17 Un anillo de radio R se encuentra cargado uniformemente con carga total $-q$. En el centro del mismo se coloca una carga puntual de valor $q$

(a) ¿Cuánto valen los momentos monopolar y dipolar?¿Depende el momento dipolar del origen de coordenadas?

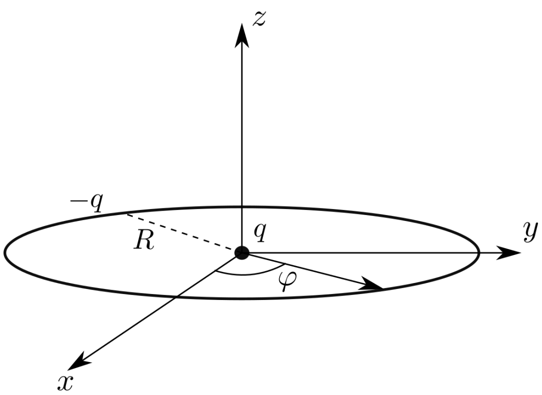
Recordemos que el potencial eléctrico de una configuración puede desarrollarse en términos de los multipolos.

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^2} + \Sigma_{ij}Q_{ij}\frac{3r_ir_j - r^2\delta_{ij}}{r^5} + ...\right\} \tag{1}$$

con

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3r\rho(\mathbf{r}) = \Sigma_i q_i \quad \text{momento monopolar} \\ \mathbf{p} &= \int d^3r\rho(\mathbf{r})\mathbf{r} = \Sigma_i q_i \mathbf{r}_i \quad \text{momento dipolar} \\ Q_{ij} &= \frac{1}{2}\int d^3r\rho(\mathbf{r})r_ir_j = \frac{1}{2}\Sigma_\alpha q_\alpha r_{\alpha i} r_{\alpha j} \quad \text{momento cuadrupolar} \end{aligned} \tag{2}$$

El ejercicio te pide el momento monopolar y dipolar de la configuración. Para hacer las cuentas más fáciles, ponemos el sistema de coordenadas en el centro del anillo, así la posición de la carga $q$ es en el origen.




**Monopolar**

Para calcular el momento monopolar no hace falta hacer ninguna cuenta rara, es solo la carga total de la configuración. El anillo tiene carga total $-q$ y la carga del centro tiene $q$, por lo que el momento monopolar es:

$$Q = q - q = 0 \tag{3}$$

**Dipolar**

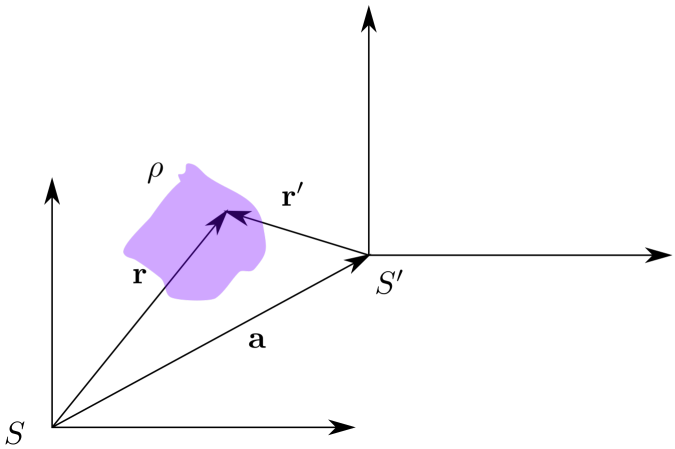
Para el momento dipolar sí hace falta hacer algunas cuentas.

$$\mathbf{p} = \int_{\text{anillo}} \lambda(\mathbf{r}')\mathbf{r}'dl' + q\mathbf{r}_q \tag{4}$$

Como la carga está en el origen, $\mathbf{r}_q = 0$ y no contribuye al momento dipolar. La contribución del anillo es:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \int_{\text{anillo}} \lambda(\mathbf{r})\mathbf{r}' dl' = \int_0^{2\pi} \lambda(R\cos\varphi, R\text{sen}\varphi, 0)Rd\varphi \\
p_x &= \int_0^{2\pi} \lambda R\cos\varphi Rd\varphi = R^2\lambda \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = R^2\lambda 0 = 0 \\
p_y &= \int_0^{2\pi} \lambda R\text{sen}\varphi Rd\varphi = R^2\lambda \int_0^{2\pi} \text{sen}\varphi d\varphi = R^2\lambda 0 = 0 \\
p_z &= 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Entonces el momento dipolar también es nulo. ¿Depende esto del sistema de coordenadas? No, porque el momento monopolar es cero. Probablemente lo hayan visto en clase pero podemos repasar la justificación de eso. Supongamos que ponemos otro sistema de coordenadas $S'$, con el origen desplazado en $\mathbf{a}$ del origen de nuestro sistema original.



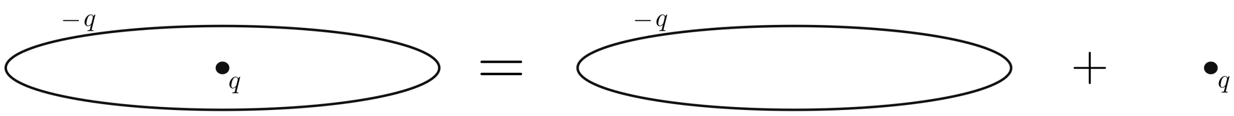

Entonces $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ y $\rho(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r})$ porque es el mismo punto del espacio. El momento dipolar $\mathbf{p}'$ en el sistema desplazado es:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}' &= \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}' d^3r' = \int_V \rho(\mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{a})d^3r \\
\mathbf{p}' &= \int_V \rho(\mathbf{r})\mathbf{r} d^3r - \mathbf{a}\int_V \rho(\mathbf{r})d^3r = \mathbf{p} - \mathbf{a}Q.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Entonces si $Q = 0$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$. La demostración es con densidad de carga en volumen, pero si se acuerdan de la clase de David y el apunte sobre delta de Dirac, si vale para densidades de carga volumétricas vale también para densidades lineales y superficiales.

(b) Calcular el potencial y el campo eléctrico sobre el eje del anillo, y estudiar el comportamiento para distancias grandes.

Ahora vamos a calcular el potencial y el campo, sobre el eje del anillo, o sea, el eje $z$. Para hacer la cuenta lo más fácil posible, hacemos superposición y arrancamos por el potencial.




$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{anillo}}(\mathbf{r}) + \phi_q(\mathbf{r})$$

El potencial en todo el espacio de una carga puntual $q$ ubicada en el origen del sistema de coordenadas es

$$\phi_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}_q \mid} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mid \mathbf{r} \mid}, \tag{7}$$

que si lo evaluamos en el eje del anillo $\mathbf{r} = z\hat{z}$ queda

$$\phi_q(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mid z \mid}. \tag{8}$$

Ahora para calcular el potencial del anillo lo hacemos directamente en el eje para que la integral sea más sencilla

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{anillo}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{anillo}} \lambda \frac{1}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid} dl' \\
\phi_{\text{anillo}}(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \lambda \frac{1}{\mid z\hat{z} - R\cos\varphi\hat{x} - R\text{sen}\varphi\hat{y} \mid} Rd\varphi \\
\phi_{\text{anillo}}(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \lambda \frac{1}{\sqrt{z^2 + (R^2\cos^2\varphi + R^2\text{sen}^2\varphi)}} Rd\varphi \\
\phi_{\text{anillo}}(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \lambda \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} Rd\varphi \\
\phi_{\text{anillo}}(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda 2\pi R \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Como $\lambda = \frac{-q}{2\pi R}$, porque la carga total es $-q$ y la densidad es uniforme y lineal, el potencial del anillo sobre el eje queda

$$\phi_{\text{anillo}}(0,0,z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}} \tag{10}$$

y el potencial total de la distribución:

$$\phi(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\mid z \mid} - \frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \tag{11}$$

El campo lo podemos calcular a partir del potencial (siempre es más fácil derivar que integrar), recordando que:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z)\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z)\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z)\hat{z}\right) \tag{12}$$

Como vimos en clase, cuando un sistema tiene simetría ante rotaciones sobre un eje, sobrevive solamente la componente del campo (**evaluado en ese eje**) paralela a esa dirección. En nuestro caso, el sistema tiene simetría ante rotaciones en el eje $z$ por lo que el campo evaluado en los puntos $\mathbf{r} = z\hat{z}$ solo tiene componente en la dirección $\hat{z}$. ¿Por qué recuerdo esto? Porque a mi me gustaría conseguir el campo derivando con respecto a $z$ el potencial que calculamos recién. Sin embargo podría ser que $\frac{\partial\phi}{\partial x}(0,0,z) \neq 0$ y $\frac{\partial\phi}{\partial y}(0,0,z) \neq 0$ pero no me entero. Entonces como el campo definitivamente apunta en $\hat{z}$ sobre el eje donde nos interesa calcularlo, derivamos el potencial que ya tenemos

$$\mathbf{E}(0,0,z) = -\frac{\partial \phi}{\partial z}(0,0,z)\hat{z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{z}{\mid z \mid^3} - \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\right)\hat{z} \tag{13}$$

Ahora el ejercicio nos pide que analicemos el comportamiento lejos de la distribución. Eso lo traducimos en pedir que $z >> R$ y hacer un desarrollo del potencial y el campo alrededor de $\frac{z}{R} = 0$. Nos va a ser cómodo saber que:

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + O(\epsilon^2) \;\; \text{desarrollo alrededor de } \epsilon = 0, \tag{14}$$

Entonces,

$$\phi(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Bigg( \underbrace{\frac{q}{\mid z \mid}}_{\substack{\text{a esta parte la}\\ \text{dejamos tranquila}}} - \underbrace{\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}}_{\substack{\text{nos concentramos}\\ \text{en esta parte}}} \Bigg). \tag{15}$$

Desarrollando la raíz y tomando como $\epsilon$ a $\frac{R^2}{z^2}$

$$\begin{aligned} (z^2+R^2)^{-1/2} &= \mid z \mid^{-1}\left(1+\left(\frac{R}{z}\right)^2\right)^{-1/2} \\ (z^2+R^2)^{-1/2} &\simeq \mid z \mid^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2 + O\left(\left(\frac{R}{z}\right)^4\right)\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Reemplazando en la expresión del potencial:

$$\begin{aligned} \phi(0,0,z) &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\mid z \mid} - \frac{1}{\mid z \mid} + \frac{1}{2\mid z \mid}\left(\frac{R}{z}\right)^2 + O\left(\frac{R^4}{z^5}\right)\right) \\ \phi(0,0,z) &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{R^2}{\mid z \mid z^2} + O\left(\frac{R^4}{z^5}\right)\right) \end{aligned} \tag{17}$$

A orden más bajo, el potencial es

$$\phi(0,0,z) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2}{2\mid z \mid z^2} \sim \frac{1}{z^3} \tag{18}$$

que si recordamos el desarrollo multipolar en la ecuación (1) los términos con el monopolo y dipolo van como $1/r$ y $1/r^2$ y es el término con el momento cuadrupolar el que para $r$ grande va como $1/r^3$. En el inciso a) nos dio que los dos primeros se anulan, por lo que esta expresión del potencial para $z >> R$ tiene sentido con lo que calculamos.

Por último para calcular el campo en la misma aproximación pueden hacer un desarrollo igual al del potencial solo que en lugar de expandir $(z^2+R^2)^{-1/2}$ tienen que expandir $(z^2+R^2)^{-3/2}$. Les va a quedar algo así

$$\mathbf{E}(0,0,z) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{3R^2}{2\mid z \mid^3 z}\hat{z} \sim \frac{1}{z^4} \tag{19}$$

Cualquier cosa que no se entienda, pregunten!