

- 55 Una esfera de radio  $R$ , cargada superficialmente con densidad a uniforme  $\sigma$ , gira sobre su eje con velocidad angular  $\omega$ . Hallar el campo magnético sobre el eje de rotación y el momento magnético.

## Repaso Teórico

Además de Ampere, podemos usar la integral de Biot-Savart para hallar el campo magnético. La ventaja es que es más general y no sólo se limita a distribuciones con simetría, y la desventaja es que hay que hacer muchos más cálculos, de modo que es un último recurso. Las integrales de Biot-Savart son:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \leftarrow \text{Corrientes volumétricas } (\mathbf{J}) \quad (1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^2r' \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \leftarrow \text{Corrientes superficiales } (\mathbf{K}) \quad (2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dr' \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \leftarrow \text{Corrientes unidimensionales } (\mathbf{I}) \quad (3)$$

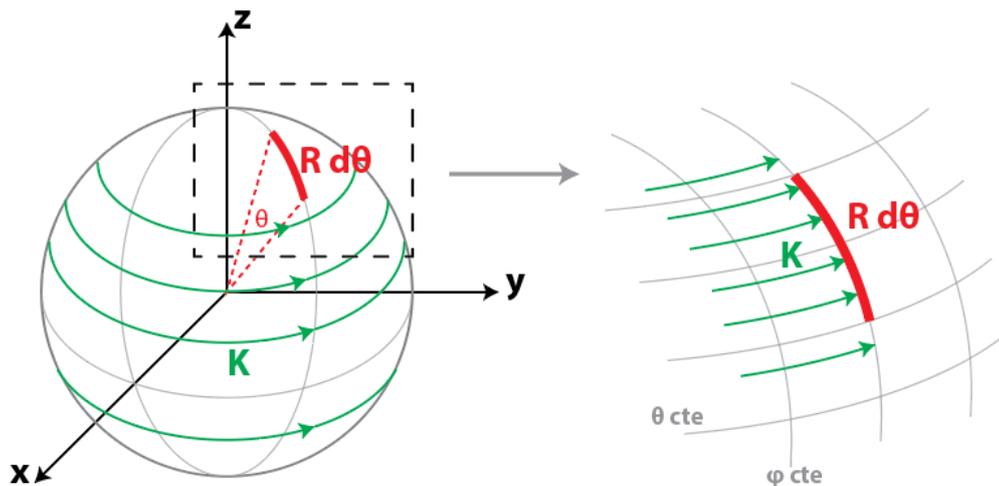
En todos los casos, las regiones de integración son aquellas en donde los campos de corriente son no nulos (o, equivalentemente, todo el espacio)

De manera equivalente, a partir de las corrientes también se puede encarar el mismo cálculo mediante el potencial vector:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4)$$

## Resolución

Para hallar el campo y momento magnéticos que nos pide el problema, antes tenemos que tener la distribución de corrientes.



Hay una corriente superficial  $\mathbf{K}$ , definida sobre la esfera, cuyo módulo y dirección son desconocidos por ahora. Como hay una rotación alrededor del eje  $z$ , todos los puntos del espacio se mueven con

velocidad  $v = r_{\perp}\omega$ , con  $r_{\perp}$  la distancia al eje de rotación. En particular, los puntos pertenecientes a la superficie esférica se mueven más rápido cerca del ecuador y más lento cerca del eje. Estos puntos al moverse trasladan los elementos de carga  $\sigma dS$ . Más precisamente:

$$v = R \omega \sin\theta = \text{Velocidad de los puntos sobre la esfera} \quad (5)$$

Por simetría de rotación, sabemos que  $\mathbf{K}$  no va a depender de  $\varphi$ , de modo que la corriente va a tener la forma

$$\mathbf{K}(\theta) = K(\theta)\hat{\varphi} \quad (6)$$

Para hallar el valor de  $K$ , elegimos un segmento diferencial contenido en la superficie en la que vive la corriente, como en el dibujo, y nos preguntamos ¿cuánta corriente pasa a través de ese segmento?

Conviene elegir un segmento que sea perpendicular a la corriente en ese punto, ya que la parte paralela no va a aportar nada. En la figura dicho segmento es  $Rd\theta$ . Por definición de  $K$ , sabemos que:

$$\frac{dq}{dt} = KR d\theta \quad (7)$$

Acá lo delicado es escribir  $dq$  en detalle:  $dq$  es la carga contenida en un diferencial de área rectangular cuyos lados son:

$$\begin{cases} dl = \text{distancia que } dq \text{ recorre en un tiempo } dt = v dt = R \omega \sin\theta \\ R d\theta = \text{longitud del segmento que atraviesa } dq \end{cases} \quad (8)$$

Juntando todo en la ecuación 7:

$$\frac{R^2 \sigma \omega \sin\theta dt d\theta}{dt} = KR d\theta \quad (9)$$

$$\implies \boxed{\mathbf{K} = R \sigma \omega \hat{\varphi}} \quad (10)$$

Ahora sí que podemos calcular  $\mathbf{B}$ , ya que obtuvimos la distribución de corrientes. Fijense que es 2D  $\implies$  para hallar el campo usamos la ecuación de Biot-Savart bidimensional:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^2r' \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (11)$$

Si encaramos el ejercicio por acá, vamos a terminar en integrales que tienen términos cuadráticos y cúbicos en  $\sin\theta'$  y  $\cos\theta'$ . Las cuentas no son imposibles, pero son mucho más tediosas que si lo encaramos con el potencial vector:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^2r' \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (12)$$

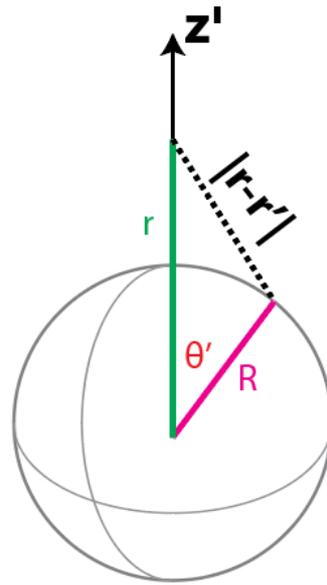
En lo que sigue vamos a usar la resolución de Griffiths (Ex. 5.11). Calculemos  $\mathbf{A}$  en un punto cualquiera  $\mathbf{r}$  (no necesariamente incluido en el eje de rotación):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' R^2 \sin\theta' \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (13)$$

Para simplificar el cálculo, observemos lo siguiente: como estamos integrando sobre una esfera, podemos hacer cualquier rotación en los ejes primados, y el resultado debe ser el mismo, ya que la región de integración no cambió. En particular, es conveniente reorientar el eje  $z'$  en la dirección del punto arbitrario  $\mathbf{r}$ , hay infinitas rotaciones que logran esto: una manera de verlo es fijar el eje  $z'$  y variar  $\varphi'$ , en este caso todas las rotaciones con el mismo "norte" están parametrizadas por un ángulo  $\varphi'$ . Vamos a usar esta libertad más adelante.

De este modo, el valor del módulo se simplifica usando la ley de los cosenos:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta'} \quad (14)$$



Notemos que no aparece la variable  $\varphi'$ , de modo que este denominador va a poder salir de esa integral.

Ahora, luego de rotar los ejes primados, el eje de rotación ya no es  $z'$ , sino que será algún otro eje que forma algún ángulo  $\psi$  con respecto al nuevo eje  $z'$ . Vamos a usar la libertad de elegir  $\varphi'$  que comentábamos hace un rato para hacer que el eje de rotación esté en el plano  $x'z'$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\sin \psi \hat{x} + \cos \psi \hat{z}) \leftarrow \exists \varphi' \text{ tal que se cumple esto} \quad (15)$$

El vector  $\mathbf{K}$  también cambia (con respecto a los ejes primados), ya que  $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}$  depende de  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega \sin \psi & 0 & \omega \cos \psi \\ R \sin \theta' \cos \phi' & R \sin \theta' \sin \phi' & R \cos \theta' \end{vmatrix}$$

Luego de integrar sobre  $\varphi'$  (recordar que el denominador  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  salió fuera de esa integral), los términos que contienen seno o coseno de  $\varphi'$  se anulan al integrar, y el único término de la velocidad que termina contribuyendo a la integral es  $-R\omega \sin \psi \cos \theta' \hat{y}$ . Al meterlo dentro de  $\mathbf{A}$  (ecuación 13) queda:

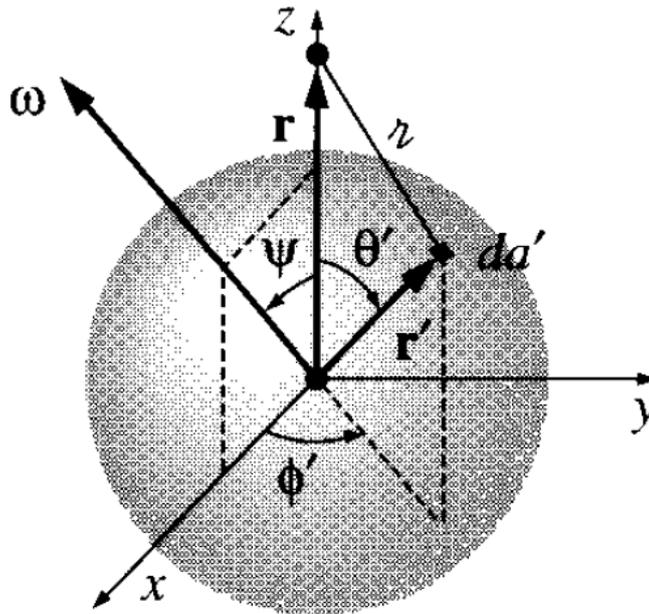
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin \psi}{2} \left( \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} d\theta' \right) \hat{\mathbf{y}}$$

La integral en  $\theta'$  es lo más fácil que podríamos soñar (para comprobarlo solo basta probar qué pasaba con Biot-Savart directamente). De todas formas sigue siendo un cálculo tedioso. El resultado de esta integral (la que está arriba entre paréntesis) es:

$$\frac{-(r^2 + rR + R^2)|r - R| + r^3 + R^3}{3r^2 R^2} = \begin{cases} \frac{2r}{3R^2} & \text{si } r < R \\ \frac{2R}{3r^2} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (16)$$

Metiéndolo en la ecuación de  $\mathbf{A}$ , y notando que  $-\omega r \sin \psi \hat{\mathbf{y}} = \omega \times \mathbf{r}$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{3} \omega \times \mathbf{r} \begin{cases} R\sigma & r < R \\ R^4 \sigma / r^3 & R < r \end{cases} \quad (17)$$



De la última ecuación se lee directamente el momento magnético:

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R^4 \sigma \omega \quad (18)$$

Podemos volver a escribir todo en el sistema en el que  $\omega$  apunta en z:

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \omega \sigma}{3} r \sin \theta \hat{\phi}, & (r \leq R) \\ \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma}{3} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi}, & (r \geq R) \end{cases}$$

Así expresado es más fácil aplicarle el rotor en esféricas. En este último paso podemos usar simetrías: en el eje, al igual que con el problema de la espira circular, sólo puede haber campo

en la dirección  $z$ , que en esféricas, en esos puntos, coincide con la dirección radial. De modo que sólo hará falta calcular la componente radial del rotor de esféricas:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\text{eje } z} &= (\nabla \times \mathbf{A})_r \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ &= \frac{2 \cos \theta}{3} \mu_0 R \omega \sigma \begin{cases} 1 & r \leq R \\ R^3/r^3 & r \geq R \end{cases}\end{aligned}$$

$\theta = 0$  en el eje  $z$ :

$$\boxed{\mathbf{B}_{\text{eje } z} = \frac{2\mu_0 R \omega \sigma}{3} \begin{cases} 1 & r \leq R \\ R^3/r^3 & r \geq R \end{cases}} \quad (19)$$