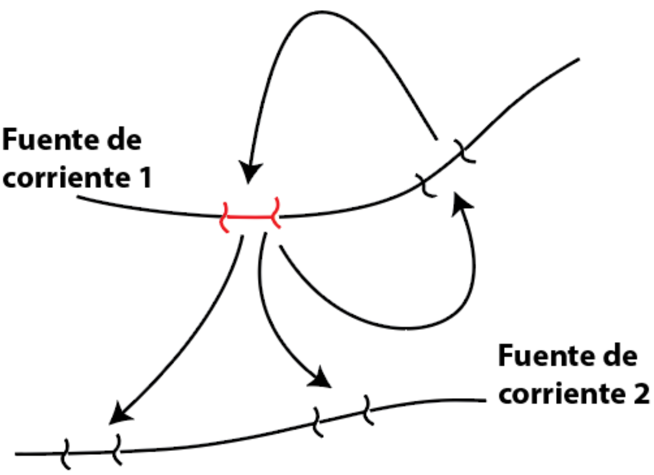
$\boxed{54}$ Calcule la fuerza por unidad de longitud entre dos cables paralelos por los que circula una corriente de 30 A. La separación entre cables es de 2 cm. Estime hasta qué distancia por encima de los cables se verá afectada la indicación de una brújula. Considere los dos posibles sentidos de circulación de la corriente.

Nota: suponga que la intensidad del campo magnético terrestre en el lugar es de $0,5 \times 10^{-4}$ T y forma un ángulo de 30º con la vertical.

Repaso teórico

Antes de comenzar, notemos lo siguiente. En el dibujo, cada flecha representa quién hace fuerza sobre quién. Todos los pedazos de corriente se hacen fuerza entre sí, en particular los del mismo cable, así que podríamos preguntarnos si el cable se hace una fuerza neta sobre sí mismo (aunque sea muy raro), porque el principio de acción y reacción no tiene por qué cumplirse (ej 52). Pero en este ejercicio, para ser ordenados, vamos a considerar sólo la fuerza que una fuente de corriente genera sobre la *otra* fuente de corriente, sin tener en cuenta lo que sucede con las fuerzas internas en cada cable. Como ejercicio opcional[1], pueden ver la fuerza que se ejerce sobre sí mismo un cilindro con corriente uniforme como el del ejercicio 57b para convencerse de que la fuerza neta resulta ser nula



Teniendo el campo externo **B**, para averiguar la fuerza sobre una fuente de corriente vamos a integrar la fuerza de Lorentz por cada pedacito de carga dq que se mueve generando esa corriente. Este cálculo va a variar dependiendo de si la distribución es volumétrica, superficial o unidimensional. Para el caso volumétrico:

[1]Si lo hacen, acuérdense de usar simetrías!

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \int dq\ \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \int dq\ \frac{dl}{dt}\hat{n} \times \mathbf{B} \\
&= \int dq\ \underbrace{\frac{dS}{dS}}_{1}\ \frac{dl}{dt}\hat{n} \times \mathbf{B} = \int \underbrace{\frac{dq\ \hat{n}}{dS\ dt}}_{\mathbf{J}} \times \mathbf{B}\, \underbrace{dS\ dl}_{dV} \\
&= \int dV\ \mathbf{J} \times \mathbf{B}
\end{aligned}
$$

Acá el volumen de integración (que no está especificado en la última fórmula) es todo el volumen en el cual J no sea nulo. Si este volumen no es acotado, podemos tener fuerzas netas infinitas, pero eso no necesariamente significa que haya intensidad infinita, sino que hay que calcularlas por unidad de longitud, área, etc

Las expresiones correspondientes para los casos unidimensional y bidimensional son:

$$
\mathbf{F_{2D}} = \int dS\ \mathbf{K} \times \mathbf{B} \tag{1}
$$

$$
\mathbf{F_{1D}} = \int dl\ \mathbf{I} \times \mathbf{B} \tag{2}
$$

Donde $\mathbf{I}$ tiene unidades de corriente y $\mathbf{K}$ tiene unidades de corriente por unidad de longitud

Como 2do ejercicio opcional, pueden llegar a las 2 ecuaciones de arriba notando cómo están relacionados entre sí los diferenciales: por ejemplo en el caso anterior (el caso volumétrico) dq es la carga contenida en dV, que recorre una distancia dl en un tiempo dt en la direccion $\hat{z}$ (generando la corriente I), etc. El "truco"que usamos fue multiplicar y dividir por el diferencial de área dS dentro de la integral para forzar que aparezca el campo $\mathbf{J}$. En el caso de $\mathbf{K}$ hay que multiplicar y dividir por un diferencial de longitud, y en el caso de $\mathbf{I}$ no hace falta hacer el truco, solo reinterpretar las "fracciones"de los diferenciales. Si tienen dudas con dividir diferenciales, piensen que siempre que sepan cómo se interrelacionan entre sí, el límite de la "división"va a estar bien definido.

Resolución

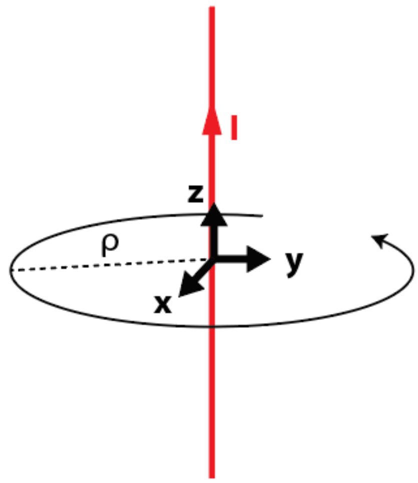
Ahora comenzamos con el ejercicio 54. En el problema hay dos fuentes de corriente: la fuente 1 es un hilo con corriente, y la fuente 2 es otro hilo igual con corriente, paralelo al anterior. Vamos a tomar uno de estos hilos, calcularle el campo B, y con este campo ir al otro hilo y calcularle la fuerza que le genera el campo

La forma del campo B, como estuvimos viendo en clase, puede anticiparse con las simetrías del problema. En este caso esta forma es la que vimos al final de la clase práctica del 01/02 (link), el campo magnético del hilo es:

$$
\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_{\varphi}(\rho)\hat{e_{\varphi}} \tag{3}
$$

Y mediante Ampere sale que:

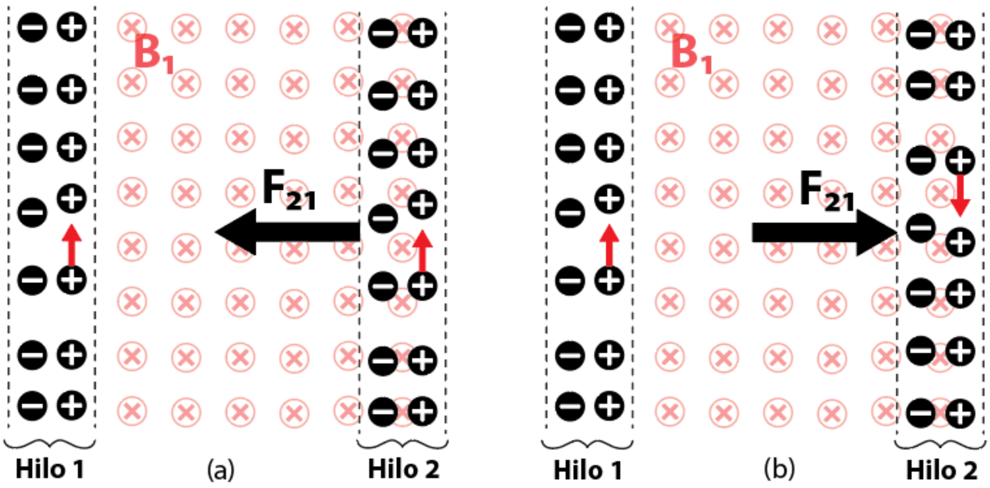
$$
\mathbf{B_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \leftarrow \text{Campo generado por el hilo 1} \tag{4}
$$



La corriente 2 va a sentir una fuerza debido a este campo. Notemos que como es un hilo infinito, la fuerza neta sobre todo el hilo va a ser la suma infinita de las fuerzas sobre cada pedazo del mismo, y el resultado en este caso va a darnos infinito. Así que lo que nos va a interesar es calcularla por unidad de longitud. Para eso elegimos un pedazo cualquiera del hilo 2 con una longitud arbitraria Δl, y calculamos la fuerza que todo el hilo 1 le hace a esta porción del hilo 2:

$$\begin{aligned}\mathbf{F_{21}^{\Delta z}} &= \text{Fuerza que el hilo 1 le hace a un segmento de longitud } \Delta z \text{ del hilo 2}\\ &= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} dz \ \underbrace{I_2\hat{z}}_{\mathbf{I_2}} \times \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{\varphi}}_{\mathbf{B_1}} = \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} dz \ \frac{\mu_0 I_2 I}{2\pi d}(-\hat{\rho}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2 I \Delta z}{d}(-\hat{\rho})\end{aligned}$$

Como vemos, la fuerza resulta proporcional a la longitud del hilo (lo que era esperable por ser una corriente uniforme), y también vemos explícitamente que si hubiéramos elegido calcular la fuerza sobre todo el hilo nos hubiera dado ∞. Acá también definimos $\rho = d$ como la distancia que separa a los dos hilos. En el problema, sabemos además que las corrientes de ambos hilos tienen la misma intensidad, así $I_2 = \pm I$.



Analicemos la dirección: si las corrientes tienen el mismo sentido, la fuerza es atractiva, y si tienen

sentidos contrarios es repulsiva. Además, para simplificar suponemos que los hilos tienen carga neutra, es decir que todas las cargas positivas se compensan por una cantidad igual de cargas negativas, y podemos suponer que sólo se mueven las positivas para generar la corriente. Si en cambio los hilos no fueran neutros, lo único que se agregaría es la fuerza de Coulomb (también por unidad de longitud).
Ya prácticamente terminamos, sólo nos queda reemplazar los datos. El resultado final es:

$$\frac{|\mathbf{F_{21}^{\Delta z}}|}{\Delta z} = \frac{9 \times 10^{-5}\mathrm{N}}{\mathrm{cm}} \tag{5}$$

Por último, el ejercicio nos pide ver cómo afectaría todo esto a la lectura de una brújula. La brújula mide la dirección en la que apunta el campo magnético, así que nos interesa comparar el campo de los dos hilos con el campo de la Tierra. Reemplacemos los datos en el campo que calculamos (ambos campos van a ser iguales a menos de un signo y centrados en distintos orígenes):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} = \frac{4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N/A^2}\ 30\mathrm{A}}{2\pi X \mathrm{m}} = \frac{6 \times 10^{-6}}{X}\mathrm{T} \tag{6}$$

Acá X es un número sin unidades que representa la cantidad de metros que nos tenemos que alejar. Si lo dividimos por el valor del campo magnético terrestre:

$$\frac{6 \times 10^{-6}/X}{0{,}5 \times 10^{-4}} = \frac{0{,}12}{X} \tag{7}$$

Si por ejemplo quisiéramos un error del orden del 1 %, tendríamos que alejarnos lo suficiente para que este cociente sea menor a 1/100. Entonces, como tenemos dos cables, podemos tomar X como la distancia al mas cercano (como una forma de acotar) y multiplicar el cociente por 2 (por N si tuviéramos N cables)