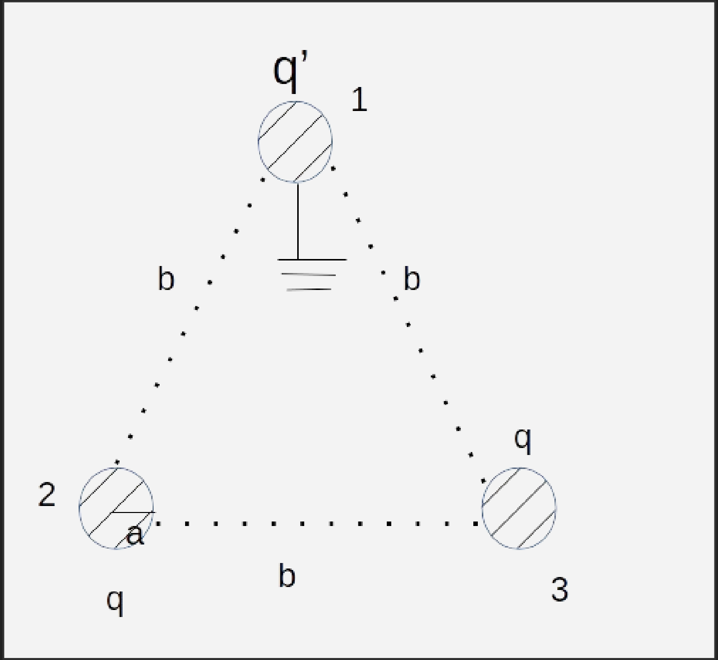
3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?

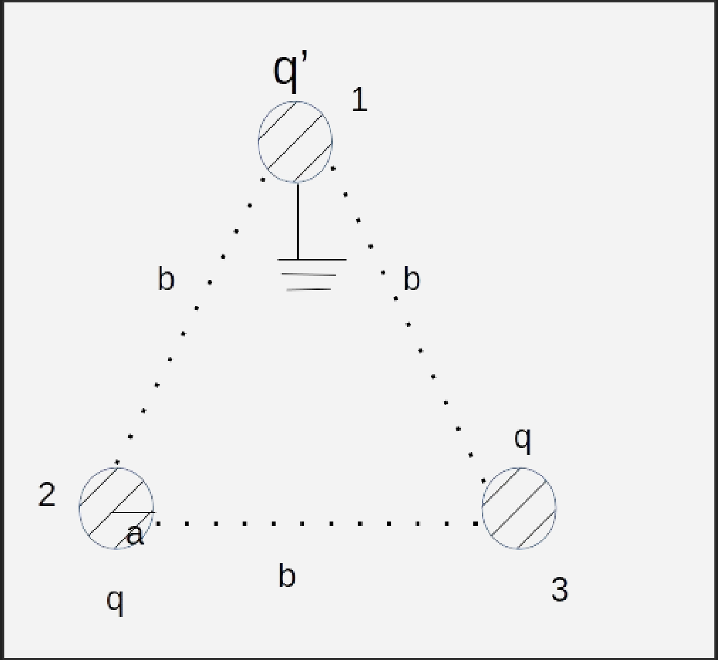


3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Si se conecta una esfera conductora a Tierra el potencial en la superficie de es esfera es nula….pero cómo se genera ese potencial?

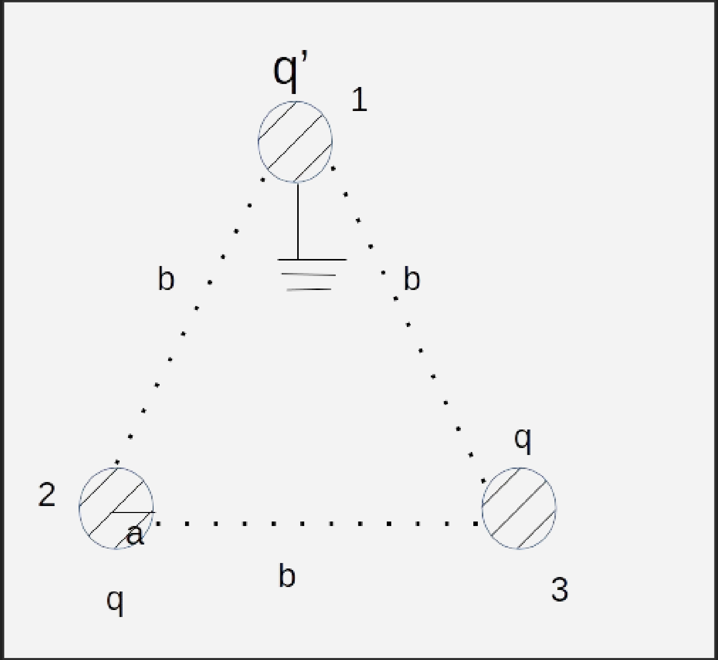
3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Si se conecta una esfera conductora a Tierra el potencial en la superficie de la esfera es nula.

Ese potencial se genera debido a los 2 cargas q y a la carga q' en la superficie de la esfera.

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



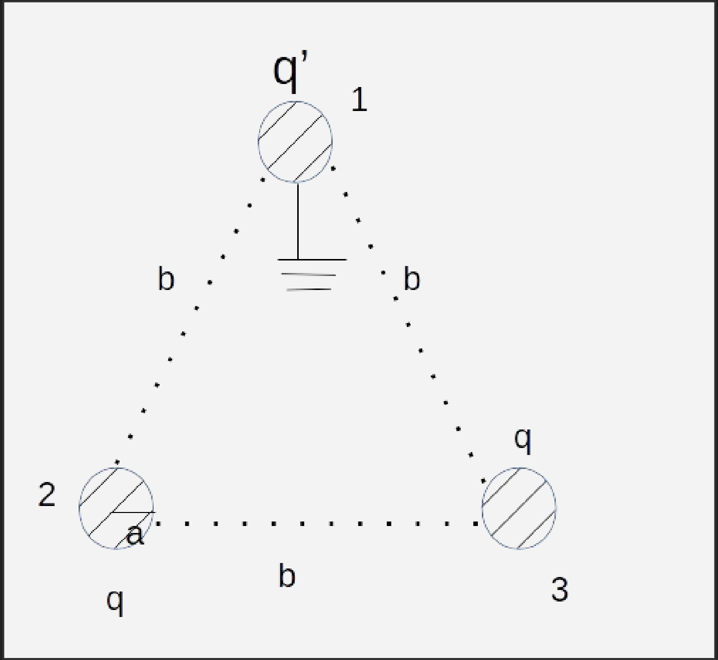
Si se conecta una esfera conductora a Tierra el potencial en la superficie de es esfera es nula.

Ese potencial se genera debido a los 2 cargas q y a la carga q' en la superficie de la esfera.

Es decir,

$$V_1 = V_{q'}(r = a) + V_q(r = b) + V_q(r = b)$$

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



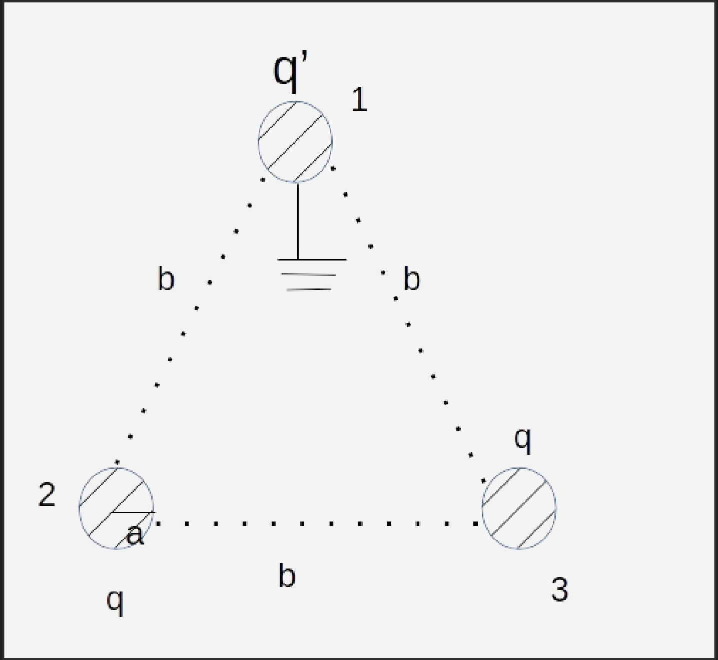
Si se conecta una esfera conductora a Tierra el potencial en la superficie de es esfera es nula.

Ese potencial se genera debido a los 2 cargas q y a la carga q' en la superficie de la esfera.

$$V_1 = V_{q'}(r=a) + V_q(r=b) + V_q(r=b)$$

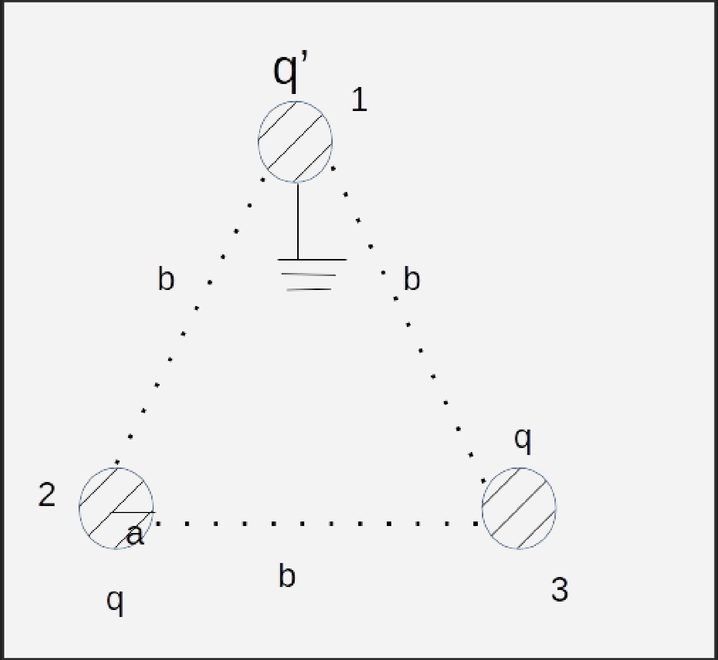
¿Pero por qué cambié q por q' en la esfera conectada a Tierra?

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Al conectarse la esfera a Tierra, esta no se encuentra más aislada. Por lo tanto puede cargarse con una carga q' cualquiera de manera de garantizar que el potencial en la superficie de la esfera es nula.

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?

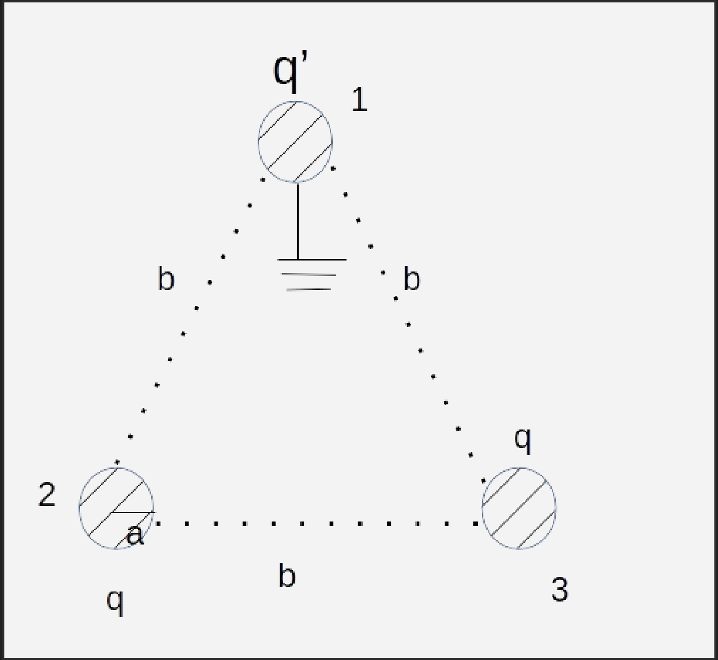


Dado que el potencial es así:

$$V_1 = V_{q'}(r = a) + V_q(r = b) + V_q(r = b)$$

¿Cómo son estas contribuciones?

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Dado que el potencial es así:

$$V_1 = V_{q'}(r = a) + V_q(r = b) + V_q(r = b)$$

¿Cómo son estas contribuciones?

Como b>>a podemos pensar en contribuciones puntuales de las cargas q. Entonces,

$$V_q(r = b) = \frac{kq}{b}$$

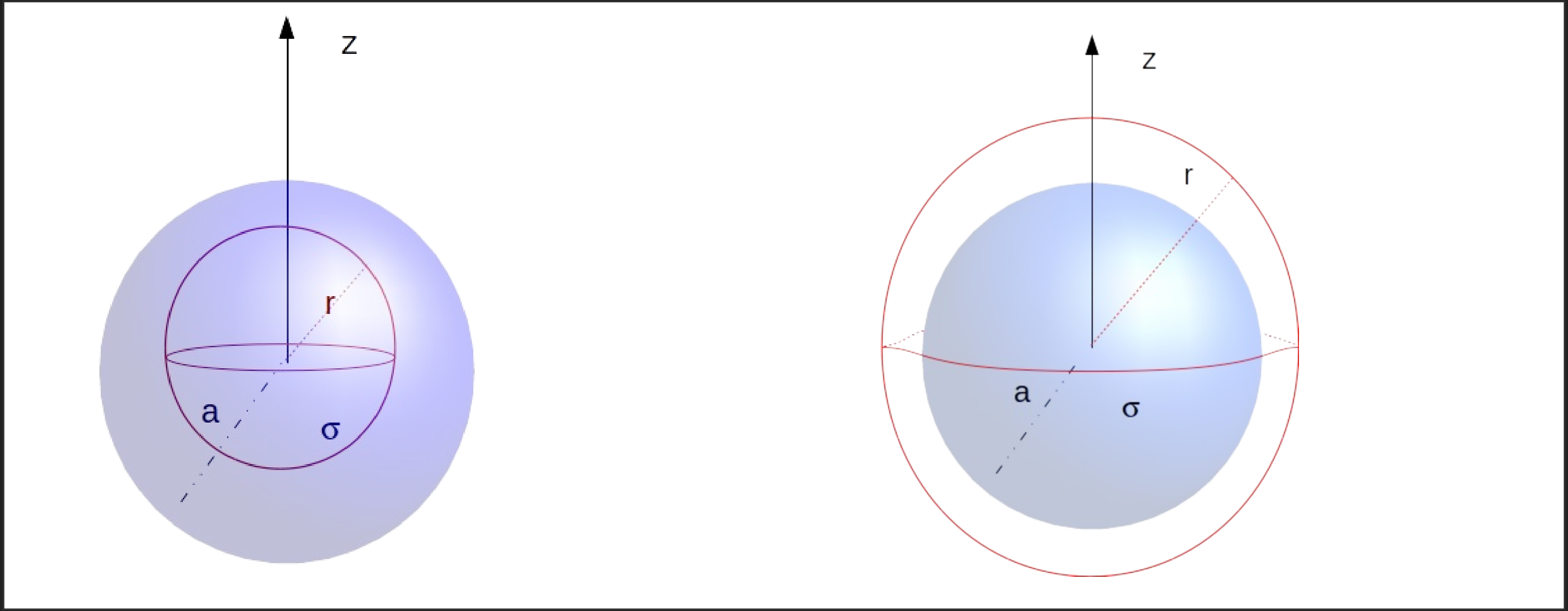
Pero cómo es el potencial de una esfera conductora...sería equivalente a una esfera cargada en superficie. Es decir, dada una esfera de radio a, tenemos:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } r = a \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases}$$

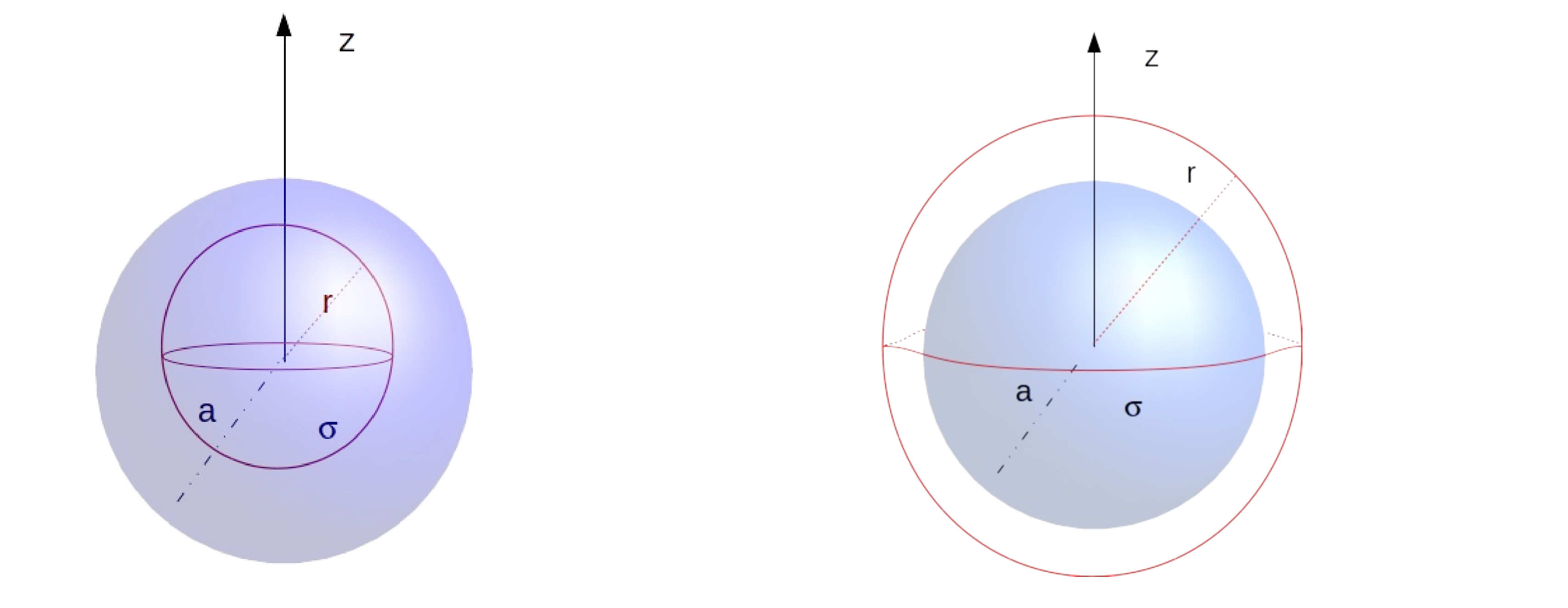
Entonces debemos calcular el potencial y para ello necesitamos el campo eléctrico que se puede calcular por la Ley de Gauss.

Cálculo de potencial de un casquete esférico con distribución de carga uniforme

Primero calculo el campo eléctrico a partir de Gauss, considerando dos superficies.



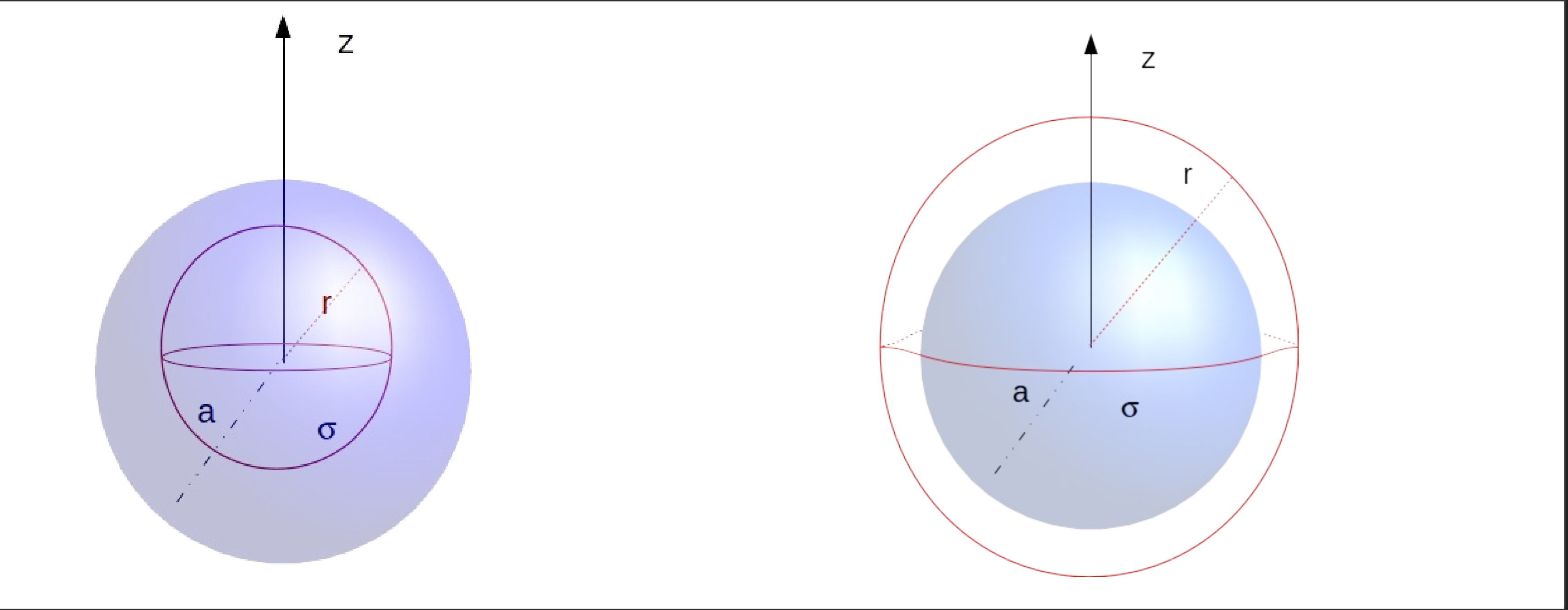
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$



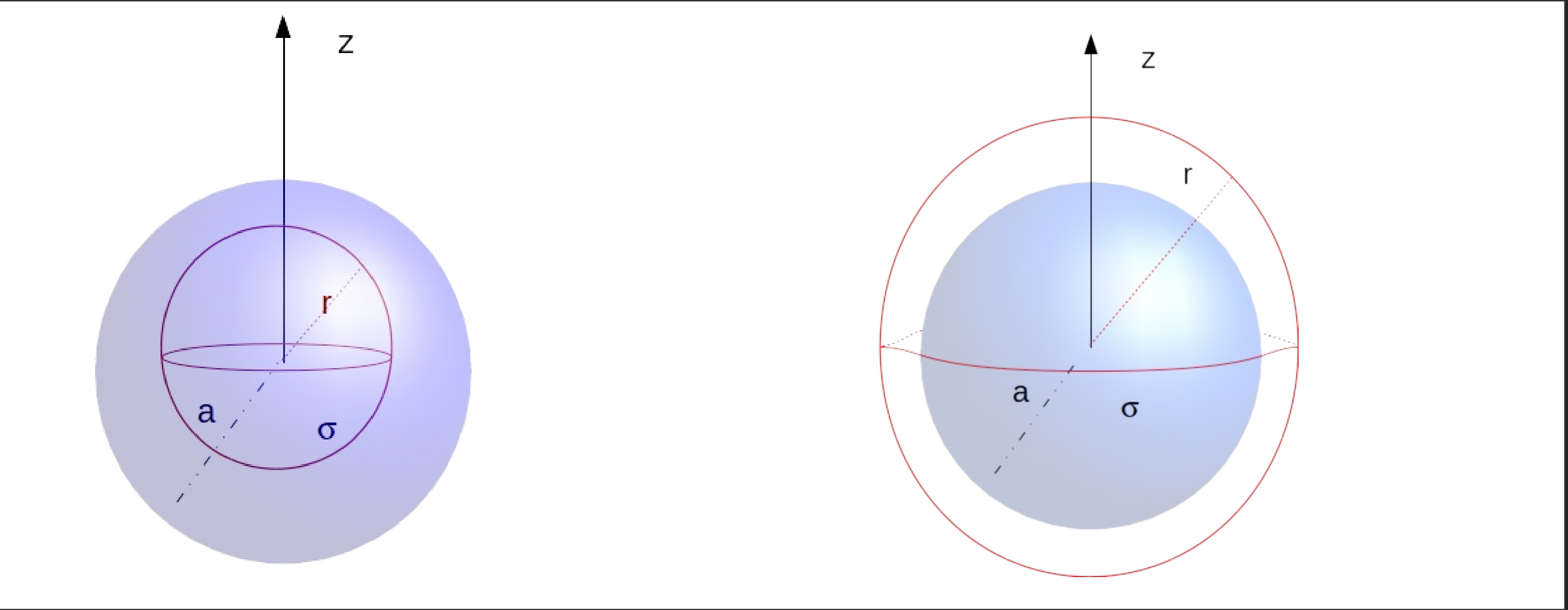
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

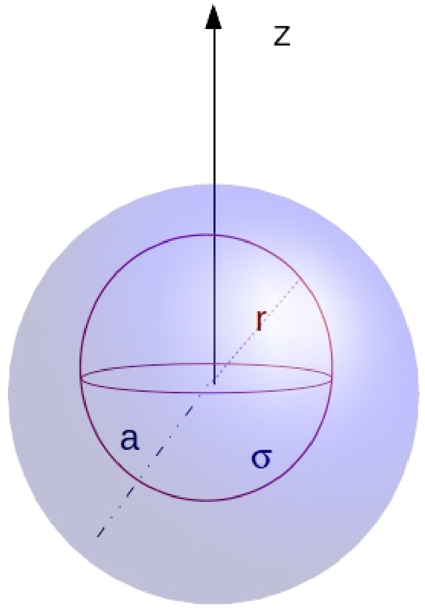
$$\vec{ds} = r^2 sin\theta d\phi d\theta\hat{r}$$

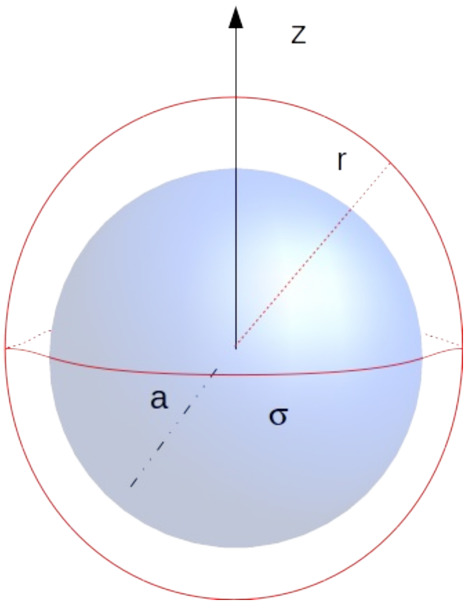


$$\oint \vec{E}(\vec{r}).\vec{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\hat{r}.r^2 sin\theta d\theta d\phi\hat{r}$$

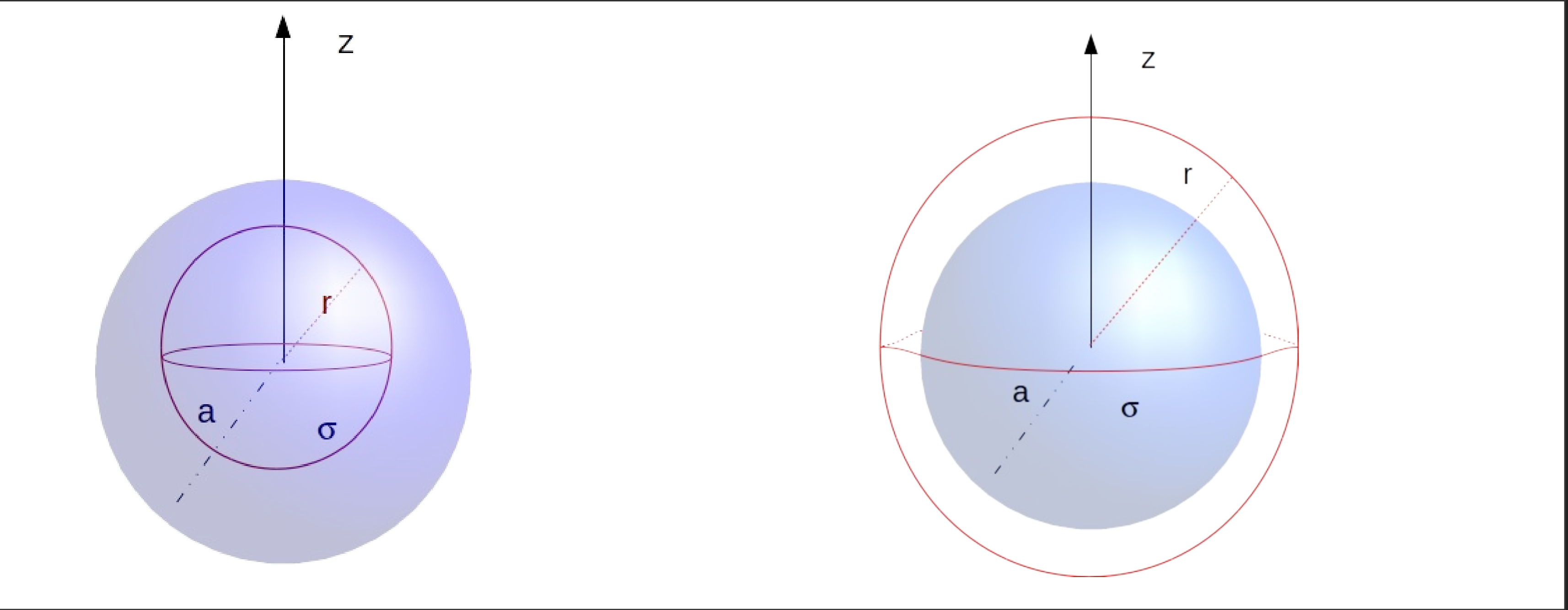


$$Q_{enc} = \begin{cases} \sigma_0 4\pi a^2 & \text{si}\, r > a \\ 0 & \text{si}\, r < a \end{cases}$$

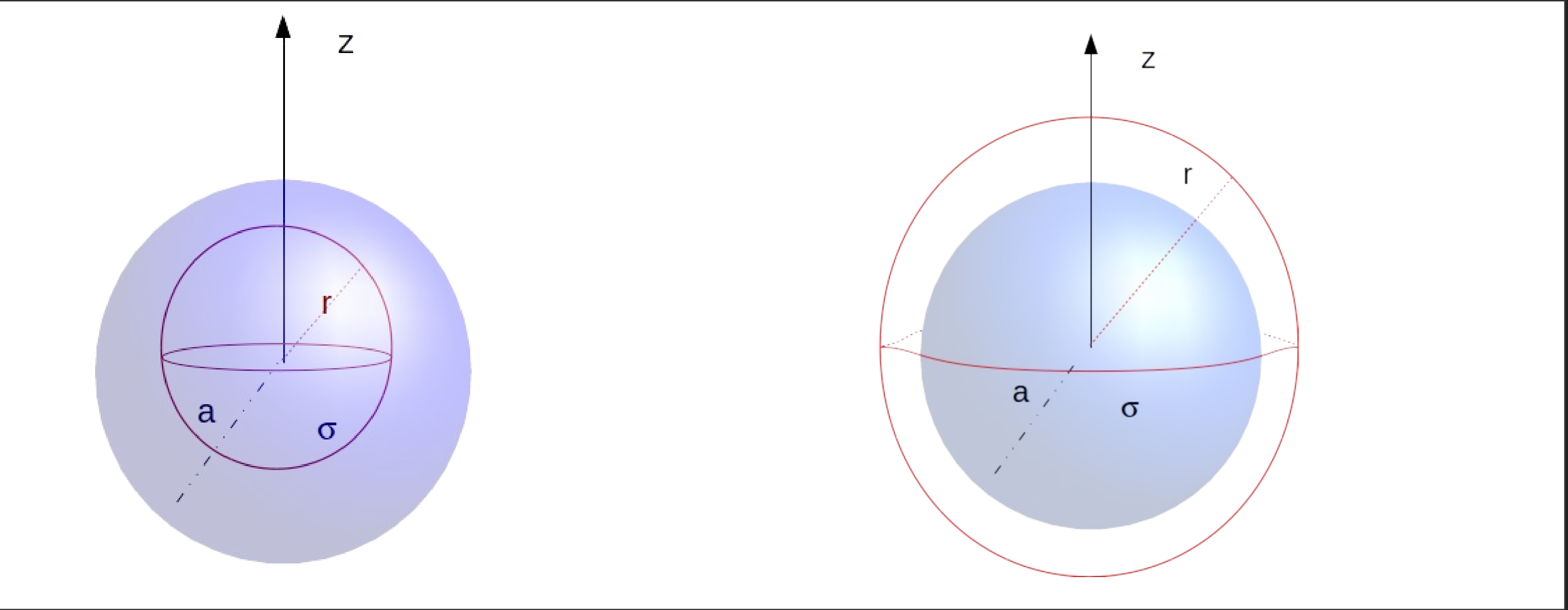




$$E(r)4\pi r^2 = \begin{cases} \sigma_0 4\pi a^2/\varepsilon_0 & \text{si}\, r > a \\ 0 & \text{si}\, r < a \end{cases}$$



$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \sigma_0 a^2/(r^2\varepsilon_0)\hat{r} & \text{si } r > a \\ 0 & \text{si } r < a \end{cases}$$



Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico

$$V(r) = -\int \vec{E}(r) dr \hat{r} = \begin{cases} \sigma_0 a^2/(r\varepsilon_0) + A & \text{si } r > a \\ B & \text{si } r < a \end{cases}$$

Ajustamos las constantes con el cero de potencial y continuidad...

$$V(r) = -\int \vec{E}(r) dr \hat{r} = \begin{cases} \sigma_0 a^2/(r\varepsilon_0) + A & \text{si } r > a \\ B & \text{si } r < a \end{cases}$$

$r \to \infty \; V(r) \to 0$

entonces $A \to 0$

Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico

$$V(r) = \begin{cases} \sigma_0 a^2/(r\varepsilon_0) & \text{si } r > a \\ B & \text{si } r < a \end{cases}$$

Por continuidad, $B = \sigma_0 a/\varepsilon_0$

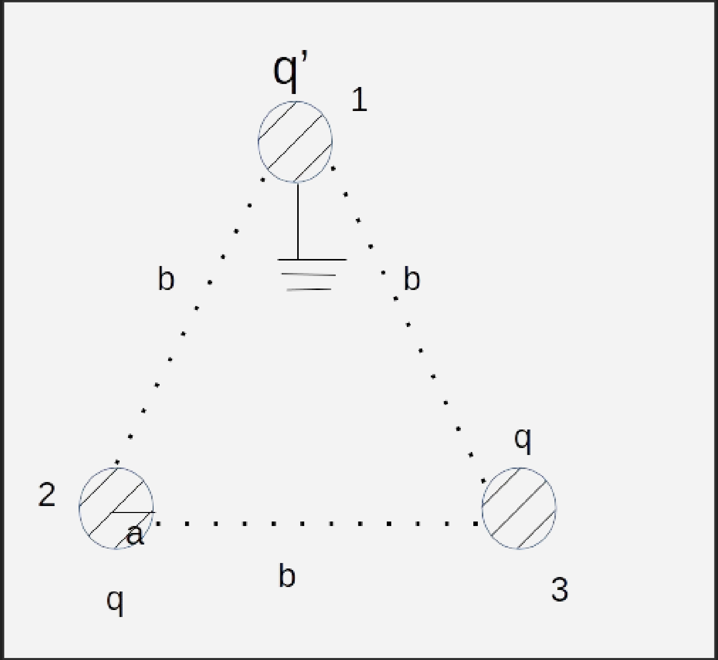
Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico

$$V(r) = \begin{cases} \sigma_0 a^2/(r\varepsilon_0) & \text{si}\, r > a \\ \sigma_0 a/\varepsilon_0 & \text{si}\, r < a \end{cases}$$

O sea que dentro de un casquete esférico el potencial es constante, consistente con los conductores en equilibrio.

Volvemos al problema 2.3...

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Dado que el potencial es así:

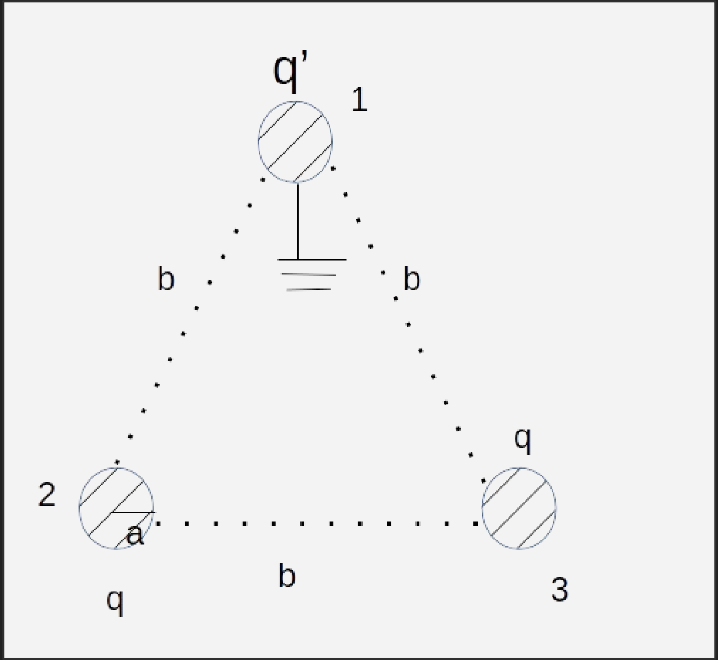
$$V_1 = V_{q'}(r=a) + V_q(r=b) + V_q(r=b)$$

$$V_{q'}(r=a) = \frac{a\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi a^2 \sigma_0}{4\pi a \varepsilon_0}$$

$$q' = 4\pi a^2 \sigma_0$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Dado que el potencial es así:

$$V_1 = V_{q'}(r=a) + V_q(r=b) + V_q(r=b)$$

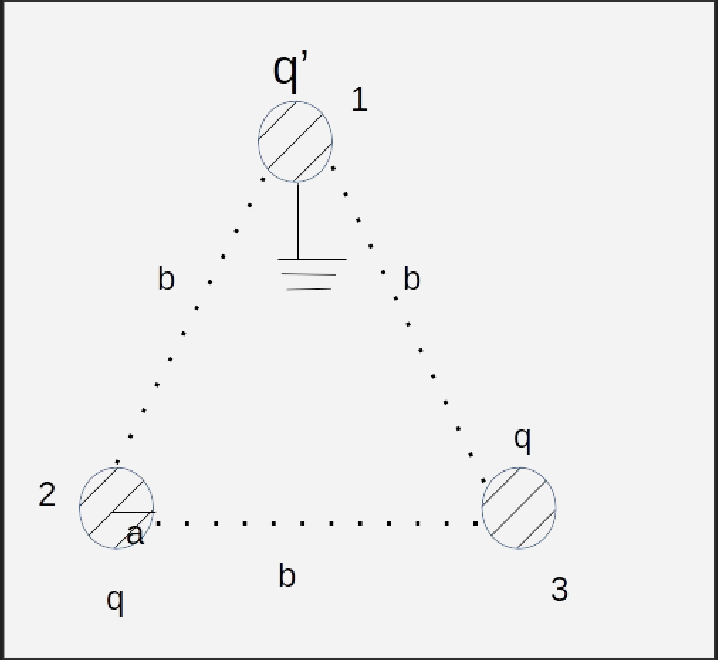
$$V_{q'}(r=a) = \frac{a\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi a^2\sigma_0}{4\pi a\varepsilon_0}$$

$$q' = 4\pi a^2\sigma_0$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$V_{q'}(r=a) = \frac{kq'}{a}$$

3. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b >> a$). Inicialmente las tres esferas tienen cargas iguales de valor q. A continuación, una a una y, sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál será la carga de cada esfera al final del proceso?



Dado que el potencial es así:

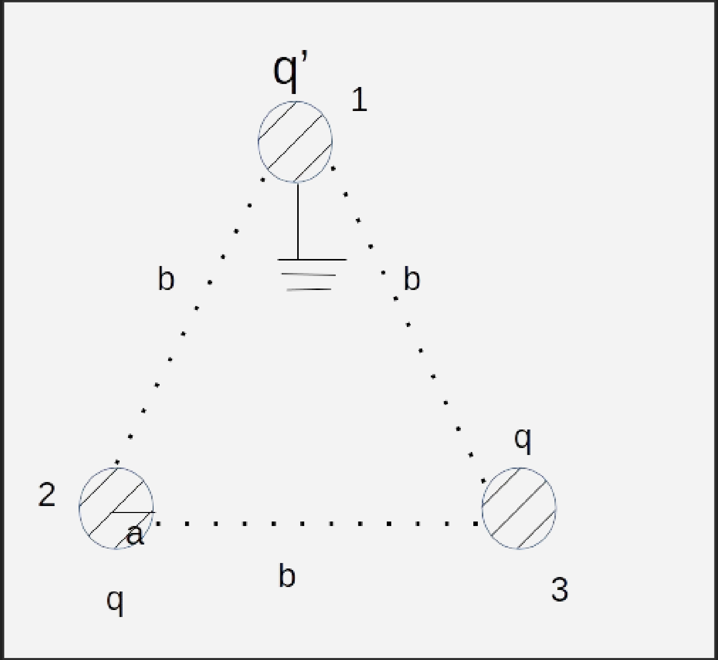
$$V_1 = V_{q'}(r = a) + V_q(r = b) + V_q(r = b)$$

$$V_q(r = b) = \frac{kq}{b}$$

$$V_{q'}(r = a) = \frac{kq'}{a}$$

$$V_1 = V_{q'}(r = a) + V_q(r = b) + V_q(r = b)$$

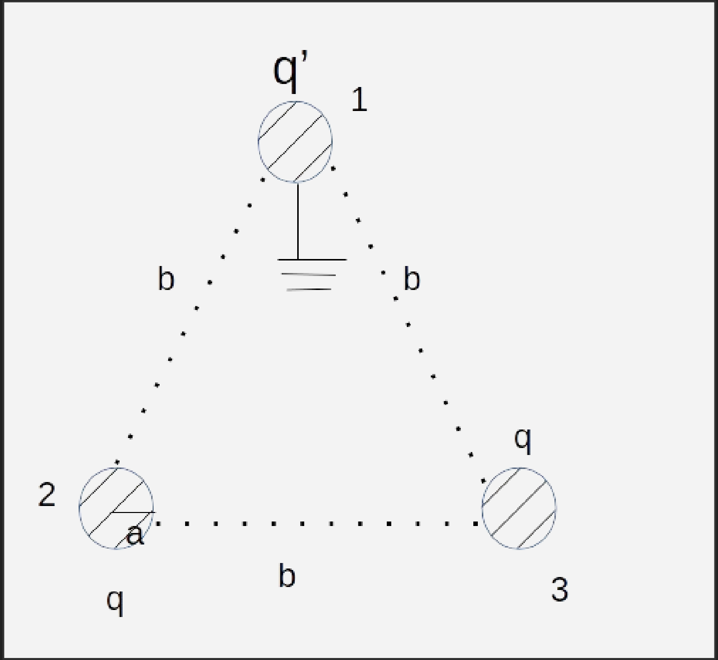
$$V_q(r = b) = \frac{kq}{b}$$



$$V_{q'}(r = a) = \frac{kq'}{a}$$

$$V_1 = \frac{kq'}{a} + \frac{kq}{b} + \frac{kq}{b}$$

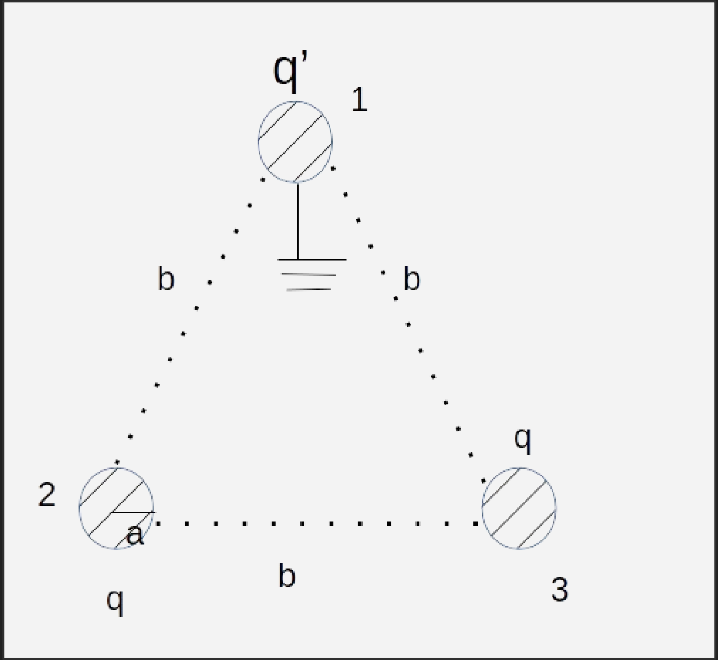
$$V_1 = \frac{kq'}{a} + \frac{kq}{b} + \frac{kq}{b}$$



$$V_1 = 0$$

$$q' = -\frac{2qa}{b}$$

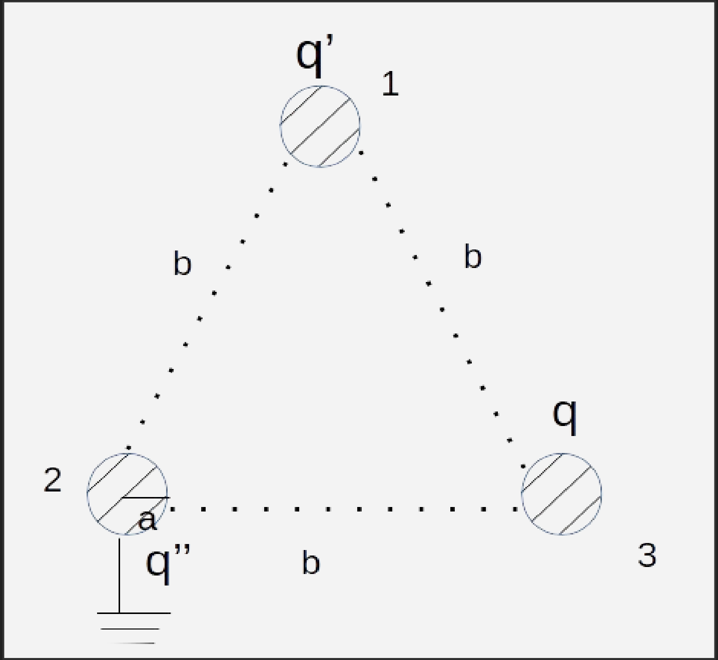
$$V_1 = \frac{kq'}{a} + \frac{kq}{b} + \frac{kq}{b}$$



$$V_1 = 0$$

$$q' = -\frac{2qa}{b}$$

Luego se desconecta la carga 1 que al quedar aislada con carga q', y la carga 2 se conecta a Tierra y adquirirá la carga q'' para que $V_2=0$

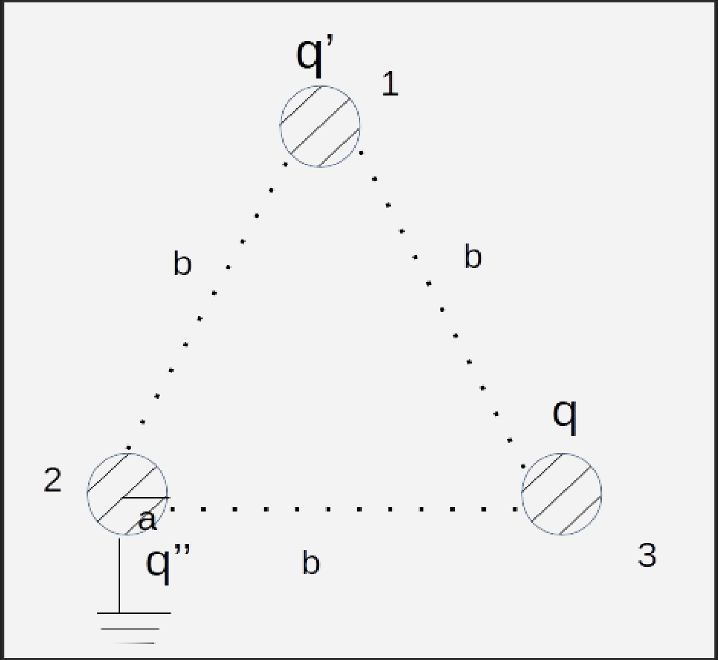


$$q' = -\frac{2qa}{b}$$

$$V_2 = \frac{kq'}{b} + \frac{kq}{b} + \frac{kq''}{a} = 0$$

Luego se desconecta la carga 1 que al quedar aislada con carga q', y la carga 2 se conecta a Tierra y adquirirá la carga q'' para que $V_2=0$

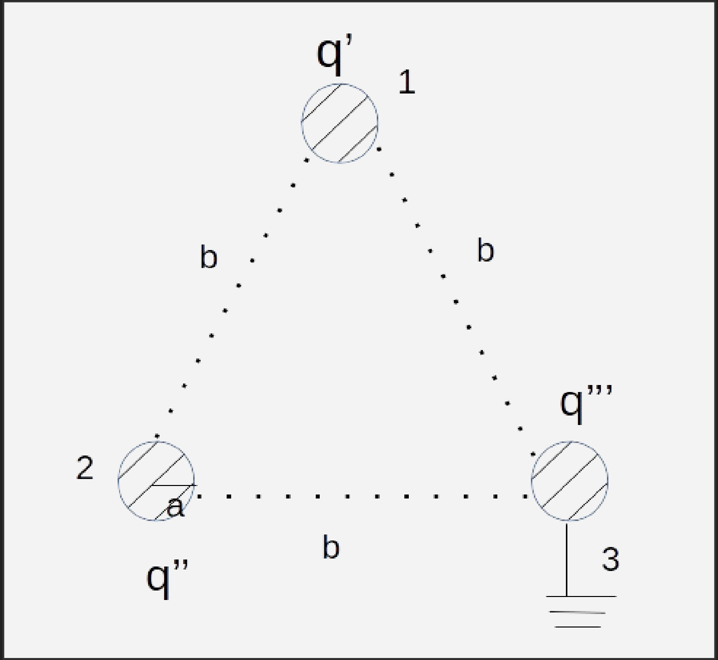
$$V_2 = \frac{kq'}{b} + \frac{kq}{b} + \frac{kq''}{a} = 0$$



$$q'' = -\frac{q'a}{b} - \frac{qa}{b}$$

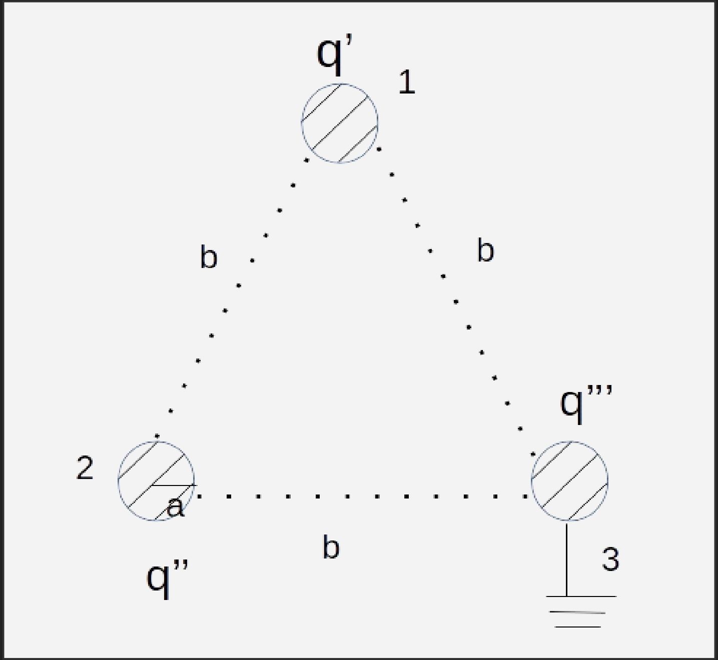
$$q'' = 2q\frac{a^2}{b^2} - \frac{qa}{b}$$

Luego se desconecta la carga 2 que al quedar aislada con carga q'', y la carga 3 se conecta a Tierra y adquirirá la carga q''' para que $V_3=0$



$$V_3 = \frac{kq'}{b} + \frac{kq''}{b} + \frac{kq'''}{a} = 0$$

Luego se desconecta la carga 2 que al quedar aislada con carga q'', y la carga 3 se conecta a Tierra y adquirirá la carga q''' para que $V_3=0$



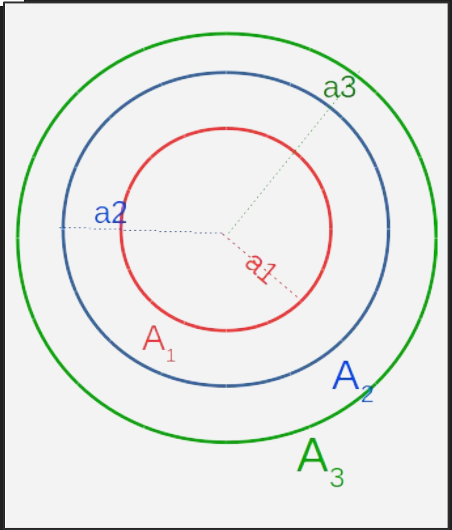
$$V_3 = \frac{kq'}{b} + \frac{kq''}{b} + \frac{kq'''}{a} = 0$$

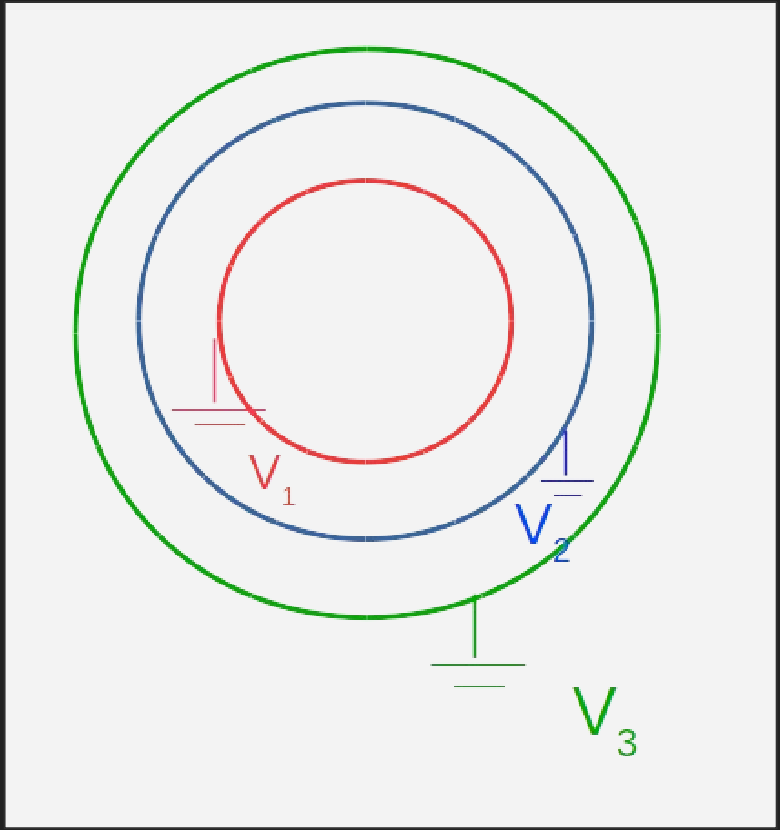
$$q''' = -\frac{q'a}{b} - \frac{q''a}{b}$$

$$q''' = \frac{3qa^2}{b^2} - \frac{2qa^3}{b^3}$$

4. Tres esferas conductoras A_1, A_2 y A_3, concéntricas de radios a_1, a_2 y a_3 ($a_1 < a_2 < a_3$) estan conectadas,respectivamente, a tres baterias V_1, V_2 y V_3. A_1 es maciza y A_2 y A_3 son huecas de espesor despreciable (respecto de su radio) pero no nulo. **Datos**: $a_1 = a$, $a_2 = 2a$ y $a_3 = 3a$; $V_1 = V_0$, $V_2 = V_3 = 2V_0$, con $V_\infty = 0$.

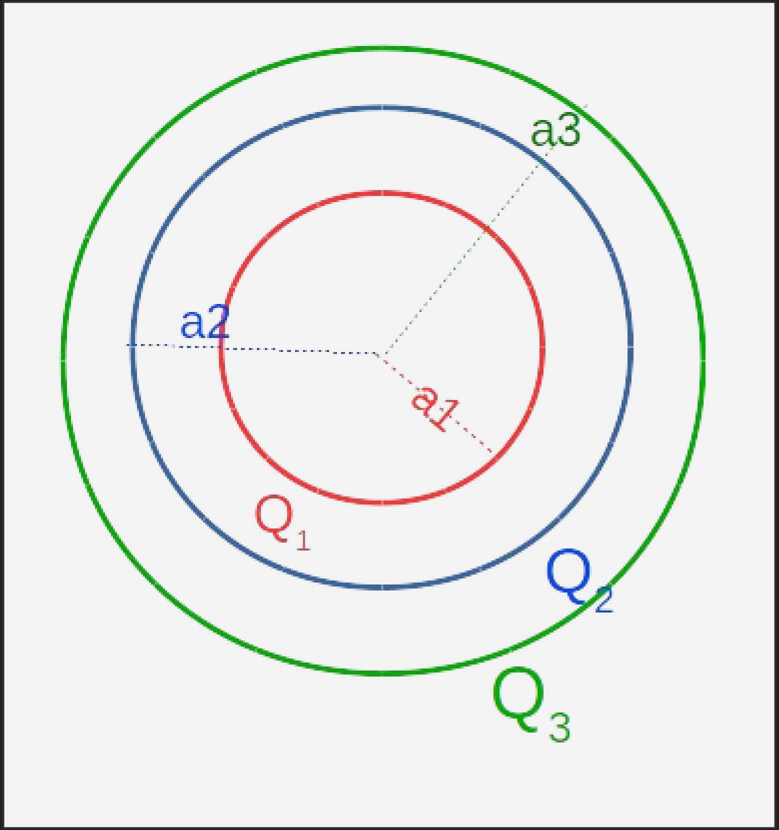
- ¿Cuál es la carga de cada una de las esferas? Detallar su distribución.
- Si se desconectan las esferas de las baterias y a continuación la esfera A_2 se une a tierra, calcular en esta situación, las cargas (detallar su distribución) y los potenciales de cada esfera.





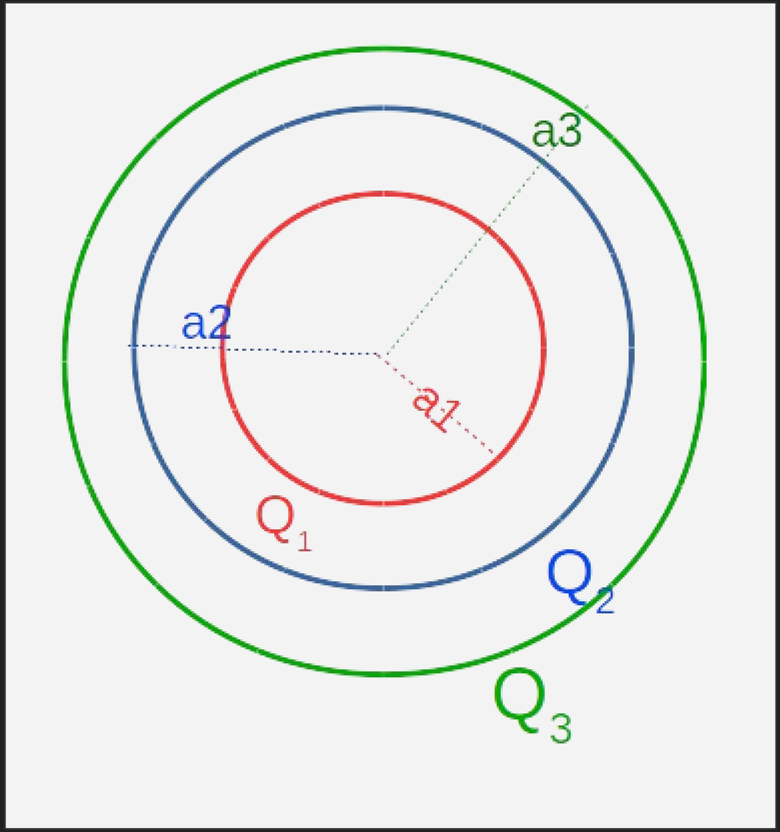
¿Cómo calculamos las cargas de cada casquete si el único dato que tenemos son los potenciales?

Para ello pensamos que cada casquete tiene una carga desconocida pero cada una de estas cargas debe ser tal que se cumpla que el potencial en cada superficie esférica sea igual al de la batería.



¿Cómo calculamos las cargas de cada casquete si el único dato que tenemos son los potenciales?

Para ello pensamos que cada casquete tiene una carga desconocida pero cada una de estas cargas debe ser tal que se cumpla que el potencial en cada superficie esférica sea igual al de la batería.

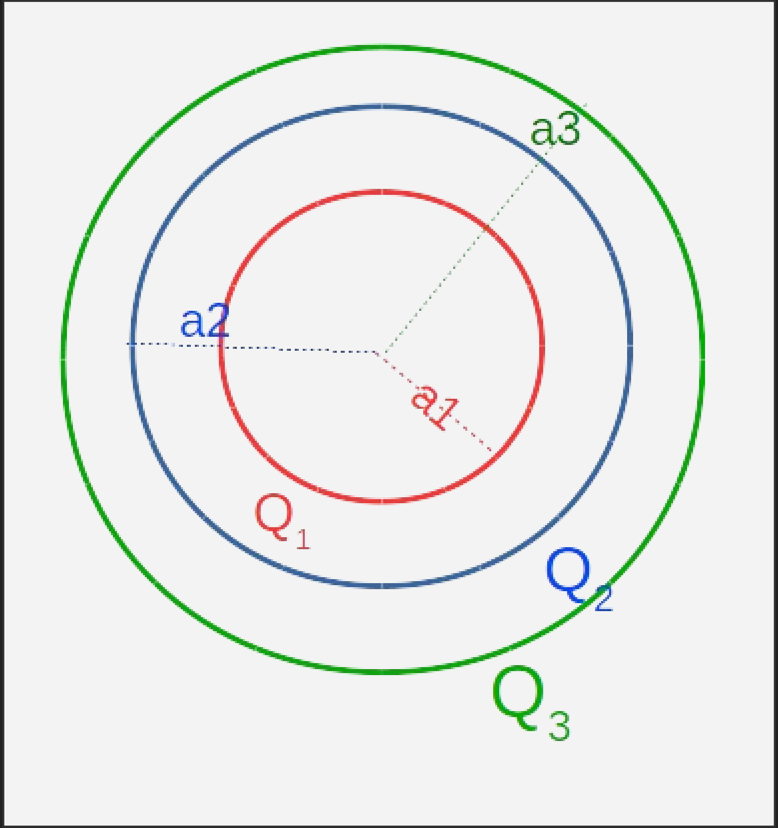


Conociendo el campo del casquete esférico, los campos individuales son...

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} kQ_1\hat{r}/r^2 & \text{si } r > a_1 \\ 0 & \text{si } r < a_1 \end{cases}$$

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} kQ_2\hat{r}/r^2 & \text{si } r > a_2 \\ 0 & \text{si } r < a_2 \end{cases}$$

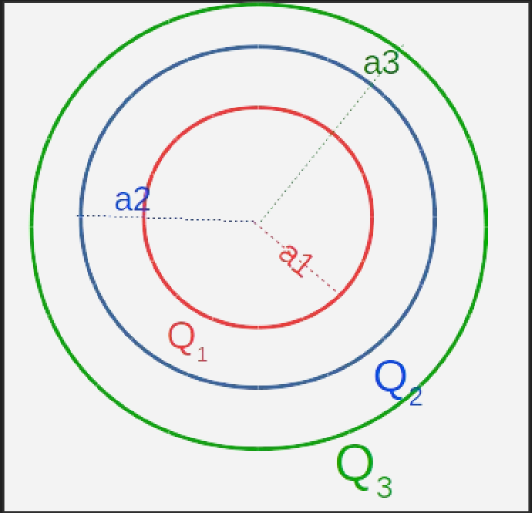
$$\vec{E}_3 = \begin{cases} kQ_3\hat{r}/r^2 & \text{si } r > a_3 \\ 0 & \text{si } r < a_3 \end{cases}$$



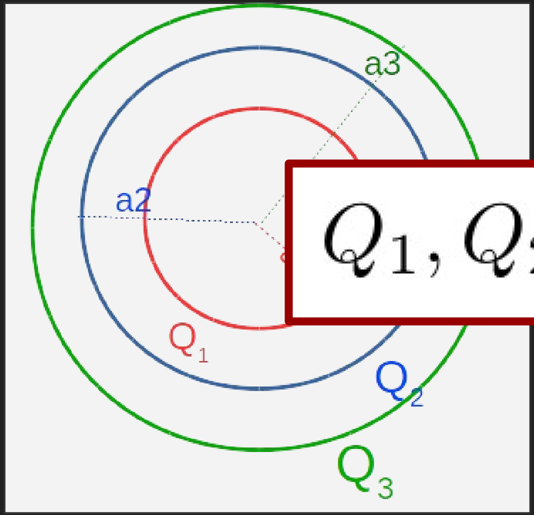
Haciendo una correcta superposición:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a_1 \\ \frac{kQ_1}{r^2}\hat{r} & \text{si } a_1 < r < a_2 \\ \frac{k(Q_1+Q_2)}{r^2}\hat{r} & \text{si } a_2 < r < a_3 \\ \frac{k(Q_1+Q_2+Q_3)}{r^2}\hat{r} & \text{si } r > a_3 \end{cases}$$

De acá puedo calcular el potencial.



$$V(r) = -\int \vec{E}(r) dr \hat{r} = \begin{cases} A & \text{si } r < a_1 \\ \frac{kQ_1}{r} + B & \text{si } a_1 < r < a_2 \\ \frac{k(Q_1+Q_2)}{r} + C & \text{si } a_2 < r < a_3 \\ \frac{k(Q_1+Q_2+Q_3)}{r} + D & \text{si } r > a_3 \end{cases}$$



7 incógnitas

$$Q_1, Q_2, Q_3 y A, B, C y D$$

$$V(r) = -\int \vec{E}(r) dr\hat{r} = \begin{cases} A & \text{si}\, r < a_1 \\ \frac{kQ_1}{r} + B & \text{si}\ a_1 < r < a_2 \\ \frac{k(Q_1+Q_2)}{r} + C & \text{si}\ a_2 < r < a_3 \\ \frac{k(Q_1+Q_2+Q_3)}{r} + D & \text{si}\ r > a_3 \end{cases}$$

Para obtener estas incógintas, aplicamos las condiciones de contorno sobre el potencial V(r).

$$A = V_1$$

$$\frac{kQ_1}{a_1} + B = V_1$$

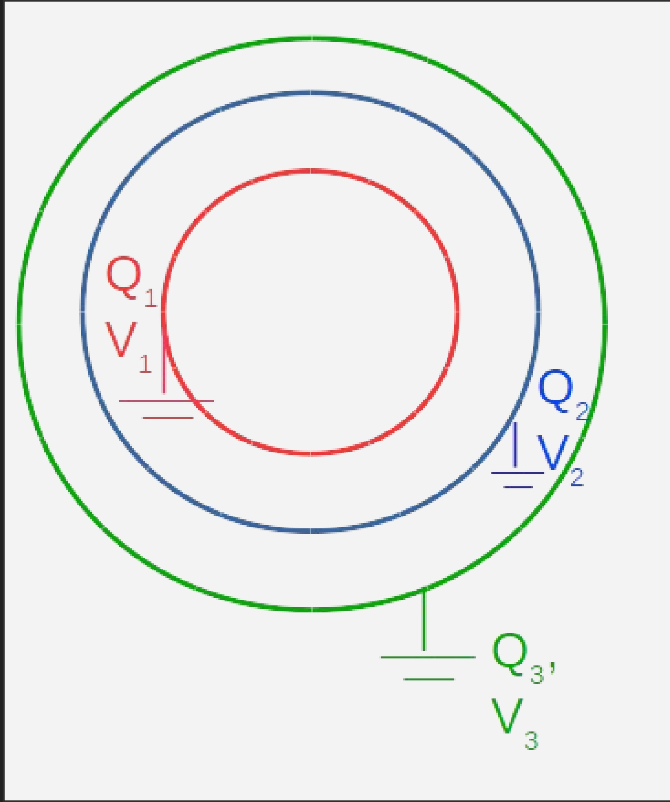
$$\frac{kQ_1}{a_2} + B = V_2$$

$$\frac{k(Q_1+Q_2)}{a_2} + C = V_2$$

$$\frac{k(Q_1+Q_2)}{a_3} + C = V_3$$

$$\frac{k(Q_1+Q_2+Q_3)}{a_3} + D = V_3$$

$$r \to \infty \quad \frac{k(Q_1+Q_2+Q_3)}{r} + D \to 0$$

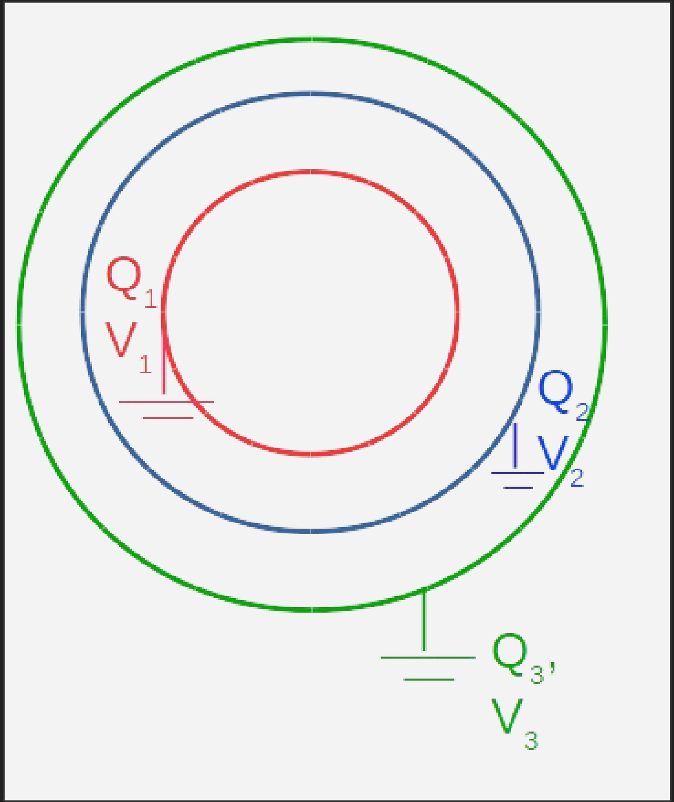


Otra manera de encarar este problema es a partir de la ecuación de Laplace

$$V = V(r)$$
$$\nabla^2 V = 0$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$V(r = a_1) = V_1$$
$$V(r = a_2) = V_2$$
$$V(r = a_3) = V_3$$
$$V(r \to \infty) = 0$$

Condiciones de contorno



Otra manera de encarar este problema es a partir de la ecuación de Laplace

$$V = V(r)$$

$$\nabla^2 V = 0$$

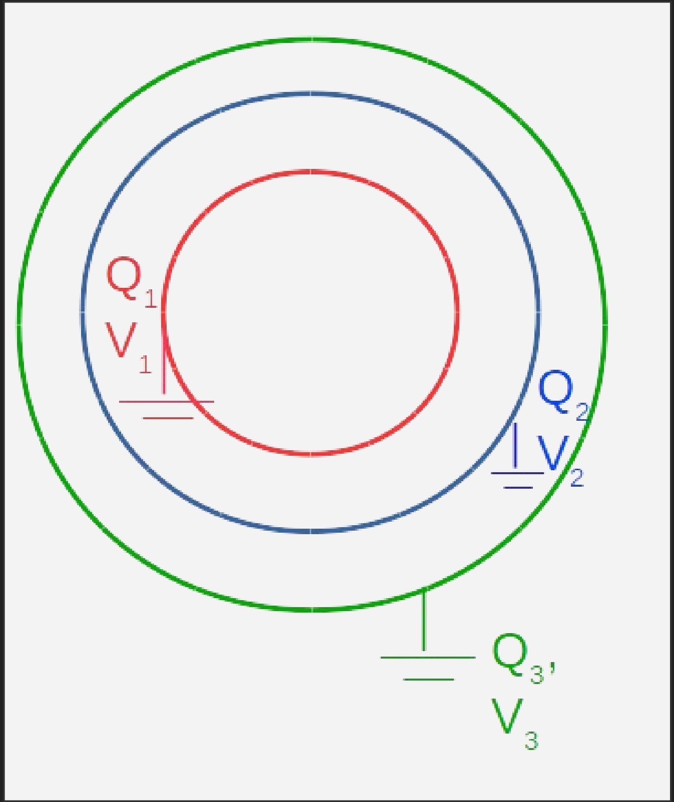
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$r^2 V'(r) = K$$

$$V'(r) = \frac{K}{r^2}$$

$$\int V'(r)dr = \int \frac{K}{r^2} dr V(r) = -\frac{K}{r} + A$$

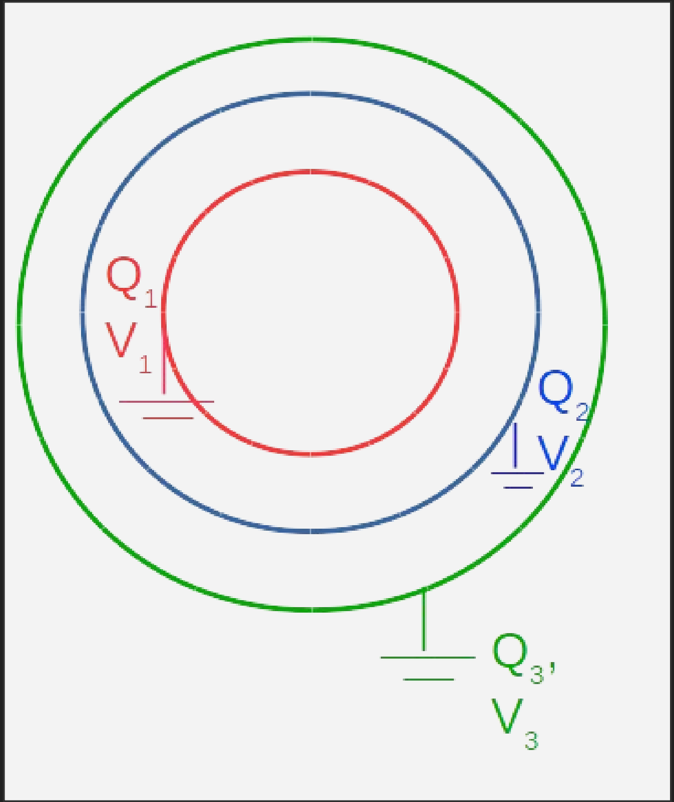


Otra manera de encarar este problema es a partir de la ecuación de Laplace

$$V = V(r)$$
$$\nabla^2 V = 0$$
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = 0$$

$$r^2 V'(r) = K$$
$$V'(r) = \frac{K}{r^2}$$
$$\int V'(r)dr = \int \frac{K}{r^2}dr$$

→ Por región



Otra manera de encarar este problema es a partir de la ecuación de Laplace

$$V = V(r)$$

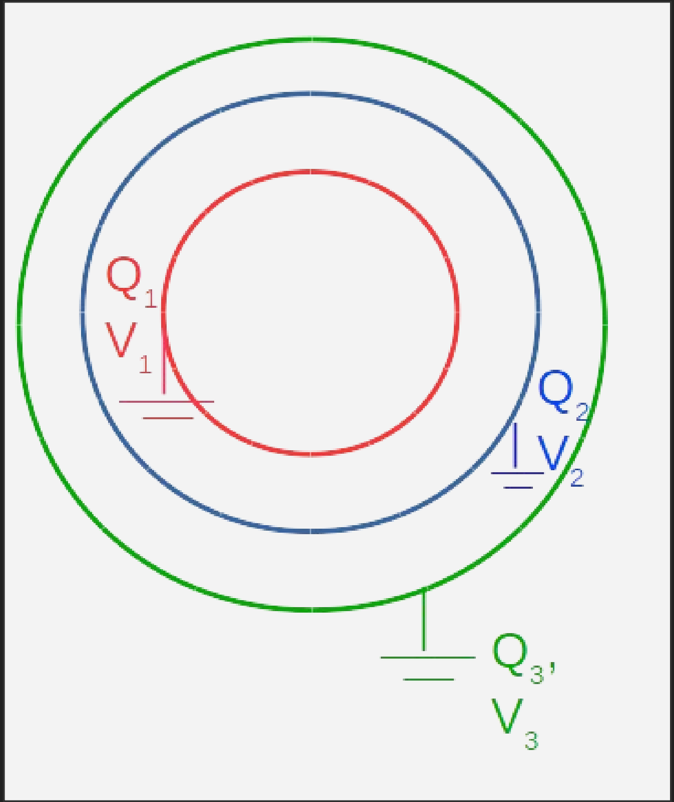
$$\nabla^2 V = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) = 0$$

$$V(r) = -\frac{K}{r} + A$$

Por región

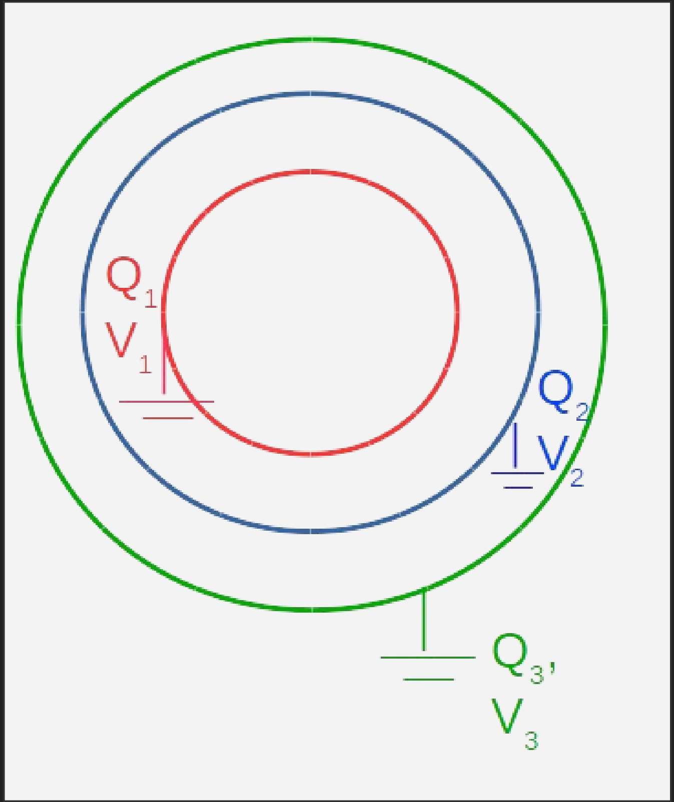


Aplicamos CC a la solución

$$V(r) = -\frac{K_i}{r} + A_i$$

$$V(r = a_1) = V_1$$
$$V(r = a_2) = V_2$$
$$V(r = a_3) = V_3$$
$$V(r \to \infty) = 0$$

Condiciones de contorno



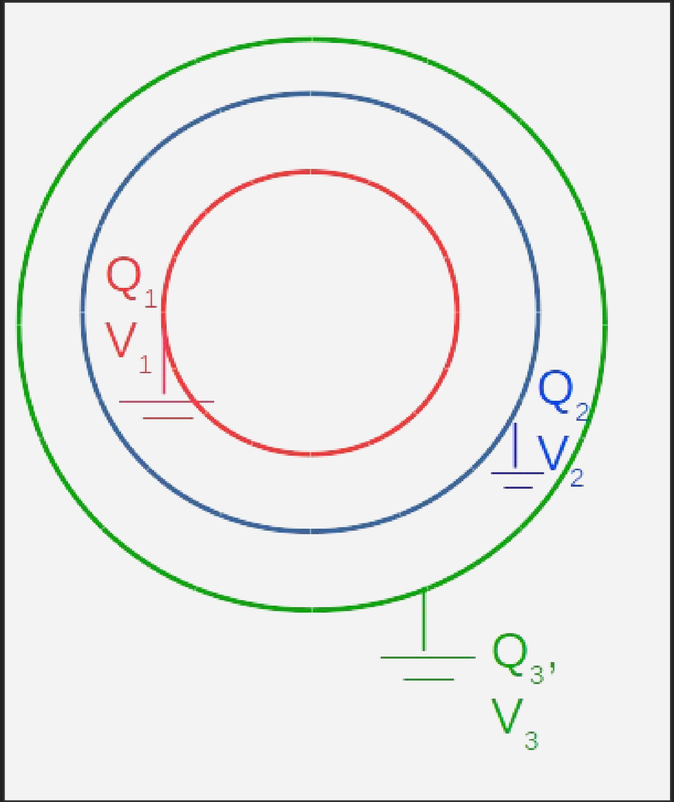
Aplicamos CC a la solución

$$V(r) = -\frac{K_i}{r} + A_i$$

Teniendo en cuenta que el potencial no debe divergir. Hay una singularidad en r=0. En realidad la condición

$$V(r = a_1) = V_1$$

Condiciones de contorno



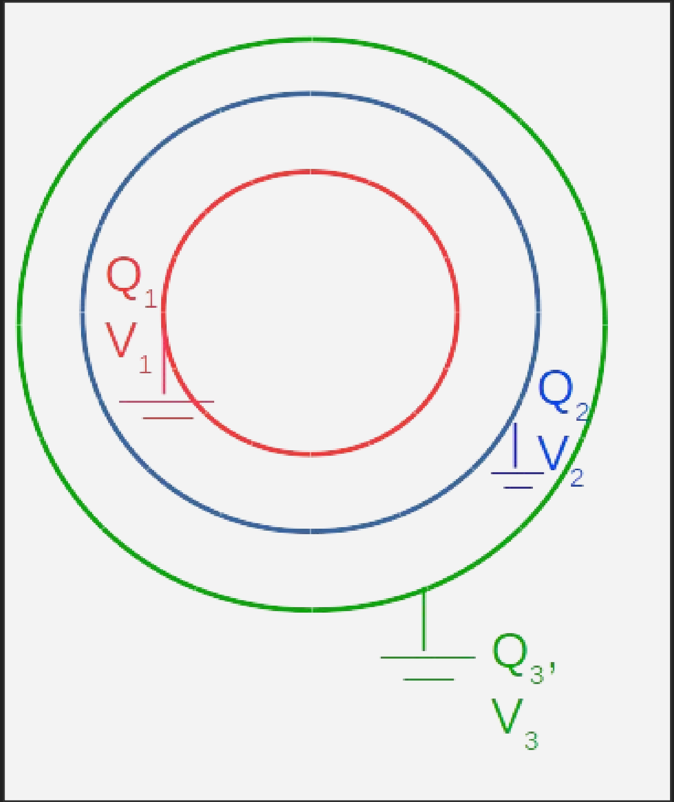
Es válida para $r<a_1$

Entonces en

$$V(r) = -\frac{K_1}{r} + A_1 \text{ para } r \leq a_1$$
$$K_1 = 0 \quad A_1 = V_1$$

Ahora

$$V(r) = -\frac{K_2}{r} + A_2 \text{ para } a_1 \leq r \leq a_2$$
$$V(r = a_1) = V_1 \quad V(r = a_2) = V_2$$
$$K_2 = \frac{V_2 - V_1}{1/a_1 - 1/a_2}$$
$$A_2 = V_1 + \frac{K_2}{a_1}$$



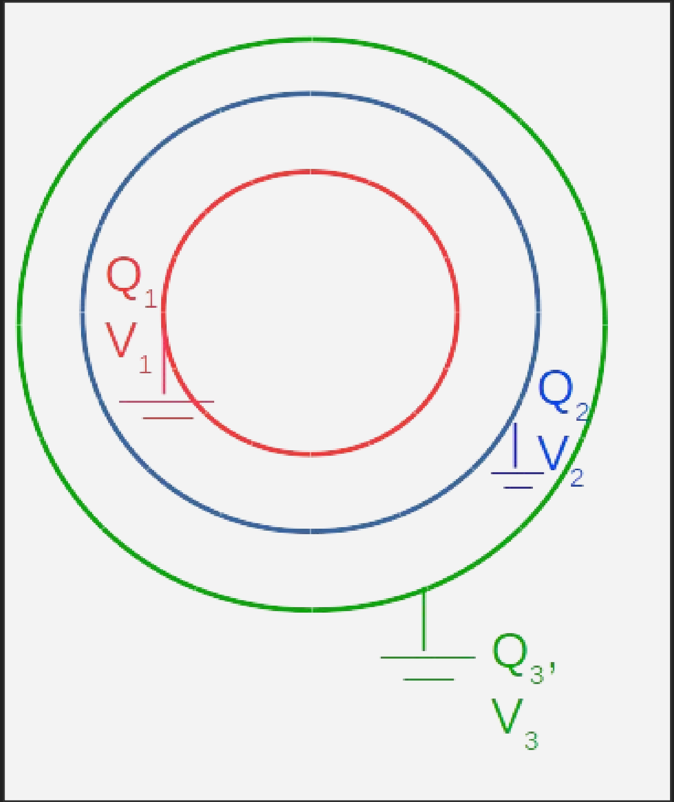
De la misma manera

$$V(r) = -\frac{K_3}{r} + A_3 \text{ para } a_2 \leq r \leq a_3$$

$$V(r = a_2) = V_2 \quad V(r = a_3) = V_3$$

$$K_3 = \frac{V_3 - V_2}{1/a_2 - 1/a_3}$$

$$A_3 = V_2 + \frac{K_3}{a_2}$$



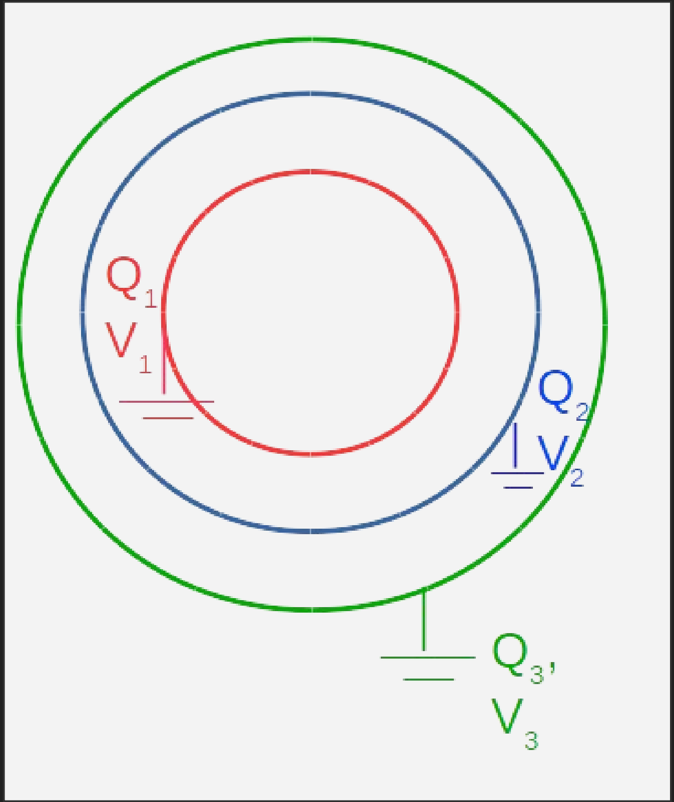
Y así….

$$V(r) = -\frac{K_4}{r} + A_4 \text{ para } a_3 \leq r$$

$$V(r = a_3) = V_3 \quad V(r \to \infty) = 0$$

$$K_3 = -V_3 a_3$$

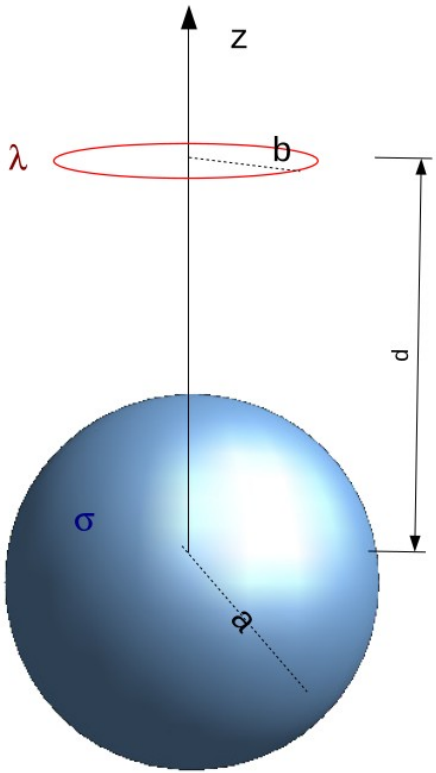
$$A_4 = 0$$



Ticket de salida

Problema integrador Guía 1

Dada una esfera de radio a y densidad superficial de carga uniforme σ y un anillo de radio b con dens lineal de carga uniforme λ, los centros de ambas figuras distan en d como indica la figura, calcular:



a) el campo eléctrico en el eje z,

b) el potencial de la configuración en todo el espacio lejos de la distribución (*Ayuda: usar desarrollo m polar*),

c) la relación entre λ y σ para que el momento monopolar sea nulo. Calcule el dipolo de la configuració este caso.

d) Determine la fuerza que siente una carga q que se coloca en el centro del anillo.

e) Para el caso del inciso (c) (momento monopolar nulo), pasamos a un sistema adimensionalizado $\sigma/\epsilon_0 = 1$ y $a = 1$.

* Graficar el $E_z(z)$ en el caso $d = 0$ y $b = 1{,}5$, qué simetría se observa?
* Graficar el $E_z(z)$ en el caso $d = 2$ y $b = 1{,}5$, se mantiene la simetría? por qué?
* Para $d = 2$ y $b = 1{,}5$, hallar el $z_a > 0$ a partir del cual el error de la aproximación dipola menor al 1 %. En otras palabras, hallar el primer valor de z donde $|E_z(z) - E_z^{dip}(z)| < 0{,}01$ $E_z^{dip} = dV_{dip}/dz$.
* Repetir el punto anterior para otros valores (razonables) de b, cambia el valor de z_a?