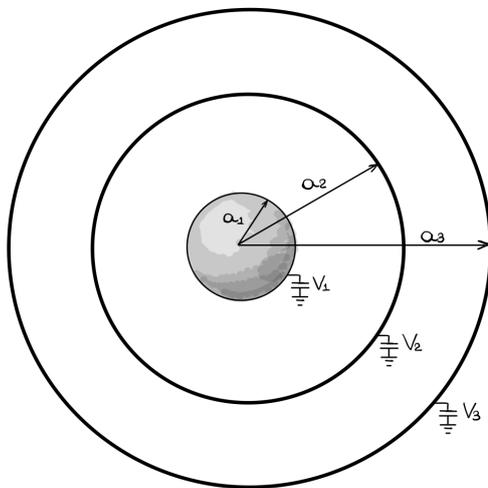


22 Tres esferas conductoras A_1 , A_2 y A_3 , concéntricas, de radios a_1 , a_2 y a_3 ($a_1 < a_2 < a_3$) están conectadas, respectivamente, a tres baterías V_1 , V_2 y V_3 . A_1 es maciza, y A_2 y A_3 son huecas (de espesor despreciable respecto de su radio, **pero no nulo**).

Datos: $a_1 = a$, $a_2 = 2a$, $a_3 = 3a$, $V_1 = V_0$, $V_2 = V_3 = 2V_0$. Suponer además que el potencial se mide de modo que en el infinito es nulo.

- (a) ¿Cuál es la carga de cada una de las esferas? Detallar cómo se distribuye espacialmente.
Antes de comenzar con el ejercicio hacemos un dibujo para identificar correctamente cada una de las variables involucradas.



En el dibujo podemos ver que este sistema permite separar el espacio en 4 regiones.

$$r < a$$

$$(i) a \leq r < 2a$$

$$(ii) 2a \leq r < 3a$$

$$(iii) r \geq 3a$$

dónde, para definir cada una de las regiones usamos los datos del problema $a_1 = a$, $a_2 = 2a$, $a_3 = 3a$ ^a, y hay que recordar que si bien el espesor de las esferas huecas es muy pequeño (tanto que no se puede apreciar en un dibujo a esta escala), no es nulo!

^a¿Por qué no rotulamos la región $r < a$? ¿Cuánto vale el potencial eléctrico en el interior de la esfera maciza A_1 ?

Nuestro primer objetivo es encontrar la carga de cada una de las esferas. Como son esferas conductoras, sabemos que toda la carga se distribuirá en sus superficies y como además son concéntricas, la carga se distribuirá uniformemente¹.

El camino que tomaremos será el de calcular el potencial en todo el espacio para luego encontrar el valor de las cargas aplicando la ley de Gauss.

Empezamos entonces buscando el potencial eléctrico en todo el espacio. Podemos ver en el dibujo que en el interior de todas las regiones que hemos definido la densidad de carga es nula y por lo tanto el potencial satisface, en cada región, la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0.$$

Hemos visto en otros ejercicios (y pueden repetirlo en este si quieren) que las transformaciones que resultan de simetría para distribuciones de carga σ uniformes en superficies esféricas implican que el potencial producido por ellas dependa únicamente de la coordenada radial.

Con esta información, la ecuación para el potencial resulta, en cada región

¹Al ser concéntricas el sistema completo tiene simetría esférica y resulta imposible distinguir un punto de coordenadas (r, θ_0, φ_0) de otro (r, θ_1, φ_1) que difiera en una rotación. Entonces, esperamos distribuciones de carga que respeten esta simetría.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \Phi_\alpha(r) \right) = 0 \quad \alpha = \text{i, ii, iii}$$

e integrando encontramos

$$\Phi_\alpha(r) = \frac{A_\alpha}{r} + B_\alpha \quad \alpha = \text{i, ii, iii}$$

Las 6 constantes A_α y B_α las vamos a encontrar imponiendo condiciones de contorno.

$$\begin{array}{lll} \Phi_i(r = a) = V_0 & \Phi_{ii}(r = 2a) = 2V_0 & \Phi_{iii}(r = 3a) = 2V_0 \\ \Phi_i(r = 2a) = 2V_0 & \Phi_{ii}(r = 3a) = 2V_0 & \Phi_{iii}(r \rightarrow \infty) = 0 \text{ (Indicado en los datos)} \end{array}$$

resolviendo las ecuaciones para todas las regiones hallamos la expresión para el potencial eléctrico en todo el espacio

$$\Phi(r) = \begin{cases} V_0 & r < a \\ (-2\frac{a}{r} + 3)V_0 & a \leq r < 2a \\ 2V_0 & 2a \leq r < 3a \\ 6\frac{a}{r}V_0 & r \geq 3a \end{cases}, \quad (1)$$

y derivando esta expresión encontramos el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ -2\frac{a}{r^2}V_0\hat{r} & a \leq r < 2a \\ 0 & 2a \leq r < 3a \\ 6\frac{a}{r^2}V_0\hat{r} & r \geq 3a \end{cases} \quad (2)$$

Conociendo el campo eléctrico, podemos ahora usar la ley de Gauss para hallar la carga en cada superficie. Antes de analizar cada superficie cargada en particular, veamos que podemos decir en general, que valga para todas.

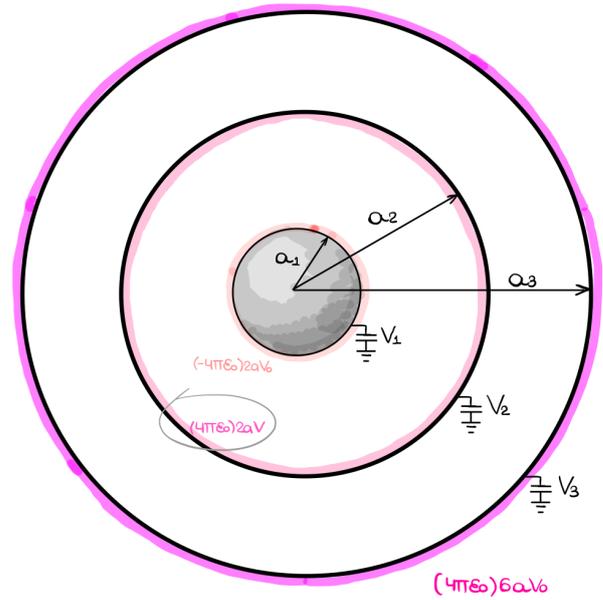
Tomando superficies de Gauss esféricas de radio r_0 fijo y aplicando la ley a nuestro campo eléctrico, que es un campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{r}$ en dirección radial y con dependencia exclusivamente en la coordenada r , la ley de Gauss nos dice

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}_S) d\mathbf{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta r_0^2 E(r_0) &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ 4\pi\epsilon_0 r_0^2 E(r_0) &= Q_{\text{enc}} \end{aligned} \quad (3)$$

Entonces, tomando una superficie de Gauss cuyo radio satisface $a \leq r_0 < 2a$ estaremos encerrando únicamente la esfera maciza y, por la ecuación (3) tenemos que la carga encerrada, que estará distribuida sobre la superficie de A_1 es

$$Q_{A_1} = 4\pi\epsilon_0 r_0^2 \left(-2\frac{a}{r_0^2} V_0 \right) = -8\pi\epsilon_0 a V_0$$

Tomando una segunda superficie de Gauss de radio fijo r_0 entre $2a$ y $3a$ encontramos que la carga encerrada por esta segunda superficie ubicada entre las esferas A_2 y A_3 debe ser nula. Esto **no nos dice** que la carga inducida en la esfera A_2 sea nula, sino toda la carga contenida por esta superficie.



La carga contenida por tal superficie esférica es la carga total de la esfera A_1 sumada a la carga total de la esfera A_2 de manera que

$$Q_{A_1} + Q_{A_2} = 0 \Rightarrow Q_{A_2} = 8\pi\epsilon_0 a V_0$$

Observación: ¿Por qué la carga de la esfera A_2 la pinté distribuida sobre la cara interna y no sobre la externa o sobre ambas?

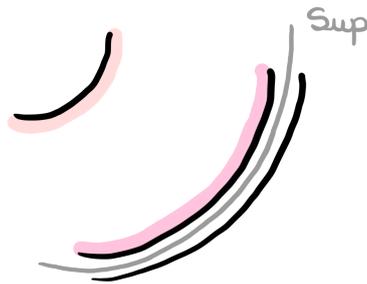
Un dato que no debemos olvidar es que el espesor de las esferas huecas, aunque despreciable frente a su radio, no es nulo.

Aumentando la escala del dibujo podemos pensar en qué pasa si tomamos una superficie de Gauss cuyo radio r_0 esté contenido en el interior del despreciable espesor de la esfera A_2 . Como es una esfera conductora, el campo sobre la superficie de Gauss es nulo, de forma que para una superficie con este radio (pueden pensarlos como un $r_0 = a + \epsilon$, con $\epsilon \ll 1$) tenemos que $Q_{A_1} + Q_{A_2}^{int} = 0$. En consecuencia la carga distribuida en la superficie interior de A_2 es $8\pi\epsilon_0 a V_0$. Suponiendo que hay una carga en la superficie exterior de A_2 , la cuenta que hicimos más arriba tomando $2a < r_0 < 3a$ podemos repetirla descomponiendo $Q_{A_2} = Q_{A_2}^{int} + Q_{A_2}^{ext}$

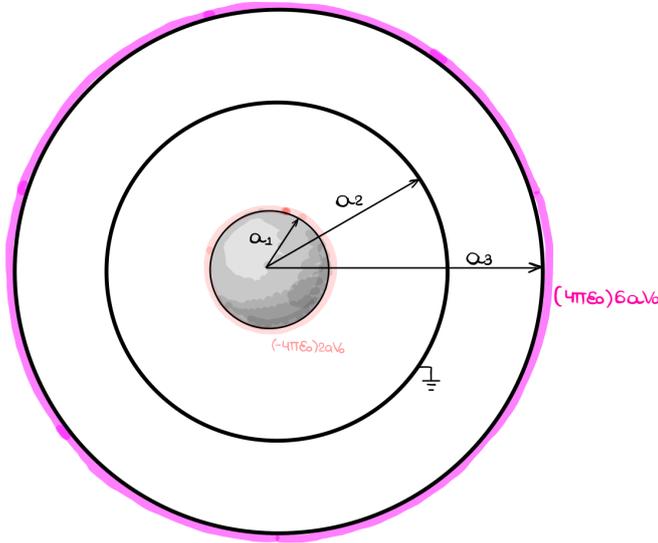
$$Q_{A_1} + Q_{A_2}^{int} + Q_{A_2}^{ext} = -8\pi\epsilon_0 a V_0 + 8\pi\epsilon_0 a V_0 + Q_{A_2}^{ext} = 0 \Rightarrow Q_{A_2}^{ext} = 0$$

Un razonamiento análogo puede usarse para ver que la carga distribuida en la cara interior de la esfera A_3 es también nula. Para encontrar la carga distribuida sobre la cara exterior de A_3 , tomamos una última superficie de Gauss de radio $r_0 > 3a$, que encerrará todas las esferas conductoras. La ecuación (3) para esta superficie nos dice

$$4\pi\epsilon_0 r_0^2 6\frac{a}{r_0^2} V_0 = Q_{A_1} + Q_{A_2} + Q_{A_3} \Rightarrow Q_{A_3} = 24\pi\epsilon_0 a V_0$$



- (b) Suponer ahora que todas las esferas se desconectan de las baterías y, a continuación, la esfera A_2 se conecta a tierra. Calcular las cargas (detallar su distribución) y potenciales de cada esfera.



En esta nueva configuración tenemos:

La esfera maciza A_1 de carga total $Q_{A_1} = -8\pi\epsilon_0 a V_0$ distribuida uniformemente sobre su única superficie

Una esfera hueca A_2 de espesor despreciable frente a su radio conectada a tierra (es decir, $V_2 = 0$)

Una esfera hueca A_3 de carga total $Q_{A_3} = 24\pi\epsilon_0 a V_0$ que puede redistribuirse entre sus dos superficies, pero siempre de manera uniforme en cada una de ellas.

Una gran parte de lo que hicimos para el ítem (a) puede repetirse. En todas las regiones que definimos para resolver (a) se sigue satisfaciendo para esta nueva configuración, la ecuación de Laplace, y su solución en cada región es otra vez

$$\Phi_\alpha(r) = \frac{A_\alpha}{r} + B_\alpha$$

La diferencia en el sistema, se traduce matemáticamente a que ahora tendremos condiciones de contorno sobre el potencial

$$\Phi_i(r = 2a) = 0 \quad \Phi_{ii}(r = 2a) = 0 \quad \Phi_{iii}(r \rightarrow \infty) = 0 \quad \Phi_{ii}(r = 3a) = \Phi_{iii}(r = 3a)$$

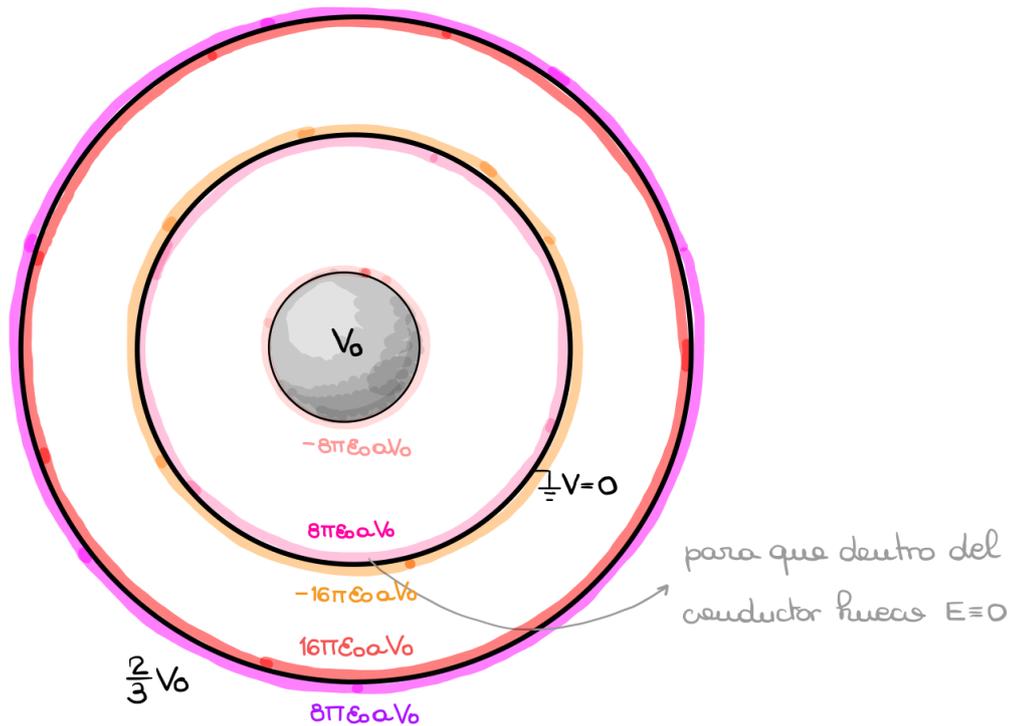
mezcladas con condiciones de contorno sobre el campo, que obtenemos mediante la ley de Gauss y las cargas conocidas $Q_{A_1} = -8\pi\epsilon_0 a V_0$ y $Q_{A_3} = 24\pi\epsilon_0 a V_0$

$$4\pi\epsilon_0 A_i = Q_{A_1} \quad 4\pi\epsilon_0 A_{ii} = Q_{A_1} + Q_{A_2} \quad 4\pi\epsilon_0 A_{iii} = Q_{A_1} + Q_{A_2} + Q_{A_3}$$

Con esta información se encuentra que

$$\Phi(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ (-2\frac{a}{r} + 1) V_0 & a \leq r < 2a \\ (-4\frac{a}{r} + 2) V_0 & 2a \leq r < 3a \\ 2\frac{a}{r} V_0 & r \geq 3a \end{cases}, \quad (4)$$

mientras que la carga inducida sobre la esfera A_2 será $Q_{A_2} = -8\pi\epsilon_0 a V_0$. Recordando que dentro del espesor de cada esfera hueca se debe anular el campo nos queda



- (c) Partiendo de la situación planteada en el inciso anterior, se separa ahora de la configuración al conductor A_3 . ¿Qué sucede en este caso con las cargas de las esferas A_1 y A_2 ? Justificar.

La carga de la esfera A_1 no puede modificarse puesto que es un conductor aislado. Tampoco puede modificarse su distribución mientras se mantenga la simetría esférica, dado que esta esfera sólo posee una superficie sobre la cuál se pueden distribuir cargas. Entonces, como también pasó cuando cambiamos la configuración de (a) por la configuración de (b), al retirar la esfera A_3 la carga sobre A_1 continuaría siendo la misma y estando uniformemente distribuida sobre su superficie.

La carga de la esfera A_2 deberá sin embargo modificarse. Que la esfera hueca exterior (al retirar A_3 , A_2 se volvió la esfera exterior) esté conectada a tierra y el potencial se anule en el infinito implican que el potencial sea idénticamente nulo en la región $r \geq 2a$, y en consecuencia también el campo.

Entonces, considerando una superficie esférica de radio $R > 2a$ y aplicando el teorema de Gauss, encontramos que $Q_{A_2} = -Q_{A_1}$