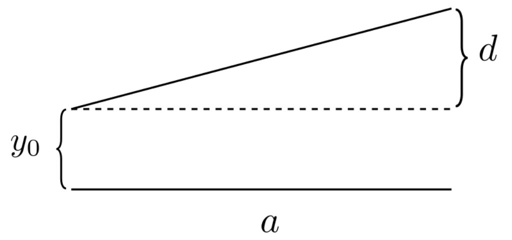
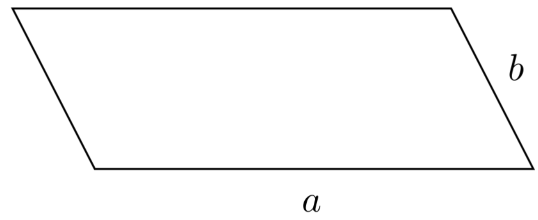
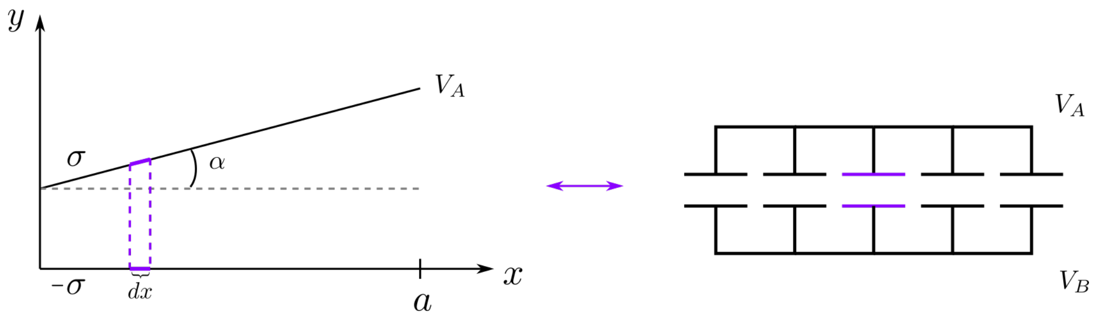
25 Un condensador posee placas rectangulares de longitud a y ancho b. La placa superior está inclinada un pequeño ángulo como indica la figura. La separación de las placas varía desde y_0 a la izquierda a $y_0 + d$ a la derecha, siendo d mucho menor que a y que b. Despreciando efectos de borde, calcular la capacidad del sistema.





Para empezar, el enunciado nos aclara que consideremos que $a, b >> d$, por lo que podemos aproximar la densidad de carga de cada una de las placas como constante. Además como sabemos que es un capacitor vale que si una placa tiene densidad σ, la otra tiene densidad $-\sigma$.

Que no son placas paralelas va a aparecer en que la distancia entre ellas varía según la posición. ¿Cómo introducimos esto? La idea es pensar que la configuración es en realidad muchos capacitores en paralelo. Tomamos secciones de las dos placas, de ancho dx y largo b, tal que la inclinación de la cara superior en esa sección es despreciable relativa a la distancia entre placas y podemos considerarlas paralelas (recordemos que dx es **muy** chico).



Entonces tenemos muchos capacitores (de placas paralelas) infinitesimalmente angostos uno al lado del otro. ¿Por qué decimos en paralelo? Recordemos que la condición para decir que dos capacitores están en paralelo es que la diferencia de potencial sobre las caras de cada uno es la misma. O sea que están todos conectados a la misma diferencia de potencial. En nuestro sistema las caras de cada capacitor diferencial son en realidad parte de las dos caras grandes, que como son placas conductoras, en cada uno de sus puntos el potencial es el mismo. Por lo que nuestros mini capacitores imaginarios efectivamente están todos conectados a la misma diferencia de potencial.

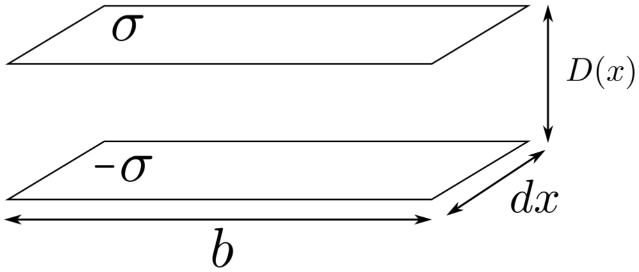
Para N capacitores en paralelo, cada uno con capacidad total C_i, la capacidad equivalente del sistema es:

$$C = \sum_{i=0}^{N} C_i \tag{1}$$

Esto lo podemos usar con nuestros capacitores imaginarios pensando que cada uno, de largo dx, tienen capacidad $C(x) = c(x)dx$ donde $c(x)$ es capacidad por unidad de longitud. Entonces la ecuación (1) queda:

$$C = \sum_{i=0}^{N} C_i \longrightarrow \int_0^a c(x)dx \tag{2}$$

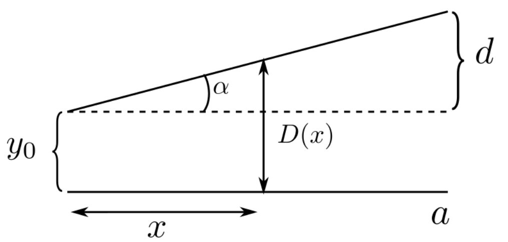
Ahora solo nos queda calcular $c(x)$. Tenemos dos placas aproximadamente paralelas, de largo b y ancho dx, una con densidad de carga superficial σ y la otra $-\sigma$. Esto último es consecuencia de la densidad de carga es uniforme. Las placas son finitas (dx es arbitrariamente chico) entonces tal vez les hace ruido despreciar los efectos de borde, pero no son bordes reales, ya que son secciones de un capacitor cuyas dimensiones si implican que esa aproximación vale.



Del ejercicio 23 sabemos que la capacidad **por unidad de área** de dos placas paralelas separadas d es

$$C = \frac{\epsilon_0}{d} \tag{3}$$

En esta configuración la distancia entre placas no es constante para cada x, si no que es $D(x) = y_0 + x\frac{d}{a}$.



$$D(x) = y_0 + x\tan\alpha = y_0 + x\tfrac{d}{a}$$

Entonces la capacidad de una sección de capacitor de largo b y ancho dx en la posición x es

$$c(x)dx = \frac{\epsilon_0}{D(x)} \times \text{área de las placas} = \frac{\epsilon_0}{y_0 + x\frac{d}{a}}\underbrace{bdx}_{\text{área}} \tag{4}$$

Integrando tenemos que

$$\begin{aligned} C &= \int_0^a c(x)dx = \int_0^a \frac{\epsilon_0}{y_0 + x\frac{d}{a}} bdx = ab\frac{\epsilon_0}{d}\left[\ln(y_0 + d) - \ln(y_0)\right] \\ C &= ab\frac{\epsilon_0}{d}\ln\left(\frac{y_0 + d}{y_0}\right) = ab\frac{\epsilon_0}{d}\ln\left(1 + \frac{d}{y_0}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Podemos chequear dos cosas: las unidades y qué pasa cuando $d \to 0$.

$$[C] = \left[ab\frac{\epsilon_0}{d}\ln\left(1 + \frac{d}{y_0}\right)\right] = \left[ab\frac{\epsilon_0}{d}\right] = [A]\frac{[C]}{[A]} = [C]. \tag{6}$$

El límite $d \to 0$ queda:

$$\lim_{d\to 0} C = \lim_{d\to 0} ab\epsilon_0 \frac{\ln\left(1+\frac{d}{y_0}\right)}{d} \underbrace{=}_{\text{L'H}} \lim_{d\to 0} ab\epsilon_0 \frac{1}{y_0\left(1+\frac{d}{y_0}\right)} = ab\frac{\epsilon_0}{y_0}, \tag{7}$$

que si lo dividimos por el área de las placas (ab) recuperamos el resultado de capacidad por unidad de área de dos placas paralelas, despreciando los efectos de borde.