Clase 02

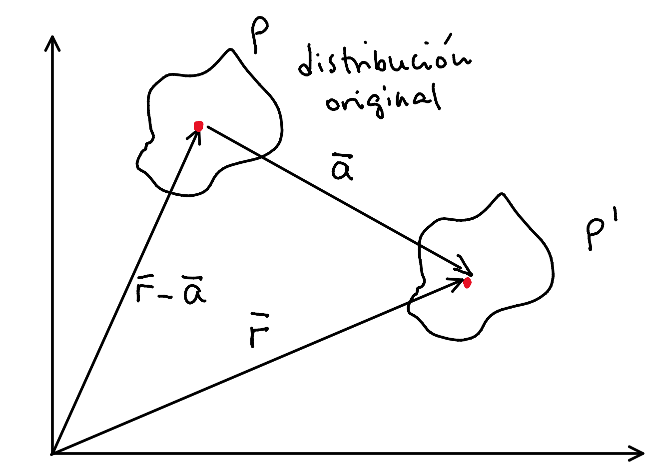
miércoles, 3 de febrero de 2021 12:28

1.4. Simetrías

1.4.1. Transformaciones del sistema de cargas

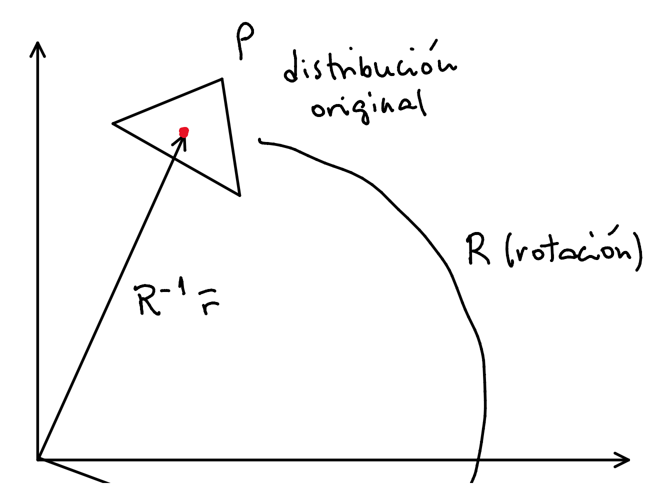
Imagenemos que tenemos $\rho(\bar{r})$ (distribución de carga, carga por unidad de volumen). Vamos a escribir matemáticamente el concepto de traslador | rotar | reflejar dicha distribución de carga.

a) Traslaciones



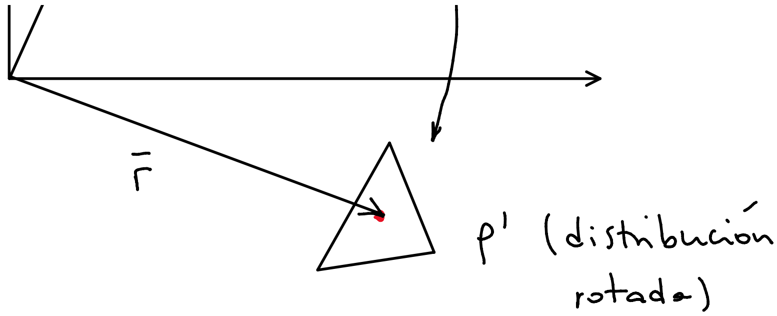
$$\rho'(\bar{r}) = \rho(\bar{r} - \bar{a})$$

b) Rotaciones



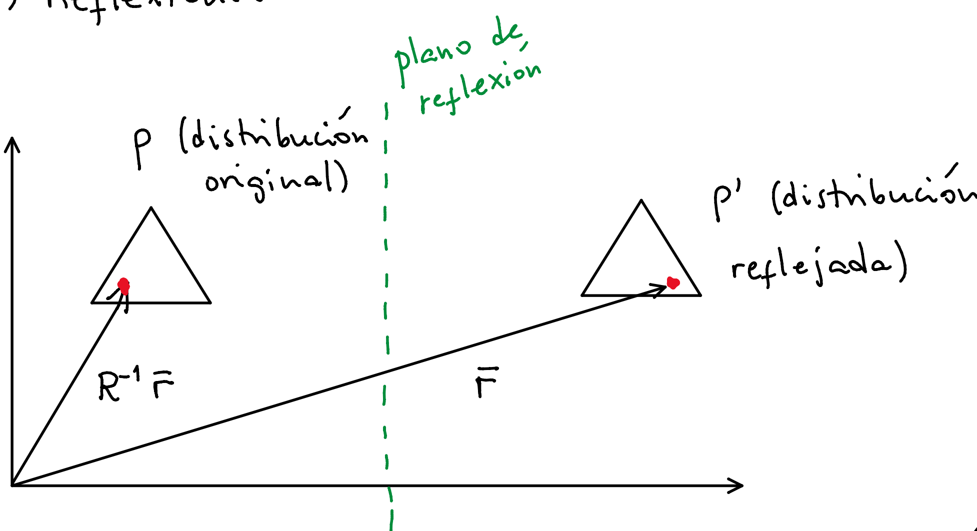
$$\rho'(\bar{r}) = \rho(R^{-1}\bar{r})$$

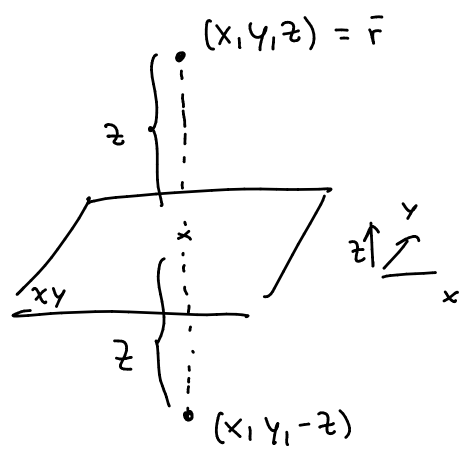
Por ejemplo: rotación



Por ejemplo: rotación en ángulo θ alrededor del eje z se representa como $R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Reflexiones





$$\rho'(\bar{r}) = \rho(R^{-1}\bar{r})$$

$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

matriz de reflexión respecto al plano xy

Nota: Las matrices que representan rotaciones tienen determinante $+1$, mientras que las representan reflexiones tiene determinante ± 1.

1.4.2. Simetrías

Diremos que una distribución de cargas es simétrica

Diremos que una distribución de cargas es simétrica ante cierta transformación si la distribución transformada (ρ') coincide con la distribución sin transformar (ρ).

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet \text{ Simetría de traslaciones:} & \rho(r) = \rho(\bar{r} - \bar{a}) \\ \bullet \text{ Simetría ante rotación } R\text{:} & \rho(\bar{r}) = \rho(R^{-1}\bar{r}) \\ \bullet \text{ Simetría ante reflexión } R\text{:} & \rho(\bar{r}) = \rho(R^{-1}\bar{r}) \end{array}\right\} \text{CONDICIONES PARA QUE EL SISTEMA TENGA SIMETRÍA}$$

¿Qué condiciones imponen las simetrías sobre el campo eléctrico?
(Ejercicio 7)

a) Traslaciones (suponemos que $\rho(\bar{r}) = \rho(\bar{r} - \bar{a})$ para cierto $\bar{a}$)

$$\bar{E}(\bar{r}) = K_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\, \rho(\bar{r}')\, \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \overset{\bar{u} \equiv \bar{r}' + \bar{a}}{=}$$

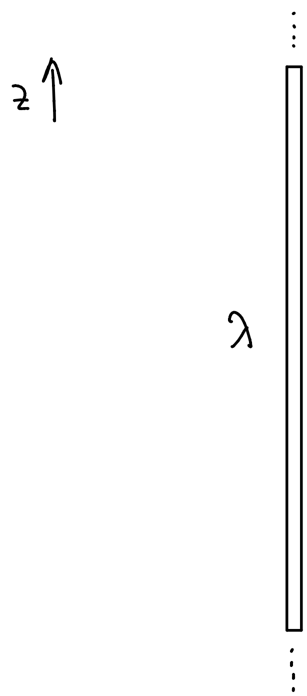
$$= K_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{u}\, \rho(\bar{u} - \bar{a})\, \frac{\bar{r} - \bar{u} + \bar{a}}{|\bar{r} - \bar{u} + \bar{a}|^3} \overset{\text{SIMETRÍA: } \rho(\bar{u}-\bar{a}) = \rho(\bar{u})}{=}$$

$$= K_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{u}\, \rho(\bar{u}) \cdot \frac{(\bar{r} + \bar{a}) - \bar{u}}{|(\bar{r} + \bar{a}) - \bar{u}|^3} =$$

$$= \bar{E}(\bar{r} + \bar{a})$$

$$\therefore \quad \boxed{\bar{E}(\bar{r}+\bar{a}) = \bar{E}(\bar{r})} \qquad (\forall \bar{r})$$

Ejemplo (P01E08(a)i):



hilo infinito cargado uniformemente

Hay simetría ante traslaciones en cualquier vector $\bar{a}$ de la forma: $\bar{a} = a\hat{e}_z$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Sabemos entonces que vale:

$$\bar{E}(\bar{r}+\bar{a}) = \bar{E}(\bar{r}) \Rightarrow$$

$$\underset{(\text{tomo } a \neq 0)}{\Rightarrow} \frac{\bar{E}(\bar{r}+\bar{a}) - \bar{E}(\bar{r})}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{a \to 0} \frac{\bar{E}(\bar{r}+\bar{a}) - \bar{E}(\bar{r})}{a}}_{\frac{\partial \bar{E}}{\partial z}} = 0 \qquad (\bar{a} = a\hat{e}_z)$$

$$\therefore \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial E}{\partial z} = 0$$

$\therefore$ $\bar{E}$ no depende de z.

b) Rotaciones (R)

$$\bar{E}(\bar{r}) = k_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}' \, \rho(\bar{r}') \frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} \overset{\bar{u} \equiv R\bar{r}'}{=}$$

$$= k_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{u} \underbrace{|\det(R^{-1})|}_{=1} \rho(R^{-1}\bar{u}) \frac{\bar{r}-R^{-1}\bar{u}}{|\bar{r}-R^{-1}\bar{u}|^3} \overset{\text{SIMETRÍA: } \rho(\bar{u}) = \rho(R^{-1}\bar{u})}{=}$$

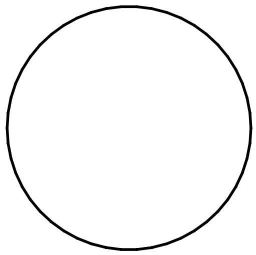
$$= k_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{u} \, \rho(u) \frac{\bar{r}-R^{-1}\bar{u}}{|\bar{r}-R^{-1}\bar{u}|^3} \overset{\text{aplico } R}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow R\bar{E}(\bar{r}) = k_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{u} \, \rho(\bar{u}) \cdot \frac{R\bar{r}-\bar{u}}{|R\bar{r}-\bar{u}|^3} =$$

$$= \bar{E}(R\bar{r})$$

$$\therefore \quad \boxed{R\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}(R\bar{r})}$$

Ejemplo (P01E08(d)i):

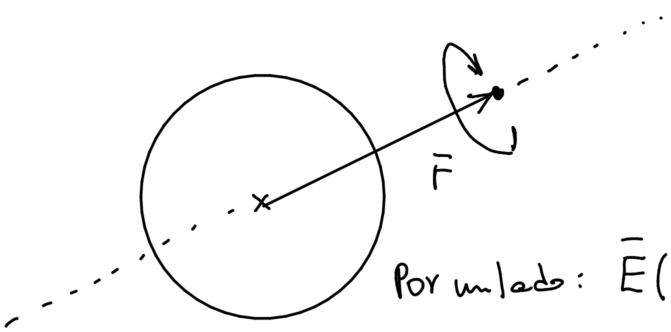


$$\rho(\bar r) = A|\bar r|^n$$

Hay simetría de rotación respecto a todo eje que contenga al centro de la esfera, en cualquier ángulo.

$$\Downarrow$$

$$R\bar E(\bar r) = \bar E(R\bar r)$$



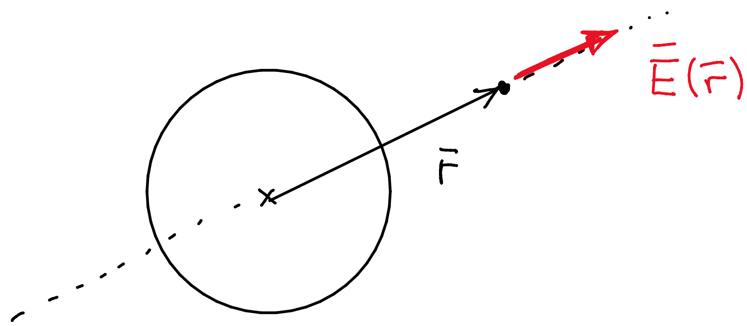
Elegimos R como una rotación alrededor del vector $\bar r$ (es simetría)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Por un lado:} & \bar E(\overbrace{R\bar r}^{\bar r}) = E(\bar r) \\ \text{Por simetría:} & R\bar E(\bar r) = \bar E(R\bar r) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R\bar E(\bar r) = \bar E(\bar r) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\bar E$ tiene que estar contenido en el eje de rotación

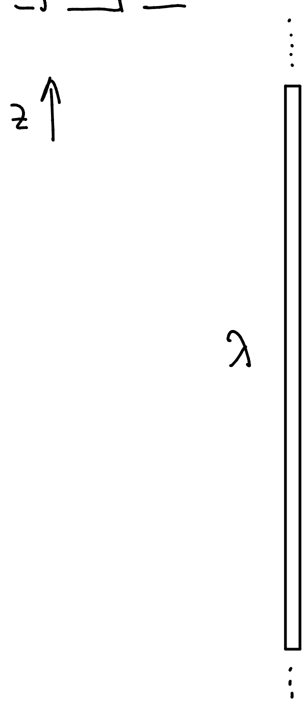
$$\therefore \quad \bar E(\bar r) = E_r(\bar r)\hat e_r + \cancel{E_\theta(\bar r)\hat e_\theta} + \cancel{E_\varphi(\bar r)\hat e_\varphi}$$



c) Reflexiones (R)

Sale que: $\boxed{R\,\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}(R\bar{r})}$

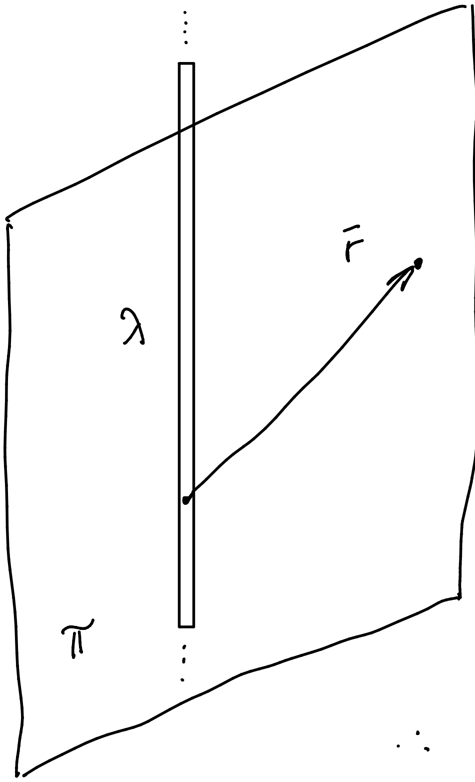
<u>Ejemplo</u> (P01E08(a)i):



hilo infinito
cargado uniformemente

Hay simetría ante reflexiones respecto a planos:

- Que contengan al hilo;
- Perpendiculares al hilo.



π contiene el hilo y a $\bar{r}$

R: reflexión respecto π

$$R\bar{r} = \bar{r}$$

Por simetría ante reflexiones respecto a π: $\boxed{R\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}(\underbrace{R\bar{r}}_{\bar{r}}) = \bar{E}(\bar{r})}$

$\therefore$ Sólo puede haber componentes no nulas de $\bar{E}$ dentro del plano π.

$$\bar{E}(\bar{r}) = E_\rho(\bar{r})\,\hat{e}_\rho + \cancel{E_\varphi(\bar{r})\,\hat{e}_\varphi} + E_z(\bar{r})\,\hat{e}_z$$

1.4.3. Simetrías del potencial eléctrico

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\bar{\nabla}\Phi(\bar{r}) \overset{\text{en cartesianas}}{=} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$

$$\Phi(\bar{r}) = K_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}' \, \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \qquad \text{(vale para } \rho \text{ acotada)}$$

Implicancias de las simetrías sobre el potencial:

a) Traslaciones $(\bar{a})$

$= -E_z$

a) Traslaciones $(\bar{a})$

$$\Phi(\bar{r}) = \Phi(\bar{r}+\bar{a}) \;\Big|\xrightarrow[\bar{a}=a\hat{e}_z]{\text{hilo infinito}} \qquad \overbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}^{=-E_z} = 0 \Rightarrow E_z = 0$$

b) Rotaciones (R)

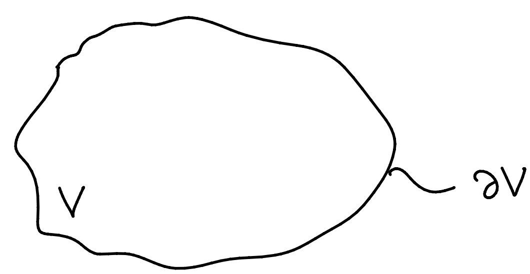
$$\Phi(\bar{r}) = \Phi(Rr)$$

c) Reflexiones (R)

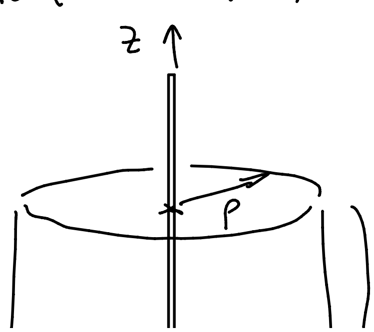
$$\Phi(\bar{r}) = \Phi(R\bar{r})$$

1.5. Ley de Gauss

$$\oint_{\partial V} \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dV.\,\rho = \frac{\overset{\text{carga encerrada en } V}{Q_{enc.}}}{\varepsilon_0}$$

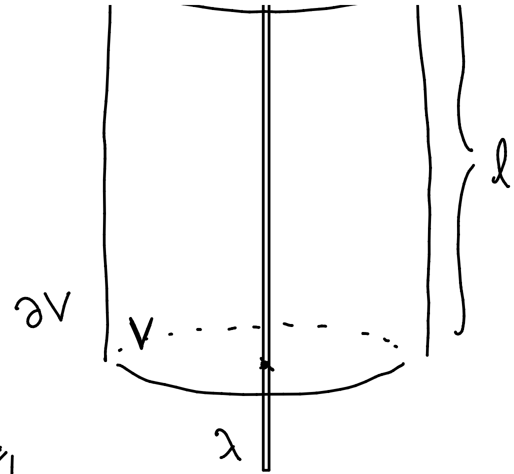


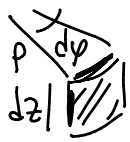
Ejemplo (P01E08(a)ii)



Por simetrías sale que:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \underbrace{E_\rho(\rho)}_{}\,\hat{e}_\rho$$





$$E(\bar{r}) = \underbrace{E_\rho(\rho)}_{} e_\rho$$

Para hallarla podemos usar la Ley de Gauss. Primero calculamos:

$$Q_{enc.} = \lambda \ell$$

$$\oint_{\partial V} \bar{E} \cdot d\bar{s} = \; ?$$

Tapas: flujo nulo porque $\bar{E} \perp d\bar{s}$

Cara lateral: $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\ell} dz \, \rho \, E_\rho(\rho) = 2\pi \ell \rho E_\rho(\rho)$

$$\left[\begin{array}{l} d\bar{s} = \rho \, d\varphi \, dz \, \hat{e}_\rho \\ \bar{E} = E_\rho(\rho) \, \hat{e}_\rho \end{array} \right]$$

$$\therefore \oint_{\partial V} \bar{E} \cdot d\bar{s} = 2\pi \ell \rho E_\rho(\rho)$$

Usando Gauss: $\displaystyle\oint_{\partial V} \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q_{enc.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\pi \cancel{\ell} \rho E_\rho(\rho) = \frac{\lambda \cancel{\ell}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi \rho \varepsilon_0} = \frac{2K_e \lambda}{\rho}$$

$$\therefore \bar{E}(\bar{r}) = \frac{2K_e \lambda}{\rho} \hat{e}_\rho .$$

$$\therefore \quad \bar{E}(\bar{r}) = \frac{2K_e \lambda}{\rho} \hat{e}_\rho .$$