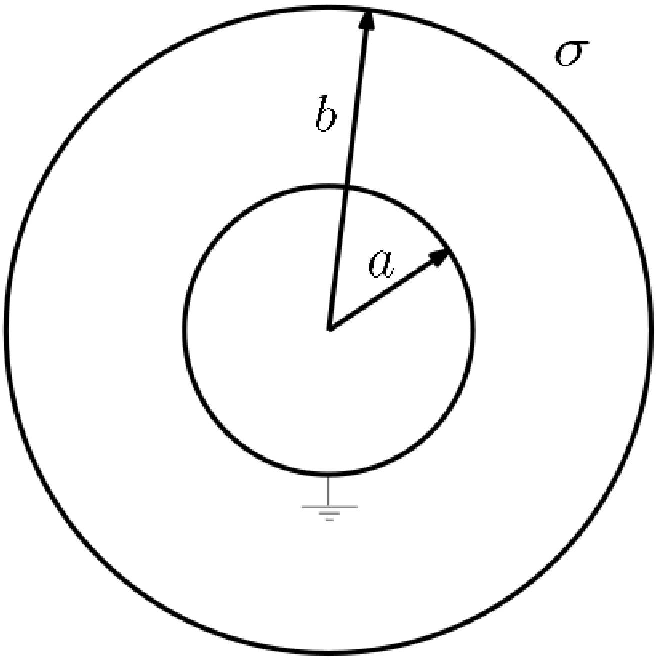
21 Calcular el potencial electrostático para todo punto del espacio producido por una esfera conductora conectada a tierra, rodeada por un cascarón esférico concéntrico con una densidad de carga superficial uniforme σ.

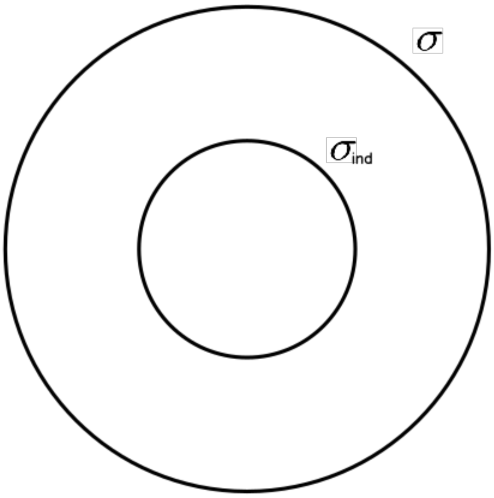
Comencemos haciendo un dibujo de la configuración, para que quede clara la situación geométrica y para fijar notación. La esfera conductora de radio a se encuentra conectada a tierra (es decir, su potencial es cero) y alrededor de ella hay un cascarón esférico concéntrico de radio b y densidad superficial de carga uniforme σ. Debemos hallar el potencial eléctrico generado por esta configuración en todo el espacio.



Para resolver este problema, vamos a identificar cuáles son todas las fuentes de campo eléctrico que aparecen en el problema, es decir, **cuáles son y dónde se encuentran ubicadas TODAS las cargas eléctricas**. Una vez identificadas las cargas, el potencial se obtendrá **superponiendo** los potenciales individuales generados por cada una de las cargas.

Como en un conductor en equilibrio electrostático el potencial es constante, y dado que la esfera conductora se encuentra conectada a tierra, sabemos que el potencial para $r \leq a$ es cero (en particular, para $r = a$). Sobre la superficie del conductor se induce una densidad de carga σ_{ind}, debido a la atracción de cargas que genera el cascarón de densidad σ. No conocemos a priori el valor de σ_{ind}, pero por la simetría del problema, podemos anticipar que es uniforme (ya que σ es uniforme). En el interior del conductor no puede haber cargas: como el potencial en el conductor es nulo, el campo es también nulo y el flujo a través de toda superficie cerrada contenida en el conductor es cero; por la Ley de Gauss la carga total en el interior de dicha superficie arbitraria contenida en el conductor es entonces nula.

Las únicas cargas entonces son las ubicadas en la superficie de radio $r = b$, representadas por una densidad superficial constante σ, y la carga superficial inducida sobre la superficie $r = a$, que tiene un valor desconocido σ_{ind}, pero es tal que el potencial **total** en $r \leq a$ es nulo. Podemos olvidarnos entonces del conductor y pensar que el potencial viene dado por las distribuciones de carga de la figura siguiente:



El potencial total se obtiene entonces como una suma de los potenciales debidos a dos cascarones esféricos de densidad de carga constante: el potencial debido a σ ubicada en $r = b$ más el potencial debido a σ_{ind} ubicada en $r = a$,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^b_\sigma(\mathbf{r}) + \Phi^a_{\sigma_{\text{ind}}}(\mathbf{r})\,. \tag{1}$$

Necesitamos entonces el potencial generado por un cascarón de densidad superficial σ_0 arbitraria y de radio R (y luego reemplazaremos $\sigma_0 \to \sigma$, $R \to b$ y $\sigma_0 \to \sigma_{\text{ind}}$, $R \to a$). Esto lo calcularon ustedes en el Ejercicio 8, inciso (e)III de la Guía 1; les dejamos aquí el resultado para que lo verifiquen,

$$\Phi^R_{\sigma_0}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0}\,, & \text{si } r \le R \\ \frac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon_0 r}\,, & \text{si } r > R \end{cases} \tag{2}$$

Volviendo al problema, el potencial total es entonces una suma de dos potenciales de la forma dada por la última ecuación, con lo que obtenemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^b_\sigma(\mathbf{r}) + \Phi^a_{\sigma_{\text{ind}}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\text{ind}} a}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\,, & \text{si } r \le a \\ \frac{\sigma_{\text{ind}} a^2}{\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\,, & \text{si } a < r < b \\ \frac{\sigma_{\text{ind}} a^2}{\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma b^2}{\varepsilon_0 r}\,, & \text{si } r \ge b \end{cases} \tag{3}$$

Todavía no hemos terminado el problema, dado que aún no sabemos cuánto vale σ_{ind}. Para conocer su valor, imponemos la condición de que el potencial en el interior de la esfera conductora debe anularse. Es decir, pedimos que sea $\Phi(\mathbf{r}) = 0$ para $r \le a$, lo que viendo la ecuación (5) nos arroja

$$\sigma_{\text{ind}} = -\frac{b}{a}\sigma\,. \tag{4}$$

Las ecuaciones (5) y (4) dan entonces la solución al problema,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^b_\sigma(\mathbf{r}) + \Phi^a_{\sigma_{\text{ind}}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } r \le a \\ \left(1 - \frac{a}{r}\right)\frac{\sigma b}{\varepsilon_0}\,, & \text{si } a < r < b \\ \frac{(b-a)b\sigma}{\varepsilon_0 r}\,, & \text{si } r \ge b \end{cases} \tag{5}$$

Noten que este potencial es continuo en todo punto del espacio (es un buen punto a verificar para revisar que el resultado sea razonables). Además, lejos de la distribución de carga, decae de la forma correcta predicha por el desarrollo multipolar (va como la carga total dividido $4\pi\varepsilon r$).

Un último comentario antes de finalizar. Noten que la carga total inducida en el conductor es

$$Q_{\rm ind} = \int_{r=a} dS\, \sigma_{\rm ind} = 4\pi a^2 \sigma_{\rm ind} = -4\pi a b \sigma = -\frac{a}{b} Q\,, \tag{6}$$

donde usamos que la carga total sobre el cascarón de radio $r = b$ es $Q = \int_{r=b} dS\, \sigma = 4\pi b^2 \sigma$. Este resultado será razonable cuando piensen este problema utilizando el método de imágenes (vuelvan a ver este ejercicio y piénsenlo utilizando el método de imágenes cuando veamos ese tema).