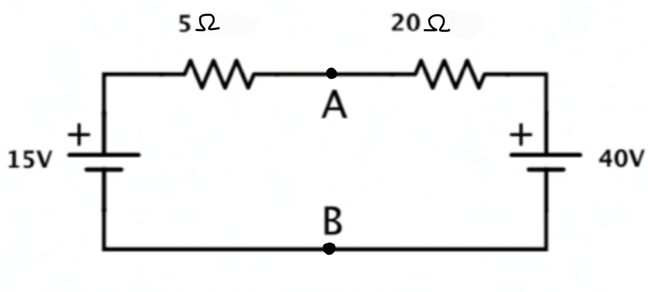
47 Hallar el equivalente de Thevenin del siguiente circuito desde los puntos A y B. Determinar la potencia suministrada a una resistencia que se conecta entre A y B si su valor es:

(i) $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 5\Omega$ o $R_3 = 10\Omega$

(ii) R_4 tal que la transferencia de potencia resulte máxima.



Empezamos buscando el circuito equivalente de Thevenin entre los puntos A y B. Es decir, el circuito compuesto únicamente por una fuente en serie con una resistencia tales que, al sustituir con éste el circuito original, la caída de potencial y la corriente que circulen por un elemento conectado entre los puntos A y B sean las mismas tanto para el circuito real como para el circuito equivalente.

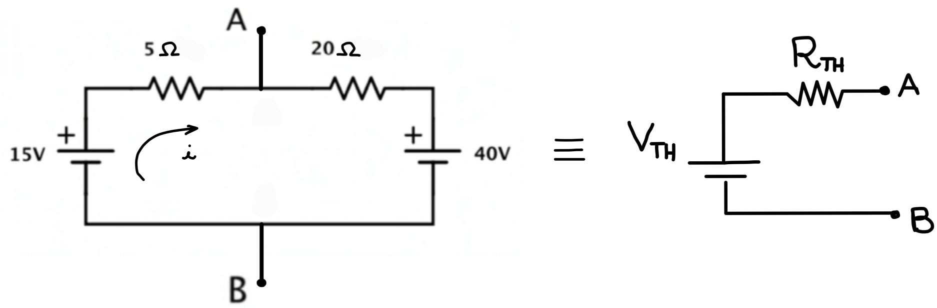


Figura 1: Circuito original y circuito equivalente de Thevenin

Para encontrar la diferencia de potencial equivalente V_{TH}, tenemos que encontrar la diferencia de potencial ΔV_{AB} del circuito abierto entre estos puntos (es decir, sin ningún elemento conectado entre A y B).

$$\begin{aligned} V_{TH} =& \Delta V_{AB} \\ =& \, 15V - i\,5\Omega \\ =& \, 40V + i\,20\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

donde en las últimas dos líneas de (2)consideramos dos posibles formas de calcular ΔV_{AB} según se consideren las diferencias parciales de potencial a la izquierda o a la derecha de los puntos A y B. Para determinar la corriente i que circula por el circuito y completar el cálculo, aplicamos la ley de Kirchhoff para el voltaje, o ley de mallas

$$\begin{aligned} 15\,V - 40\,V - i(5\Omega + 20\Omega) =& 0 \\ -i25\Omega =& 25\,V \\ i =& -1\,A, \end{aligned} \tag{2}$$

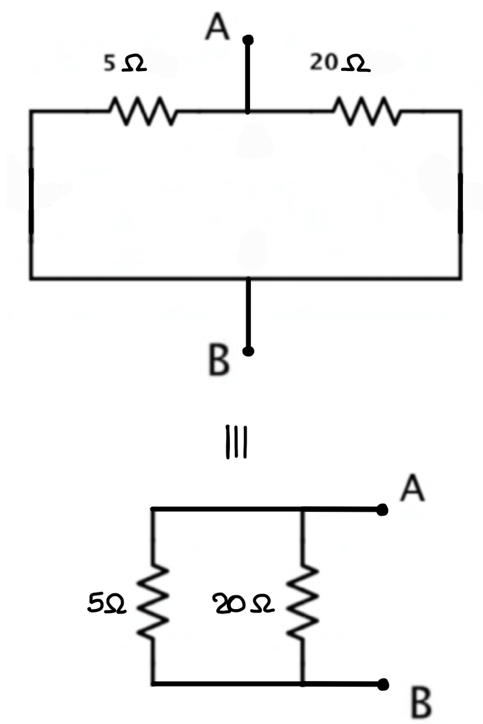
Observación: ¿Qué quiere decir que la corriente sea negativa?. Que nos haya dado negativa, señala que en realidad el flujo de carga positiva es en la dirección contraria a la que supusimos

Con la información sobre la corriente, encontramos entonces (haciendo uso de la ecuación (2)) que el potencial equivalente resulta

$$\mathbf{V_{TH} = 20\ V}$$

El siguiente paso consiste en buscar la resistencia equivalente R_{TH}. Para esto abrimos nuevamente el circuito entre A y B, pero cortocircuiteamos la fuente.

Un segundo... ¿Qué es *cortocircuitear*?. Un cortocircuito es un fallo en el cual dos puntos de un circuito entre los cuales debería haber una diferencia de potencial se conectan (y en consecuencia se encuentran al mismo potencial). Cortocircuitear la fuente consiste, entonces, en reemplazarla con un conductor de forma que se anula la diferencia de potencial que la fuente generaba. Hecho esto, podemos dibujar el circuito de una forma más conveniente para encontrar la resistencia equivalente que se observa entre los puntos A y B. Ambos pasos muestran en la figura de la derecha.



Cuando acomodamos el circuito resulta claro que las resistencias de 5Ω y 20Ω están conectadas en paralelo, de forma que

$$\mathbf{R_{TH}} = \left(\frac{1}{5\Omega} + \frac{1}{20\Omega}\right)^{-1} = \mathbf{4\Omega},$$

obteniendo así toda la información respecto del circuito equivalente de Thevenin.

Determinar la potencia suministrada a una resistencia que se conecta entre A y B si su valor es:

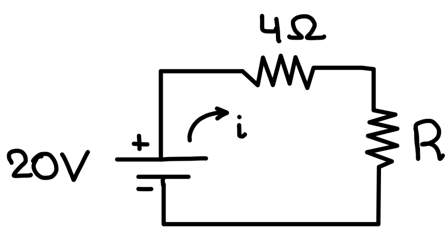
(i) $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 5\Omega$ o $R_3 = 10\Omega$

(ii) R_4 tal que la transferencia de potencia resulte máxima.

En esta segunda parte conectamos una resistencia R entre los puntos A y B del circuito equivalente de Thevenin. Para resolver el ítem (i) reemplazaremos el valor de R por los distintos valores R_1, R_2 y R_3, y calcularemos la potencia disipada en R en cada caso.

La potencia disipada en R puede escribirse como

$$P = i^2\ R, \tag{3}$$



donde encontramos la corriente i usando la ley de Kirchhoff para el potencial

$$20V - i(4\Omega + R) = 0 \tag{4}$$

Tomando ahora el caso particular $R = R_1 = 1\Omega$, de la ecuación (4) se obtiene que $i = 4A$, y reemplazando en la ecuación (3),

$$\mathbf{P_{R_1}} = 16W.$$

Repitiendo para los otros dos valores de R, encontramos

$$\mathbf{P_{R_2}} = \frac{500}{9}W \sim 55{,}6W \qquad ; \qquad \mathbf{P_{R_3}} = \frac{1000}{49}W \sim 20{,}4W$$

En el ítem (ii) nuestro objetivo es encontrar cuál es el valor de la resistencia R que maximiza la potencia disipada en ella. En términos matemáticos, queremos hallar R tal que $P(R)$ es máxima. Para esto abordamos el problema como un problema de optimización. Buscaremos primero una expresión para la potencia disipada en R como función de R y buscaremos el valor de R para el cuál se satisface la condición de punto crítico $\dot{P}(R) = 0$.
Recurriendo nuevamente a las ecuaciones (3) y (4), podemos ver de esta última que

$$i = \frac{20V}{4\Omega + R},$$

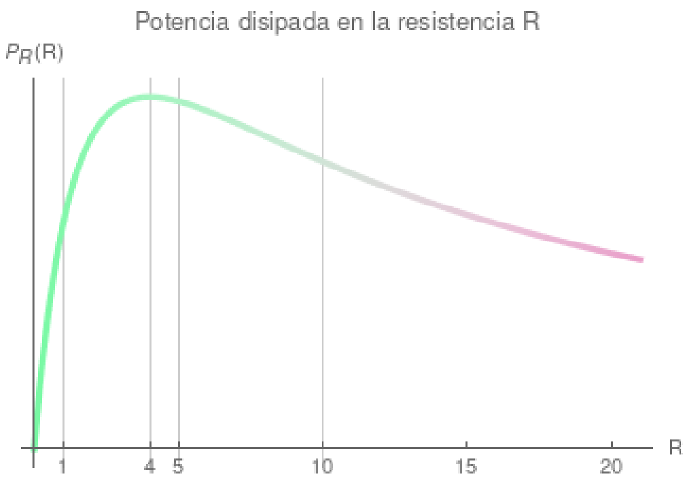
resultado que, reemplazando en la ecuación (3), nos permite encontrar

$$P(R) = 400V^2 \, \frac{R}{(4\Omega + R)^2}. \tag{5}$$

Ahora que hemos obtenido una expresión para la potencia disipada en función del valor de la resistencia, derivamos la función e igualamos a cero.

$$\dot{P}(R) = 400V^2 \left[\frac{-2R}{(4\Omega + R)^3} + \frac{1}{(4\Omega + R)^2}\right]$$

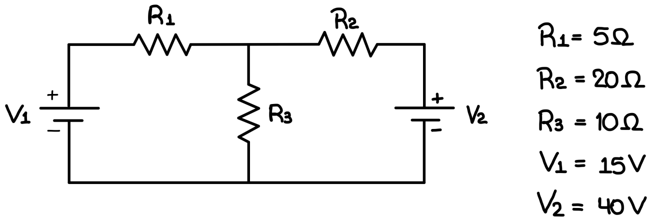
$$\begin{aligned} \dot{P}(R) = 0 \Rightarrow \frac{2R}{(4\Omega + R)^3} &= \frac{1}{(4\Omega + R)^2} \\ \frac{2R}{4\Omega + R} &= 1 \\ 2R &= 4\Omega + R \\ \mathbf{R} &= \mathbf{4\Omega} \end{aligned}$$



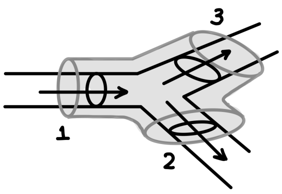
47- bis Vamos a resolver el mismo circuito del ejercicio 47, cuando entre los antiguos puntos A y B se ha conectado una resistencia $R_3 = 10\Omega$

(i) Utilizando la ley de Kirchoff para la corriente eléctrica o "ley de nodos" en combinación con la ley de Kirchoff para el potencial eléctrico o "ley de mallas"

(ii) Utilizando la ley de mallas únicamente



Para el primer ítem de este "nuevo" ejercicio queremos hallar las corrientes que circulan por el circuito utilizando de forma conjunta la ley de mallas y la ley de nodos. Para eso, antes que nada, recordemos de qué viene cada una de estas leyes.
La **ley de nodos** se deriva de la condición $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ para la corriente estacionaria.



Si tomamos una superficie que encierre el empalme entre tres conductores de un circuito como se ve en la figura de la izquierda, podemos calcular el flujo de $\mathbf{j}$ a través de la superficie y puesto que $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ sabemos por el teorema de la divergencia que se satisface

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

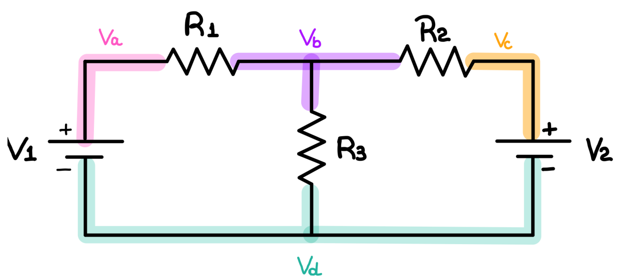
Descomponiendo la superficie cerrada en las distintas "tapas" y los laterales (los cuales poseen normales perpendiculares a $\mathbf{j}$) obtenemos

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \underbrace{\int_{\text{tapa 1}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S_1}}_{-i_1} + \underbrace{\int_{\text{tapa 2}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S_2}}_{i_2} + \underbrace{\int_{\text{tapa 3}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S_3}}_{i_3} + \cancel{\int_{\text{lateral}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S_{lat}}} = 0,$$

de dónde podemos ver que valdrá que la suma de las corrientes entrantes sea igual a la suma de las corrientes salientes.

$$\sum_k i_k^{\text{IN}} = \sum_m i_m^{\text{OUT}} \tag{6}$$

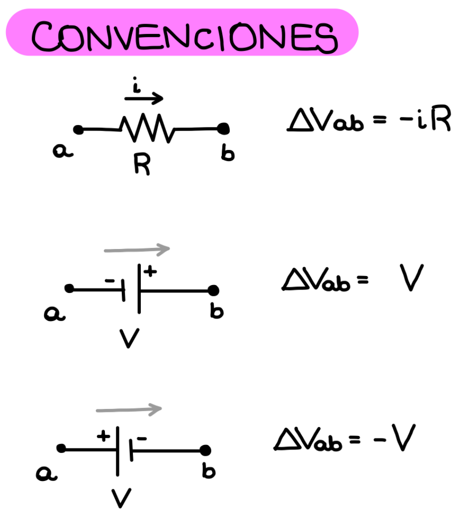
La **ley de mallas**, por otra parte, es consecuencia del carácter irrotacional del campo eléctrico, es decir, es consecuencia de que el campo satisfaga $\nabla \times \mathbf{E} = 0$



$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ implica que para cada camino cerrado, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, de forma que

$$\sum_{\substack{\text{camino} \\ \text{cerrado}}} \Delta V = 0. \tag{7}$$

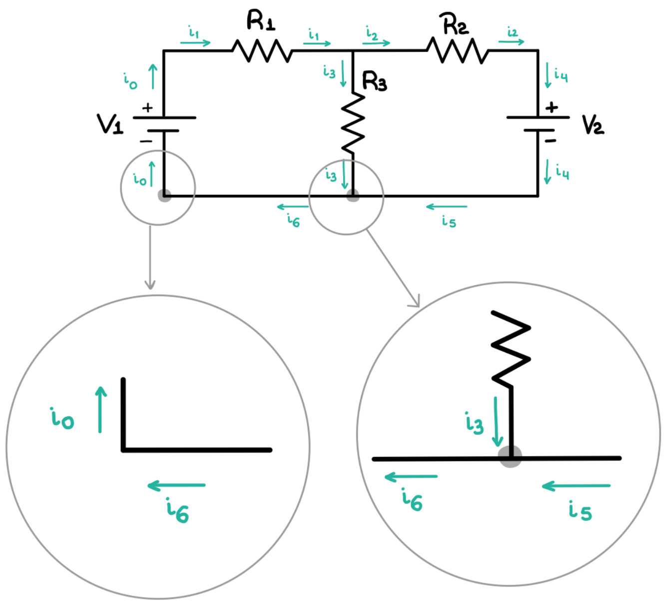
Esto es obvio cuando recordamos que consideramos los cables como conductores pecfectos en los cuales el potencial eléctrico toma un valor constante.
Combinando la ley de nodos dada por la ecuación (6) y la ley de mallas, dada por la ecuación (7), queremos hallar las corrientes que circulan por cada rama del circuito considerado.
Antes de empezar a resolver, un detalle más!



Es muy común fijar como convención las siguientes reglas. Cuando recorramos un camino dentro de un circuito y atravesemos una resistencia, supondremos que el potencial es menor tras haber atravesado la resistencia *en sentido de la corriente* que antes, de forma que la diferencia de potencial al atravesar una resistencia R en el sentido de circulación de la corriente i resulta $\Delta V = -i\ R$. Del mismo modo, identificaremos el extremo más angosto de la fuente con el menor valor de potencial, y el extremo más extenso con el mayor valor. De esta forma, al recorrer un camino que contenga una fuente en la dirección

$$\text{extremo pequeño} \longrightarrow \text{extremo extenso}$$

estaremos experimentando una diferencia de potencial $+V$, mientras que al recorrer una fuente en sentido contrario (extenso $\longrightarrow$ pequeño) la diferencia experimentada será de $-V$.
Ahora si, a encontrar esas corrientes!!
Empecemos con lo más general que se nos pueda ocurrir, suponiendo que no supiéramos nada sobre las corrientes, y asumamos que por cada rama del circuito circula alguna corriente desconocida.



La ley de nodos valdrá para cada punto en el que se encuentren dos o más ramas del circuito. Al aplicar la ley a un nodo entre dos ramas, como por ejemplo el nodo que se ha ampliado en el dibujo, al cual ingresa una corriente i_6 y del cual sale una corriente i_0 obtendremos siempre cosas como

$$i_0 = i_6,$$

es decir, que en un nodo en el cuál ingresa una única corriente y del cual sale una única corriente, ambas corrientes tienen el mismo valor.
Es al considerar nodos que relacionan 3 o más ramas que obtendremos relaciones no-triviales. Por ejemplo, para el nodo con tres ramas ampliado en el dibujo tenemos

$$i_3 + i_5 = i_6.$$

La condición para los nodos con dos ramas simplifica mucho el ejercicio. Podemos reemplazar el planteo inicial por el siguiente

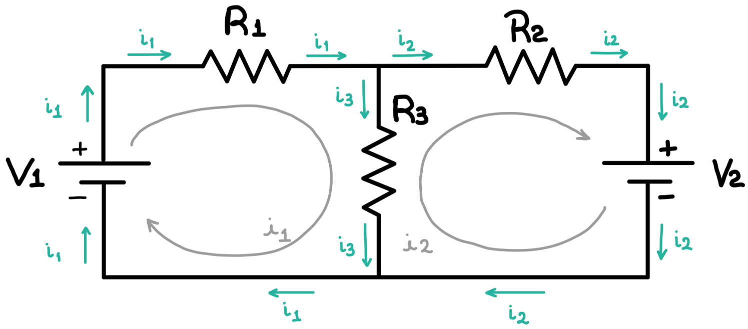


Figura 2: Circuito. Ignore por el momento las corrientes en gris y considere aquellas en verde.

La ley de nodos, aplicada a cualquiera de los dos nodos que involucran 3 ramas del circuito nos da la misma ecuación

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Ahora tenemos que complementar esta información con la ley de mallas.
Tomando como mallas las dos celdas que se observan en el circuito, la ley de mallas aplicada a la primera de ellas nos aporta la ecuación

$$V_1 - i_1\ R_1 - i_3\ R_3 = 0,$$

mientras que de la segunda obtenemos

$$-V_2 - i_2\ R_2 + i_3\ R_3 = 0$$

Un momento, ¿Por qué $+i_3\ R_3$?. Porque estamos recorriendo esa rama en sentido contrario al que asumimos para la corriente i_3! asumiendo esa dirección para i_3 estamos suponiendo que el potencial debajo de la resistencia es menor que el potencial por encima de ésta.
Hecha esta aclaración, y reemplazando los valores de las resistencias y diferencias de potencial generadas por las fuentes, tenemos todo lo necesario para encontrar los valores de i_1, i_2 e i_3

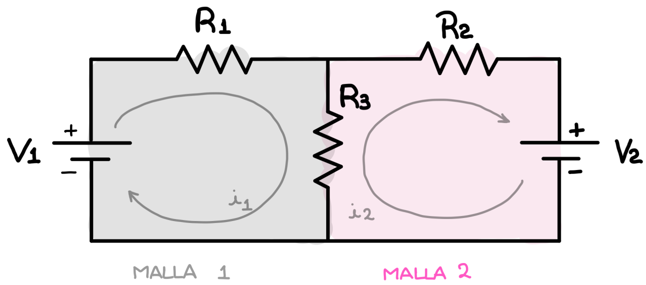
$$\begin{aligned} 15V - i_1\ 5\Omega - i_3\ 10\Omega &= 0 \\ -40V - i_2\ 20\Omega + i_3\ 10\Omega &= 0 \\ i_2 + i_3 &= i_1. \end{aligned}$$

Tras resolver el sistema de ecuaciones encontramos que

$$i_1 = \frac{1}{7} \quad ; \quad i_2 = -\frac{9}{7} \quad ; \quad i_3 = \frac{10}{7}$$

¿Qué significa que la corriente i_2 sea negativa?
Significa que hemos supuesto que i_2 tenía una dada dirección, pero en realidad tenía la dirección contraria.

Hay un camino alternativo, que es el que hemos visto en las clases prácticas, y que nos permite trabajar solamente con la ley de mallas. Esto es lo que debemos hacer en el ítem (ii)



Consideremos ahora si dos corrientes como las que se ven en color gris en la figura de la izquierda, y resolvamos la ley de mallas directamente. Para la malla 1 tenemos

$$V_1 - i_1\, R_1 - (i_1 - i_2)\, R_3 = 0,$$

donde usamos que sobre la resistencia R_3 circula una corriente i_1 en un sentido, y también una corriente i_2 en sentido opuesto, de manera que la corriente neta circulando sobre R_3 es $i_1 - i_2$. Aplicando nuevamente la ley de mallas a la malla 2 obtenemos

$$-i_2\, R_2 - V_2 - (i_2 - i_1)\, R_3 = 0$$

En este caso tenemos solamente dos ecuaciones, pero también tenemos sólo dos incógnitas. Reemplazando con los datos del ejercicio, el sistema a resolver es

$$\begin{aligned} 15V - i_1\, 5\Omega - (i_1 - i_2)\, 10\Omega &= 0 \\ -40V - i_2\, 20\Omega - (i_2 - i_1)\, 10\Omega &= 0, \end{aligned}$$

y su resultado

$$i_1 = \frac{1}{7} \quad ; \quad i_2 = -\frac{9}{7}$$

Preguntas:
¿Cuál es la corriente que circula por la resistencia R_3?
¿Cuánto valía esta misma corriente cuando resolvimos el ejercicio por el método propuesto en (i)?

OBSERVACIÓN

Cuando usamos este método simplificado, en realidad lo que estamos haciendo es usar, puesto que nos resulta una noción bastante intuitiva, la ley de nodos sin decirlo explícitamente.

Si comparamos los dos procedimientos, cuando utilizamos la ley de nodos y la ley de mallas conjuntamente, consideramos todas las corrientes distintas que pudieran circular por el circuito. Encontramos que eran tres, i_1, i_2 e i_3 y que satisfacían la relación

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

En la versión simplificada tenemos solo dos corrientes, pero pensamos que en la rama del centro circula una corriente $i_1 - i_2$ que coincide exactamente con lo que llamamos i_3 antes!