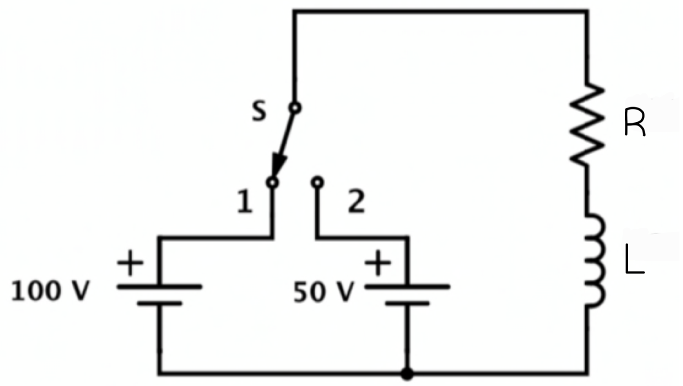
$\boxed{79}$ En el circuito de la figura, se pone el interruptor en la posición 1 en $t = 0$ y se aplica una tensión de $100V$. En $t = 500\mu s$ se pasa la llave a la posición 2. Calcular la intensidad de corriente $i(t)$ en todo instante y graficarla.



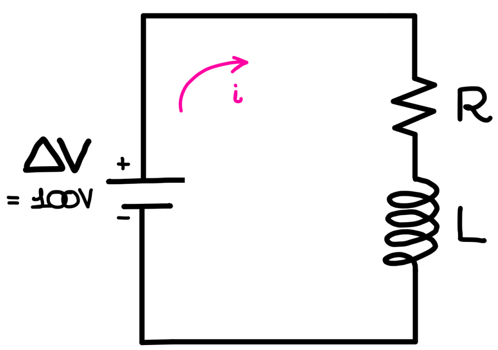
Antes de ponernos a resolver circuitos, podemos repasar conceptualmente la situación que nos propone el problema. Tenemos dos períodos de tiempo

$$t \in [0, \tau)$$
$$t \in [\tau, +\infty),$$

con $\tau = 500\mu s$. Para $t \in [0, \tau)$ el circuito consta de una resistencia R, una inductancia L y una fuente que genera una diferencia de potencial ΔV. Todos los elementos están en serie. En $t = \tau = 500\mu s$ la fuente de se reemplaza por una que genera una diferencia de potencial $\frac{\Delta V}{2}$ mientras que el resto del circuito queda inalterado.

Empecemos mirando la corriente durante el primer período de tiempo.

- **Corriente para $\mathbf{t \in [0, \tau)}$**



Aplicando la ley de mallas a este circuito, encontramos la ecuación que satisface la corriente i que circula por él:

$$\Delta V - R\,i(t) - L\,\frac{d}{dt}i(t) = 0 \tag{1}$$

con condición inicial

$$i(t = 0) = 0 \tag{2}$$

Esta es una ecuación diferencial conocida porque, por ejemplo, apareció ya en la clase práctica del 10 de marzo (sobre inductancias). Para no repetir vamos a resolver la ecuación por un método distinto, el método de utilizar un factor integral $\mu(t)$ en nuestra ecuación, que puede reescribirse como

$$\frac{d}{dt}i(t) + \frac{R}{L}\,i(t) = \frac{\Delta V}{L}$$

Lo que vamos a hacer es multiplicar toda la ecuación por la función $\mu(t) = e^{\frac{R}{L}t}$, haciendo eso

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{R}{L}t}\frac{d}{dt}i(t) + \underbrace{e^{\frac{R}{L}t}\frac{R}{L}}_{=\frac{d}{dt}e^{\frac{R}{L}t}}\ i(t) =& e^{\frac{R}{L}t}\frac{\Delta V}{L} \\
e^{\frac{R}{L}t}\frac{d}{dt}i(t) + \left(\frac{d}{dt}e^{\frac{R}{L}t}\right)\ i(t) =& e^{\frac{R}{L}t}\frac{\Delta V}{L} \\
\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{R}{L}t}i(t)\right) =& e^{\frac{R}{L}t}\frac{\Delta V}{L}
\end{aligned}
$$

donde obtuvimos una ecuación que nos permite integrar directamente

$$
\begin{aligned}
\int dt\ \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{R}{L}t}i(t)\right) =& \int dt\ e^{\frac{R}{L}t}\frac{\Delta V}{L} \\
e^{\frac{R}{L}t}i(t) =& \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\frac{\Delta V}{L} + A \\
i(t) =& \frac{\Delta V}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}
$$

Para determinar la constante de integración A, hacemos uso de la condición inicial $i(t=0) = 0$

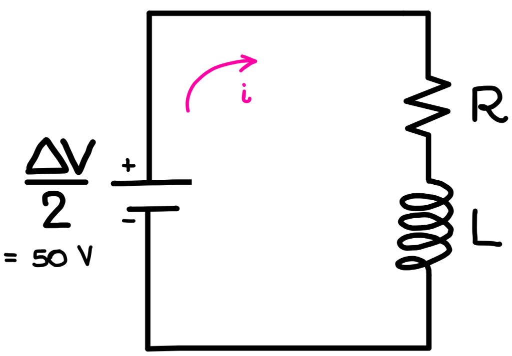
$$
\begin{aligned}
i(t=0) =& 0 \\
\frac{\Delta V}{R} + A =& 0
\end{aligned}
$$

De forma que

$$
\mathbf{i(t)} = \frac{\mathbf{\Delta V}}{\mathbf{R}}\left(\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}}\mathbf{t}}\right) \quad \textbf{para t} \in [\mathbf{0}, \tau) \tag{3}
$$

- **Corriente para t** $\in [\tau, +\infty)$

El circuito ahora es muy similar, pero la tensión se ha modificado de ΔV a $\frac{\Delta V}{2}$



Aplicando la ley de mallas a este circuito, encontramos la ecuación que satisface la corriente i que circula por él:

$$
\frac{\Delta V}{2} - R\,i(t) - L\,\frac{d}{dt}i(t) = 0 \tag{4}
$$

que es idéntica a la ecuación (1) a menos del término constante, que cambió de ΔV a $\frac{\Delta V}{2}$.

La buena noticia es que entonces ya sabemos cuál es la solución de esta ecuación! Es la misma que ya encontramos, reemplazando ΔV por $\frac{\Delta V}{2}$

$$i(t) = \frac{\Delta V}{2R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} \tag{5}$$

Ahora hay que plantear la condición inicial que nos permita determinar la constante de integración A. El valor inicial de t para este circuito es $t = \tau$, porque para todo tiempo anterior el circuito es el que resolvimos arriba. El valor de la corriente en $t = \tau$ será el valor que se encuentre circulando al momento de reemplazar la fuente, es decir que basta evaluar la expresión para la corriente que hemos encontrado para $t \in [0, \tau)$ en $t = \tau$

$$i(\tau) = \frac{\Delta V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right)$$

y la condición inicial para la corriente $i(t)$ en este segundo intervalo resulta

$$i(t = \tau) = \frac{\Delta V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right) \tag{6}$$

Usando la condición (6) para la corriente (5)

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V}{2R} + Ae^{-\frac{R}{L}\tau} =& \frac{\Delta V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right) \\
Ae^{-\frac{R}{L}\tau} =& \frac{\Delta V}{R}\left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right) \\
A =& \frac{\Delta V}{R}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{R}{L}\tau} - 1\right)
\end{aligned}$$

Y, reemplazando el valor de A en la expresión (5) para la corriente en este intervalo de tiempo tenemos

$$\mathbf{i(t) = \frac{\Delta V}{R}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{R}{L}(\tau - t)} - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad \text{para } t \in [\tau, +\infty)} \tag{7}$$

Juntando los dos resultados obtenemos la corriente para todo tiempo, como el ejercicio nos pide

$$\mathbf{i(t) = \begin{cases} \frac{\Delta V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) & t \in [0, \tau) \\ \frac{\Delta V}{R}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{R}{L}(\tau - t)} - e^{-\frac{R}{L}t}\right) & t \in [\tau, +\infty) \end{cases}} \tag{8}$$

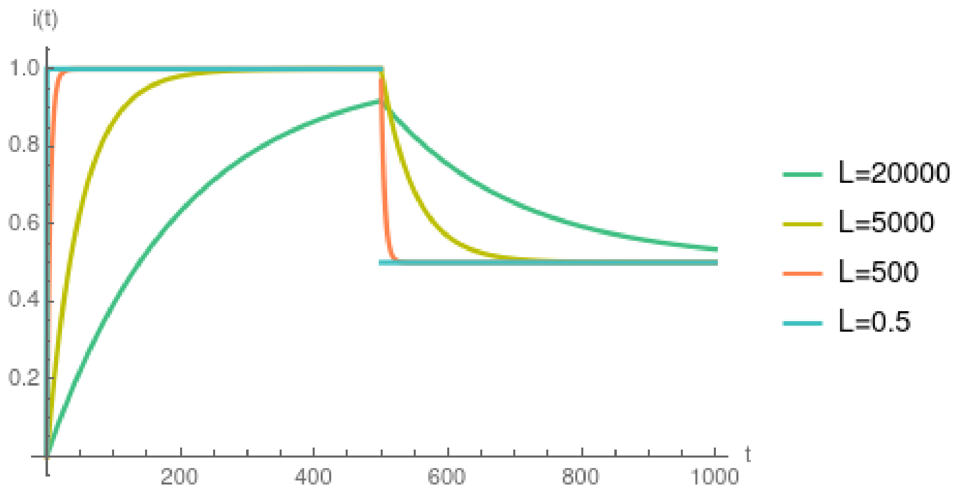


Figura 1: Gráfico de la corriente en función del tiempo para $\Delta V = 100V$, $R = 100\Omega$, $\tau = 500$ y distintos valores de inductancia. Podemos ver cómo para inductancias grandes con respecto al valor de la resistencia la corriente no alcanza a estacionarse en un tiempo $t = \tau$, mientras que para inductancias pequeñas la corrienta alcanza su valor estacionario instantáneamente (en comparación con τ). ¿Por qué cree que sucede esto?