Clase 04

lunes, 8 de febrero de 2021

1.6. Potencial eléctrico y energía

Como $\text{rot}\,\bar{E} = \bar{0} \Rightarrow \exists\, \Phi \,/\, \bar{E} = -\bar{\nabla}\Phi$

↳ Potencial electrostático

1.6.1. Cálculo del potencial eléctrico

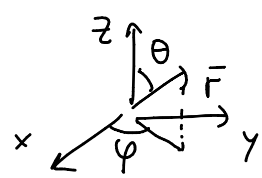
Ejemplo: $\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 \quad \forall \bar{r}$

Busco $\Phi \,/\, \bar{E}_0 = -\bar{\nabla}\Phi \Rightarrow (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}) = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$

$$\Phi(\bar{r}) = -\bar{E}_0 \cdot \bar{r} + \underbrace{\Phi_0}_{\text{cte}}$$

Ejemplo: (Potencial de una carga puntual centrada en el origen)

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{K_e q}{r^2}\,\hat{e}_r$$



Busco $\Phi \,/\, \bar{E} = -\bar{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\hat{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi$

$$\bar{E} = \frac{K_e q}{r^2}\,\hat{e}_r$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \Phi$ no depende de θ

$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \Phi$ no depende de φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \implies \Phi \text{ no depende de } \varphi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{K_e q}{r^2} \implies \Phi(\bar{r}) = \frac{K_e q}{r} + \underbrace{\Phi_0}_{\text{cte}}$$

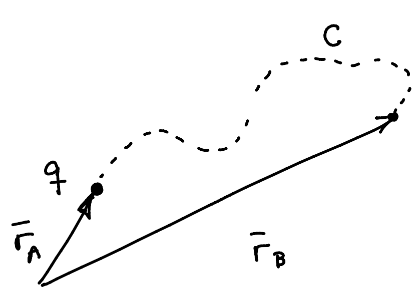
Es común fijar el valor del potencial en el infinito y tomarlo $= 0 \implies \Phi_0 = 0$

Para distribuciones acotadas

$$\Phi(\bar{r}) = K_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}' \cdot \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \qquad (\text{vale para } \rho \text{ acotada})$$

1.6.2. Trabajo de la fuerza electrostática

Tenemos cierto $\bar{E}(\bar{r})$.



$$W^C_{A \to B} = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{l} = q \int_C \overbrace{\bar{E}}^{-\bar{\nabla}\Phi} \cdot d\bar{l} = -q \int_C \bar{\nabla}\Phi \cdot d\bar{l} =$$

$$= -q\left[\Phi(\bar{r}_B) - \Phi(\bar{r}_A)\right] \rightarrow$$ El trabajo depende sólo de los puntos inicial y final de C y no de la curva

$$\parallel$$

$$W_{A\to B}$$

$\Downarrow$

$\bar{F}$ electrostática es conservativa

$(\text{rot}\,\bar{E} = \bar{0})$

$U_{pot.}(\bar{r}) = q \cdot \Phi(\bar{r}) \leftarrow$ energía potencial de la carga q en el potencial $\Phi(\bar{r})$

$\downarrow$

$$W_{A\to B} = U_{pot.}(\bar{r}_A) - U_{pot.}(\bar{r}_B)$$

1.6.3. Unidades del potencial eléctrico

$\phi \rightarrow$ energía potencial por unidad de carga

$$[\phi] = J/C = V \quad (\text{Volt})$$

$\phi \rightarrow \underbrace{\text{campo eléctrico}}_{\text{fuerza por unidad de carga}} \times$ distancia

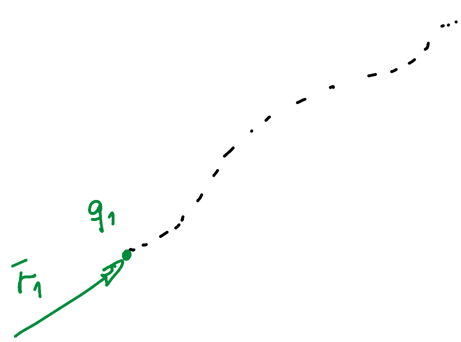
$1\, N/C = 1\, V/m$ (dos unidades distintas para el campo)

1.6.4. Energía de una configuración de cargas

Vamos a decir que la energía potencial electrostática de una configuración de cargas coincide con el trabajo necesario para formar dicha distribución de cargas (trayendo cargas individuales desde infinito)

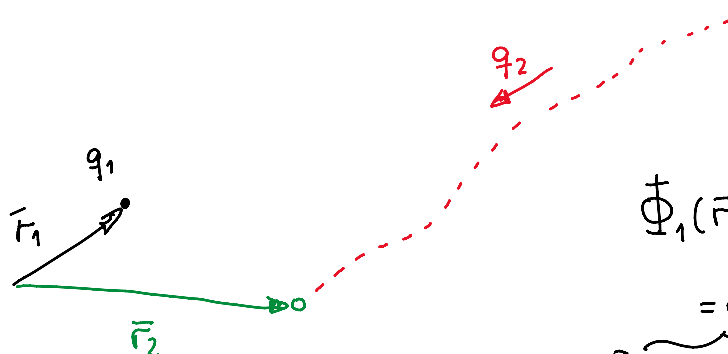
Ejemplo: Energía potencial de un sistema de dos cargas

1) Traemos q_1 desde infinito a la posición $\bar{r}_1$



$$W_1 = 0$$

2)



$$\Phi_1(\bar{r}) = \frac{K_e q_1}{|\bar{r} - \bar{r}_1|}$$

$$W_2 = q_2 \left[\underbrace{\Phi_1(|\bar{r}| = \infty)}_{=0} - \Phi_1(\bar{r} = \bar{r}_2) \right] =$$

$$= \frac{K_e q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|}$$

$$\therefore\ U_{pot.} = W_1 + W_2 = \frac{K_e\, q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|}.$$

——— o ———

En general: energía potencial de n cargas

$$U_{pot.} = \frac{K_e}{2} \sum_{i \neq j}' \sum_{j=1}^{n}' \frac{q_i q_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|}$$

Para distribuciones de carga continuas:

$$U_{pot.} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}\ \rho(\bar{r})\ \Phi(\bar{r})$$

Usando que $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div}\bar{E}$ y

$\operatorname{div}(\phi \bar{E}) = \phi \operatorname{div}\bar{E} + \bar{\nabla}\phi \cdot \bar{E}$

$$U_{pot.} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}\ |\bar{E}(\bar{r})|^2$$ $\rightarrow$ campo eléctrico "almacena" energía

1.6.5. Expansión multipolar del potencial eléctrico

Supongamos que tenemos una $\rho(\bar{r})$ acotada ($\exists R > 0 \ /\ \rho(\bar{r}) = 0$ si $|\bar{r}| > R$). El potencial está dado por:

$$\Phi(\bar{r}) = K_e \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\ \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

Vamos a sacar una aproximación para Φ para $|\bar{r}|$ "grande".

$$\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|} = \frac{1}{|r\hat{e}_r - r'\hat{e}_{r'}|} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{|\hat{e}_r - \frac{r'}{r}\hat{e}_{r'}|} =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\,\hat{e}_r\cdot\hat{e}_{r'}}} \overset{\text{Taylor para } \frac{r'}{r}\ll 1}{=}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 + (\hat{e}_r\cdot\hat{e}_{r'})\frac{r'}{r} + \frac{3(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_{r'})^2-1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)\right]$$

Si realmente es $r'/r \ll 1$, podemos aproximar:

$$\Phi(\bar{r}) \approx \frac{K_e}{r}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\,\rho(\bar{r}') \; + \qquad \leftarrow \text{TÉRMINO MONOPOLAR}$$

$$+ \frac{K_e}{r^2}\,\hat{e}_r\cdot\int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\,\bar{r}'\rho(\bar{r}') \; + \qquad \leftarrow \text{TÉRMINO DIPOLAR}$$

$$+ \frac{K_e}{r^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\,\rho(\bar{r}')\,\frac{3(\hat{e}_r\cdot\bar{r}')^2-1}{2} \qquad \leftarrow \text{TÉRMINO CUADRUPOLAR}$$

Lo anterior se conoce como el desarrollo multipolar de Φ.

Definimos:

- $Q \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\,\rho(\bar{r}')$ $\leftarrow$ momento monopolar (carga total)

- $Q \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\, \rho(\bar{r}')$ ← momento monopolar (carga total)

- $\bar{p} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\, \bar{r}'\, \rho(\bar{r}')$ ← momento dipolar

- $Q_{ij} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\, (3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2)\, \rho(\bar{r}')$ ← momento cuadrupolar

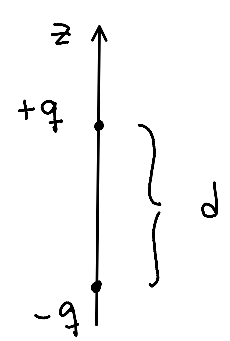
ej. $\hookrightarrow$ $Q_{xx} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\, (3x'^2 - r'^2)\, \rho(\bar{r}')$

$$Q_{xy} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}'\, 3x'y'\, \rho(\bar{r}')$$

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(\bar{r}) = \underbrace{k_e \frac{Q}{r}}_{\sim 1/r} + \underbrace{k_e \frac{\bar{p}\cdot\bar{r}}{r^3}}_{\sim 1/r^2} + \underbrace{\frac{k_e}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5}}_{\sim 1/r^3}$$

Ejemplo: Hallar el primer término no nulo del desarrollo multipolar para el potencial de dos cargas q y $-q$ separadas una distancia d.



(−q está en el origen)

Para el caso discreto:

- $Q = \sum_i q_i$

- $\bar{p} = \sum_i q_i \bar{r}_i$

(Q_{ij} análogo)

origen

(Qij análogo)

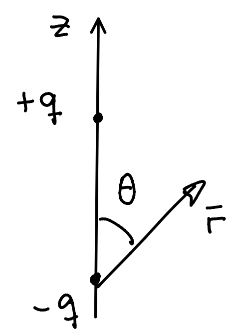
En este caso:

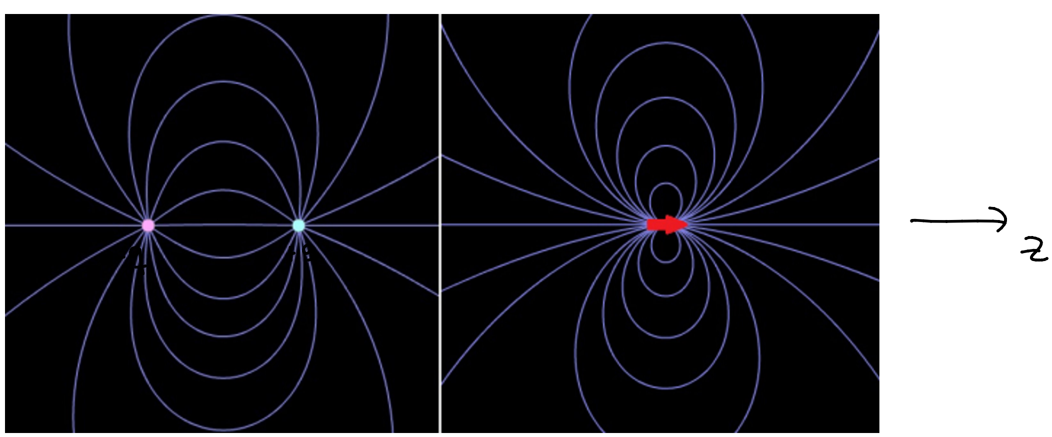
$$Q = q - q = 0$$

$$\bar{p} = -q \cdot \bar{0} + q \cdot d\hat{e}_z = qd\hat{e}_z$$

$$\Phi(\bar{r}) = K_e \frac{qd\hat{e}_z \cdot \bar{r}}{r^3} \overset{\hat{e}_z \cdot \bar{r} = r\cos\theta}{=} K_e \frac{qd\cos\theta}{r^2}$$

Observación: los momentos multipolares dependen del sistema de referencia. El primer momento multipolar no nulo es siempre independiente del sistema de referencia.





$$\xrightarrow[d \to 0]{}$$

$$\Phi(\bar{r}) = K_e \frac{q}{|\bar{r}|} - K_e \frac{q}{|\bar{r} - d\hat{e}_z|} \xrightarrow[d \to 0]{} ?$$

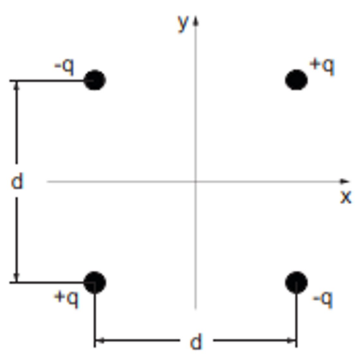
$$\phi(\bar r) \xrightarrow[d\to 0]{} k_e \frac{\bar r}{r^3}\cdot \lim_{d\to 0}(q\, d\, \hat e_z) = k_e \frac{\bar p\cdot \bar r}{r^3} \nearrow \text{campo de un dipolo}$$

Defino: $$\bar p \equiv \lim_{\substack{d\to 0\\ qd\ \text{fijo}}} q\, d\, \hat e_z \quad \leftarrow \text{dipolo eléctrico}$$

$\downarrow$

fuente de campo eléctrico

Ejemplo (P01E18(b)):



$\Phi(\bar r)$

$|\bar r| = r$

$$\lim_{|\bar r|\to\infty}\left[|\bar r|^2\, \Phi(\bar r)\right] = 0 \quad ?$$

$$\Phi(\bar r) = k_e \frac{Q}{r} + k_e \frac{\bar p\cdot \bar r}{r^3} + \frac{k_e}{2}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5} + \dots$$

$$\lim_{|\bar r|\to\infty}\left[|\bar r|^2\, \Phi(\bar r)\right] = \lim_{r\to\infty}\Big[\underbrace{k_e Q r + k_e \bar p\cdot \hat e_r}_{} + \underbrace{\cancel{\frac{k_e}{2}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^3}}}_{\sim 1/r\ \to 0} \cancel{+\dots}\Big]$$

$Q = 0$

$\bar p = \sum_i q_i \bar r_i = \bar 0$

$$\therefore \lim_{r\to\infty}\left[r^2\, \Phi(\bar r)\right] = 0.$$

$\therefore$ VERDADERO.