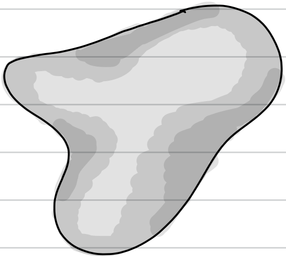
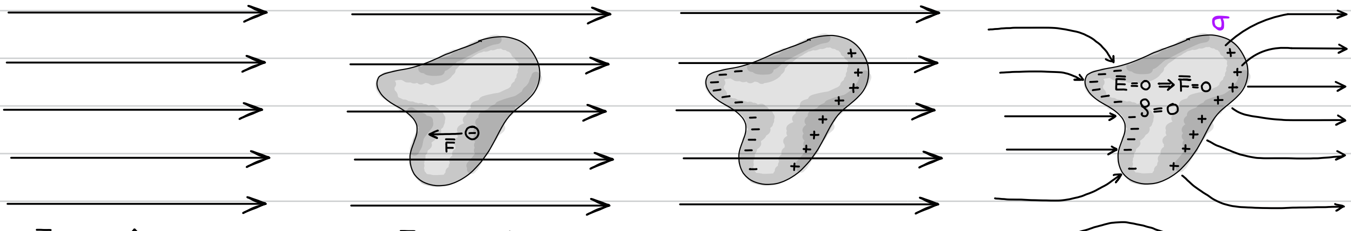
CONDUCTORES



Conductor perfecto o ideal: modelo que usamos para describir materia conductora, que tiene la capacidad de anular en su interior todo campo eléctrico estático



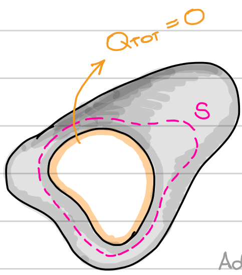
$\bar{E}_{ext} = E_0\,\hat{x}$ $\qquad$ $\bar{E}_{ext} = E_0\,\hat{x}$

$\bar{F} = q\,\bar{E}_{ext} = q\,E_0\,\hat{x}$

$\bar{E} = \bar{E}_{ext} + \bar{E}_{self}$

19 En una región donde hay un campo eléctrico uniforme se introduce un conductor, de forma arbitraria, que tiene un hueco en su interior. Demostrar que no se inducen cargas sobre la superficie interior del conductor. ¿Cuánto vale el campo eléctrico en el hueco?.

$\bar{E}_{ext} = E_0\,\hat{x}$ $\qquad$ $\bar{E}_{ext} = E_0\,\hat{x}$



Tomando la superficie S y aplicando la ley de Gauss

$$\oint_S \bar{E}(\bar{r}_S)\, d\bar{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad Q_{enc} = 0$$

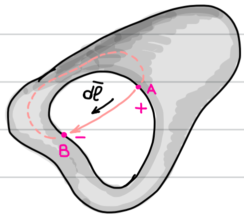
Adentro del conductor el campo es nulo

$$0 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon}$$

¿Es suficiente saber que $Q_{TOT} = 0$? → NO!

$$Q_{TOT} = \oint_{S_{int}} dS\, \sigma(\bar{r}_{int}) = 0$$

qvq $\sigma(\bar{r}_{int}) = 0$

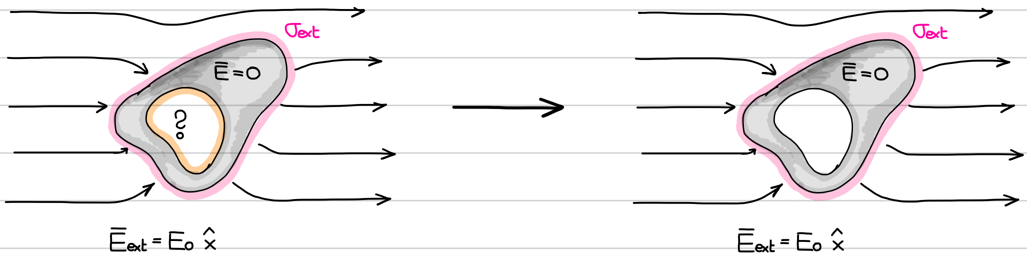


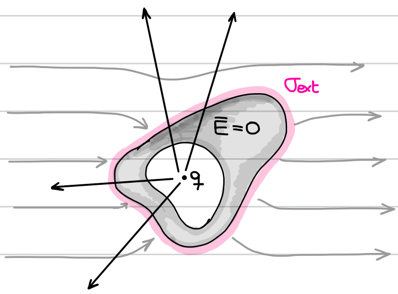
Si se inducen cargas en la superficie interior entonces debe haber cargas positivas y negativas tal que al sumarlas

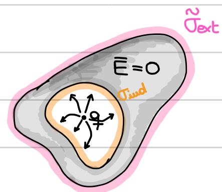
$$\oint_{S_{int}} \sigma(\bar{r})\, ds = 0$$

⇒ Hay un campo eléctrico inducido. Tomamos una línea de campo que surja de una carga positiva y cerramos la curva con cualquier camino en el interior del conductor para usar

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0 \;\rightarrow\; \oint_{\mathcal{C}} \bar{E}\, d\bar{\ell} = \int_A^B |E_{cav}|\, d\ell + \cancel{\int_B^A \bar{E}_{int}\, d\bar{\ell}}^{\,=0} = 0 \;\Leftrightarrow\; E_{cav} = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{int} = 0$$







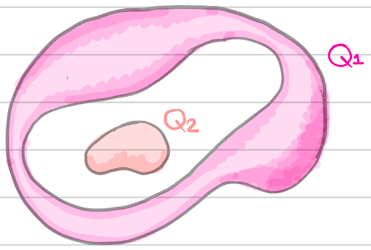
Zangwill p. 126, 127, 133, 134
Griffiths p. 96 en adelante

20 Dentro de un conductor hueco de forma arbitraria, se encuentra alojado un segundo conductor. Se carga a uno de ellos con carga $Q_1 = 1\,\mathrm{nC}$ (10^{-9}C) y al otro con carga $Q_2 = 2\,\mathrm{nC}$. El sistema se encuentra en equilibrio electrostático.

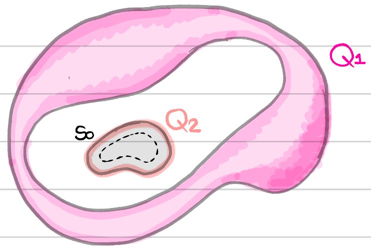
(a) ¿Sobre cuáles superficies se distribuyen las cargas? ¿Cuál es su valor?

(b) ¿Qué sucede si ambos conductores se tocan?

(c) Muestre que, si $Q_1 = -Q_2$, el campo exterior es nulo.



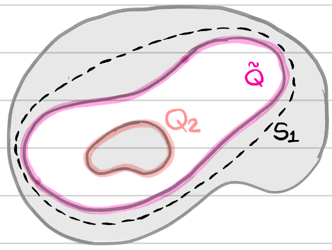
a)



$$\oint_{S_0} \bar{E}(\bar{r}_{S_0})\, d\vec{S_0} = \frac{\text{“}Q_{enc}\text{”}}{\varepsilon_0}$$

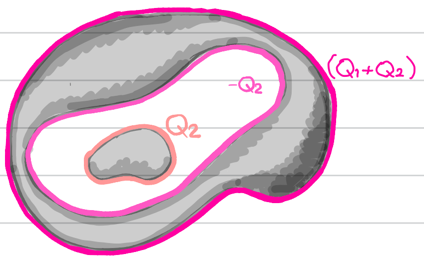
$\bar{E}(\bar{r}) = 0$ adentro del conductor!

$$0 = Q_{enc}$$



$$\oint_{S_1} \bar{E}(\bar{r}_{S_1})\, d\vec{S_1} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

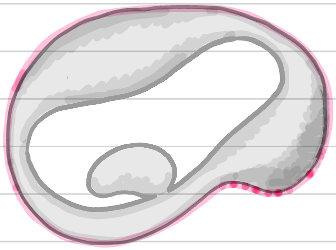
$$0 = \frac{Q_2 + \tilde{Q}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\tilde{Q} = -Q_2}$$



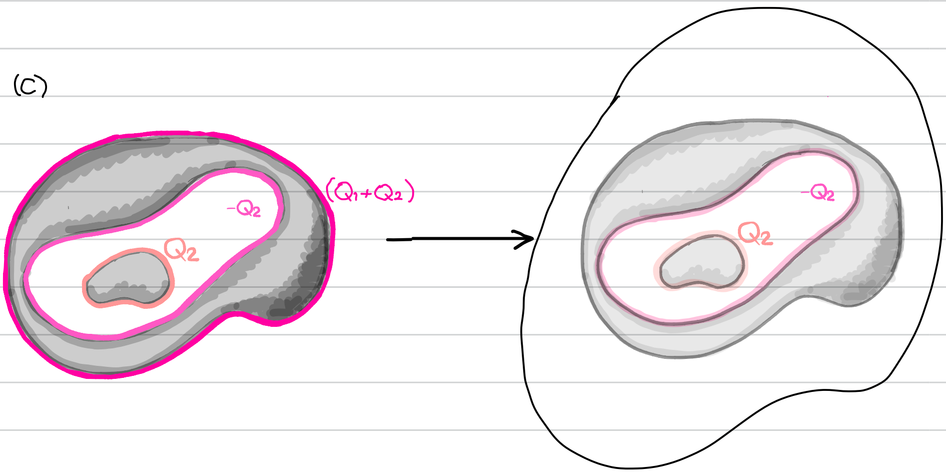
La carga total del conductor "1" es Q_1
En su cara interna se encuentra distribuida una carga $-Q_2$

$$Q_1 = Q_{int} + Q_{ext}$$
$$Q_1 = -Q_2 + Q_{ext}$$
$$Q_{ext} = Q_1 + Q_2$$

(b)

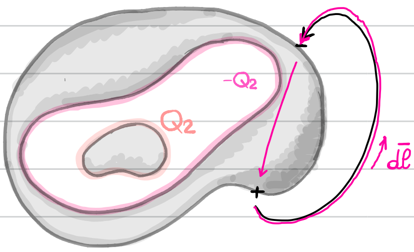


(C)



$$\oint_S \bar{E}(\bar{r}_S)\, d\bar{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \bar{E}(\bar{r}_S)\, d\bar{s} = 0$$

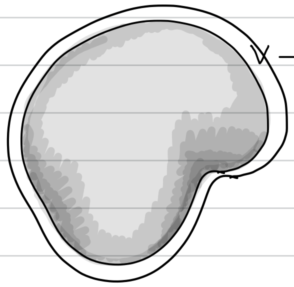


$$\oint \bar{E}\, d\bar{\ell} = 0$$

$$\int_{afuera} |E|\, d\ell + \cancel{\int_{adentro} \bar{E}\, d\ell}^{\,\bar{E}_{adentro}=0} = 0$$

$$\int_{afuera} |E|\, d\ell = 0 \Leftrightarrow E = 0$$

CAPACIDAD



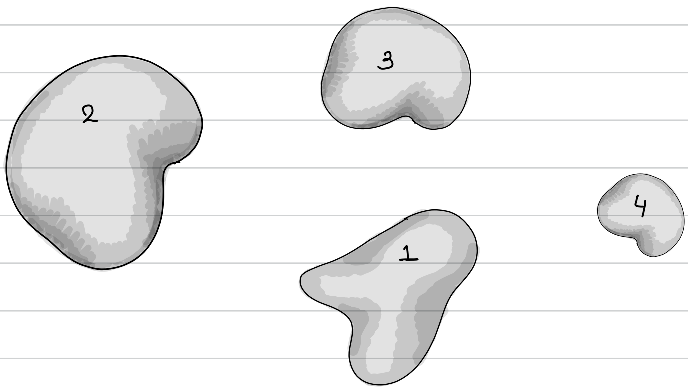
$V \longrightarrow \Phi(\bar{r}) = V \cdot \varphi(\bar{r})$ con $\varphi(\bar{r}) = 1$ en el conductor

$$\oint_S \bar{E}(\bar{r}_s)\, d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$-\varepsilon_0 \oint_S \bar{\nabla} \underbrace{\Phi(\bar{r}_s)}_{V\varphi(\bar{r}_s)}\, d\vec{s} = Q$$

$$-\varepsilon_0 V \oint \bar{\nabla}\varphi(\bar{r}_s)\, d\bar{s} = Q$$

$$\frac{Q}{V} = \underbrace{-\varepsilon_0 \oint_S \bar{\nabla}\varphi(\bar{r}_s)\, d\bar{s}}_{C\,:\,\text{auto capacidad}} \qquad Q = CV$$

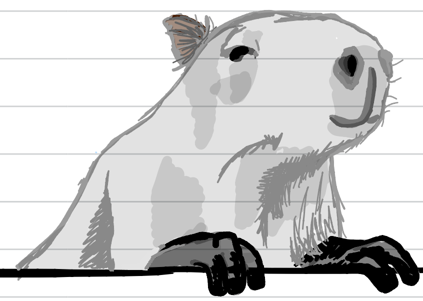


la carga sobre el conductor i-ésimo

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} V_j$$

$$= C_{i1} V_1 + C_{i2} V_2 + \dots + C_{ii} V_i + \dots + C_{iN} V_N$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{N1} & \cdots & & C_{NN} \end{pmatrix}}_{\text{matriz de capacidad}} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} \qquad C_{ij} = C_{ji}$$



Zangwill p. 134-139

23 Calcular la capacidad de las siguientes configuraciones de conductores:

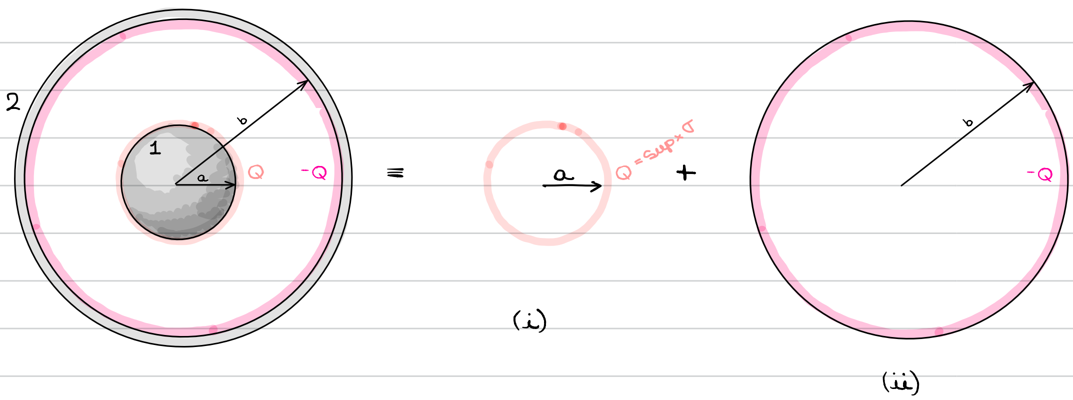
(a) Una esfera de radio R en el vacío. ¿Para qué valor de R resulta $C = 1\,\mathrm{pF}$?.

(b) Un condensador esférico de radio interior a y exterior b. Comparar con el resultado anterior cuando b es muy grande.

(c) Un condensador cilíndrico infinito (capacidad por unidad de longitud).

(d) Un condensador plano infinito (capacidad por unidad de área). Si la separación entre placas es de 1 mm, dar el valor del área para que resulte $C = 1\,\mathrm{pF}$.

b)



$$Q = C_{11} V_1 + C_{12} V_2$$

$$\underline{-Q} = \underset{= C_{12}}{C_{21}} V_1 + C_{22} V_2$$

dato

(i) $\bar{E}(\bar{r}) = E_r(r)\hat{r} \Rightarrow$ sup de Gauss, esferas de radio r

$$r<a \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, r^2 E_r(r) = 0 \Rightarrow E_r(r) = 0 \Longrightarrow \Phi_i(r<a) = V_1 \text{ cte}$$

$$r>a \quad \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{4\pi}\, r^2 E_r(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \longrightarrow \Phi_i(r>a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + V_1'$$

$$\lim_{r\to\infty} \Phi_{i)}(r) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad V_1' = 0 \Longleftrightarrow V_1' = 0$$

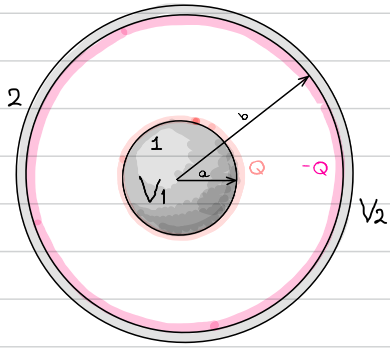
$$\lim_{r\to a^-} \Phi(r) = \lim_{r\to a^+} \Phi(r)$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

$$\Phi_i(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a} & r<a \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} & r\geqslant a \end{cases}$$

$$\Phi_{ii}(r) = \begin{cases} \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{b} & r<b \\ \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} & r\geqslant b \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}\right) & a \leqslant r < b \\ 0 & r \geqslant b \end{cases}$$



$V_2 = 0$

$V_1 = \Phi(r \leqslant a)$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$Q = C_{11} V_1 + C_{12} V_2$

$-Q = C_{21} V_1 + C_{22} V_2$

$C_{21} = C_{12}$

$\hookrightarrow$ dato

$$V_1 \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right]^{-1}}_{C} = Q$$

$$\cancel{Q} = C_{11} \frac{\cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right]^{-1} = C_{11}$$

$\boxed{27}$ Se tienen dos cuerpos conductores con coeficientes de capacidad e inducción conocidos. Calcule el trabajo para cargarlos hasta que alcancen potenciales V_1 y V_2. Se sugiere el siguiente método: (i) Mantenga el cuerpo 2 conectado a tierra y cargue el cuerpo 1 hasta que alcance el potencial deseado V_1 (¿qué carga adquirió el cuerpo 2, durante este proceso?); (ii) Ahora mantenga el cuerpo 1 conectado a una batería V_1 y cargue el cuerpo 2 hasta alcance el potencial V_2. Compare el resultado con el que se hubiera obtenido invirtiendo el papel de los cuerpos 1 y 2. Concluya que debe ser $C_{12} = C_{21}$.

cantidad de carga trasladada

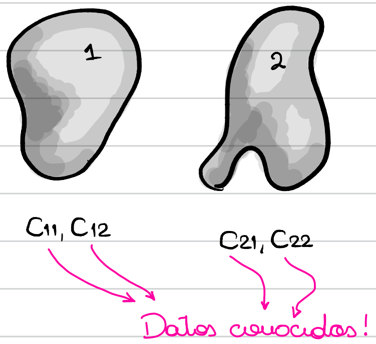
Valor del potencial en el infinito, tomamos en general $\Phi(|\bar{r}| \to +\infty) = 0$ (si es posible)

$$W^{\mathcal{C}}_{\infty \to \vec{a}} = q \int_{\mathcal{C}} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -q \int_{\mathcal{C}} \bar{\nabla} \Phi \, d\bar{l} = q\left[\Phi(\bar{r} = \bar{a}) - \Phi(|\bar{r}| \to +\infty)\right]$$

trabajo que se realiza para traer una cantidad de carga q desde el infinito hasta una posición dada por $\vec{a}$

valor del potencial en la posición $\vec{a}$ al momento de traer q

EN GENERAL PARA ESTA CONFIGURACIÓN



$$q_1 = C_{11}\tilde{V}_1 + C_{12}\tilde{V}_2$$

$$q_2 = C_{21}\tilde{V}_1 + C_{22}\tilde{V}_2$$

$\tilde{V}_1$ = potencial del conductor 1 cuando su carga es q_1 y la carga del conductor 2 tiene algún valor q_2. Quiero cambiar las cargas hasta obtener $\tilde{V}_1 = V_1$

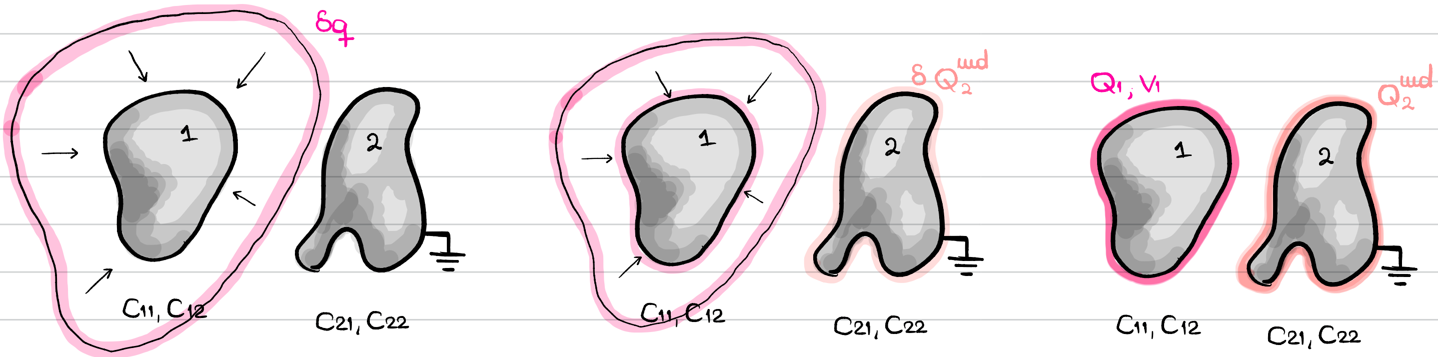
valor fijo dado

$\tilde{V}$ = potencial del conductor 2 cuando su carga es q_2 y la carga del conductor 1 tiene algún valor q_1. Quiero cambiar las cargas hasta obtener $\tilde{V}_2 = V_2$

i) PRIMER PROCESO (i) (manteniendo $\tilde{V}_2 = 0$)

$q_1 = C_{11}\tilde{V}_1$ → cargo con δq hasta alcanzar $q = C_{11}V_1$

$q_2 = C_{21}\tilde{V}_1$



Para cada carga δq

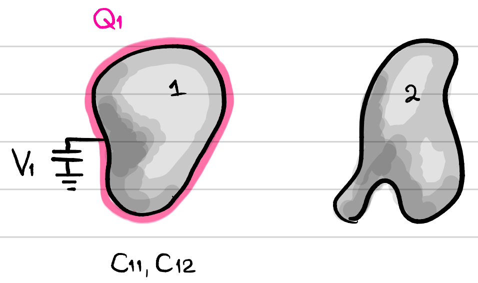
$$\delta W^{(i)}_{\infty \to sup} = \delta q \left[\Phi\big|_{sup} - \cancel{\Phi(\vec{r}\to\infty)}^{\,0} \right]$$

$$\delta W^{(i)}_{\infty \to sup} = \delta q\, \tilde{V}_1(q)$$

$$W^{(i)} = \int_0^{C_{11}V_1} dq\, \tilde{V}_1(q) = \int_0^{C_{11}V_1} dq\, \frac{q}{C_{11}} = \frac{q^2}{2C_{11}}\Big|_0^{C_{11}V_1} = \frac{C_{11}^2 V_1^2}{2C_{11}}$$

$$\rightarrow \boxed{W^{(i)} = \frac{1}{2} C_{11} V_1^2} \Rightarrow Q_2^{ind} = C_{21} V_1$$

ii) SEGUNDO PROCESO (ii) (manteniendo V_1 fijo)



inicial ($\tilde{V}_1 = V_1$, $\tilde{V}_2 = 0$)

$q_1 = C_{11} V_1$

$q_2 = C_{21} V_1$

final ($\tilde{V}_1 = V_1$, $\tilde{V}_2 = V_2$)

$q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2$

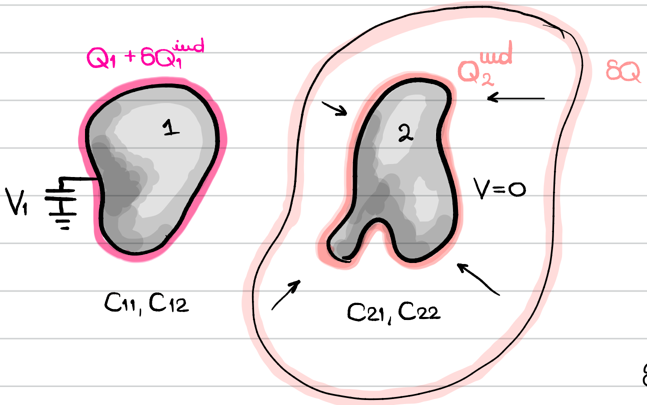
$q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2$

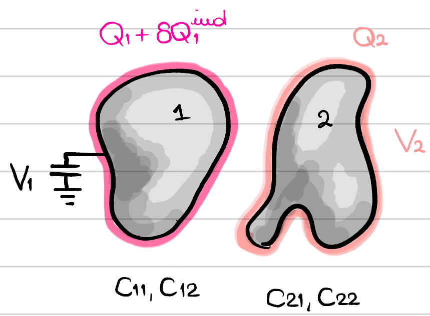
en el proceso

$q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} \tilde{V}_2$

$q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} \tilde{V}_2 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{V}_2(q) = \dfrac{q}{C_{22}} - \dfrac{C_{21}}{C_{22}} V_1$

$$\left.\begin{aligned} dq_1 &= C_{12}\, d\tilde{V}_2 \\ dq_2 &= C_{22}\, d\tilde{V}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow dq_1 = \frac{C_{12}}{C_{22}}\, dq_2$$



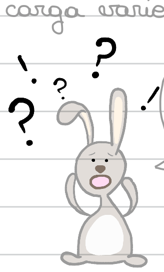


$\delta q_1 = C_{12}\, \delta V_2 = C_{12}$

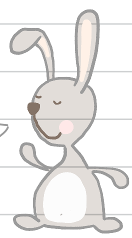
$\delta q_2 = C_{22}\, \delta \tilde{V}_2$

$$\delta W^{(ii)}_{\infty \to sup} = \delta q_2 \left[\Phi_2 \Big|_{sup} - \cancel{\Phi(\vec{r} \to \infty)}^{\,0} \right] + \delta q_1 \left[\Phi_1 \Big|_{sup} - \Phi_1 (|\vec{r}| \to \infty) \right]$$

$$\delta W^{(ii)}_{\infty \to sup} = \underbrace{\delta q_2 \tilde{V}_2(q)}_{\text{trabajo necesario para traer un } \delta q_2} + \underbrace{\delta q_1 V_1}_{\text{trabajo necesario para mantener el conductor 1 a potencial } V_1 \text{ cuando su carga varíe}} = \delta q_2 \left(\frac{q}{C_{22}} - \frac{C_{21}}{C_{22}} V_1 \right) + \delta q_2 \frac{C_{21}}{C_{22}} V_1$$



pero este término no estaba en la parte (i) del proceso!



pero si $\tilde{V}_2$ valía $\tilde{V}_2 = 0$ en esa parte! El término equivalente se anulaba

$$W^{(ii)} = \int_{C_{21}V_1}^{C_{21}V_1 + C_{22}V_2} dq \; \tilde{V}_2(q) = \int_{C_{21}V_1}^{C_{21}V_1 + C_{22}V_2} dq \; \frac{q}{C_{22}} = \left. \frac{q^2}{2C_{22}} \right|_{C_{21}V_1}^{C_{21}V_1 + C_{22}V_2}$$

$$= \frac{(C_{21}V_1 + C_{22}V_2)^2}{2C_{22}} - \frac{(C_{21}V_1)^2}{2C_{22}}$$

$$= \cancel{\frac{(C_{21}V_1)^2}{2C_{22}}} + C_{21}V_1V_2 + \frac{(C_{22}V_2)^2}{2C_{22}} - \cancel{\frac{(C_{21}V_1)^2}{2C_{22}}}$$

$$= \frac{1}{2} C_{22} V_2^2 + C_{21} V_1 V_2$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} C_{11} V_1^2 + \frac{1}{2} C_{22} V_2^2 + C_{21} V_1 V_2}$$