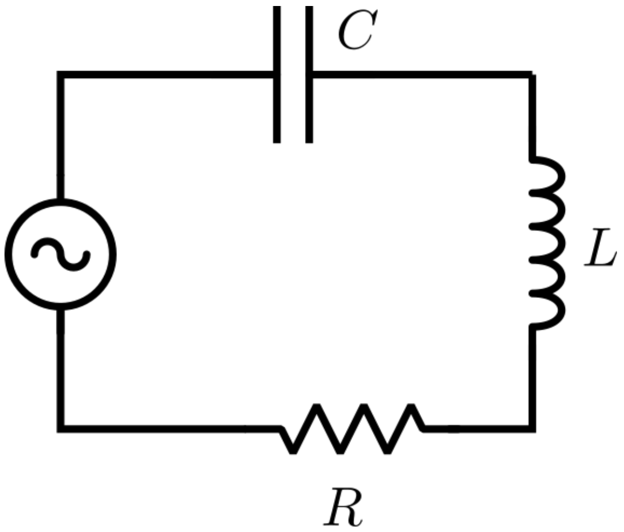
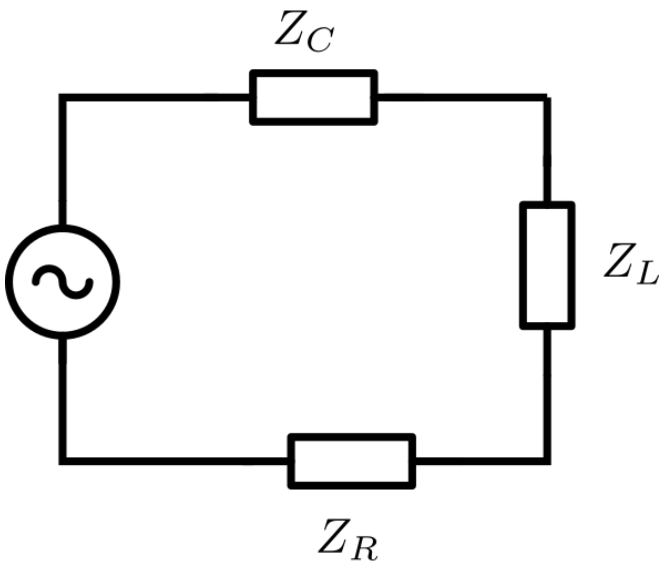
$\boxed{88}$ Una resistencia R, un condensador C y una inductancia L están conectados en serie

(a) Calcular la impedancia compleja de la combinación y su valor en resonancia (esto es, cuando la reactancia X se anula

Empecemos con el diagrama del circuito que es el RLC estándar, como el que vimos en clase.



(a)



(b)

En el formalismo complejo son tres impedancias en serie Z_R, Z_C y Z_L, por lo que la impedancia equivalente del circuito va a ser la suma de las tres. Recordemos cómo es la impedancia en el formalismo complejo para R, C y L:

$$\begin{aligned} C &\to Z_C = \frac{1}{i\omega C} \\ R &\to Z_R = R \\ L &\to Z_L = i\omega L \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces la impedancia equivalente del sistema es

$$Z_{eq} = Z = Z_R + Z_C + Z_L = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + \frac{iL}{\omega}(\omega^2 - \frac{1}{LC}) = R + iX \tag{2}$$

Lo reescribimos así para que quede más claro cuál es el valor de frecuencia para la cual la reactancia (X) se anula, que es $\omega = \sqrt{LC}^{-1}$. Si se acuerdan, cuando mirábamos el transitorio del RLC, la frecuencia natural del sistema (sin amortiguamiento) era $\omega_0 = \sqrt{LC}^{-1}$ por lo que tiene sentido que sea la de resonancia también. Seguro ya lo vieron en la teórica pero ahora en los próximos incisos vamos a ver por qué que la reactancia se anule implica resonancia.

(b) Construir el diagrama vectorial. Empleándolo, hallar el valor de la impedancia para $X = R$ y para la resonancia. Notar que existen dos valores de frecuencia para los cuales se tiene X = R.

Construimos el diagrama vectorial del circuito. Vamos a graficar la caída de tensión (su módulo y fase) en el plano 2D, ya que como estamos en el formalismo complejo La caída de tensión va a tener parte real e imaginaria. El diagrama lo vamos a construir relativo a la fase de la corriente. Fíjense que no la calculamos explícitamente en ningún momento, pero esto no va importar, solo nos concentramos en como cambia la fase de la caída de tensión en cada componente relativa a la de la corriente.

$$I(t) = \frac{V_0}{Z_{eq}} \mathrm{e}^{i\omega t} = I_0 \mathrm{e}^{i\varphi} \mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{3}$$

Entonces los voltajes en los tres componentes quedan:

$$\begin{aligned} V_R(t) &= RI(t) = RI\mathrm{e}^{i\omega t} \to \text{en fase con la corriente} \\ V_L(t) &= i\omega LI(t) = \omega L\mathrm{e}^{i\pi/2} I\mathrm{e}^{i\omega t} \to \text{ 90° mayor respecto a } I \\ V_C(t) &= -\frac{i}{\omega C} I(t) = \frac{\mathrm{e}^{-i\pi/2}}{\omega C} I\mathrm{e}^{i\omega t} \to \text{ 90° menor respecto a } I. \end{aligned} \tag{4}$$

Sabemos que el voltaje de la fuente V tiene que ser la suma de los tres voltajes porque es un circuito ideal, entonces en el diagrama vectorial vamos a poder graficar a $\mathbf{V}$ sumando los tres vectores. E voltaje en este grafico no está todo en el eje real, como si estaba en el que construimos en clase. Esto es porque ahora estamos tomando como referencia a I, entonces la "fase cero" ya no es el voltaje de la fuente si no la corriente.

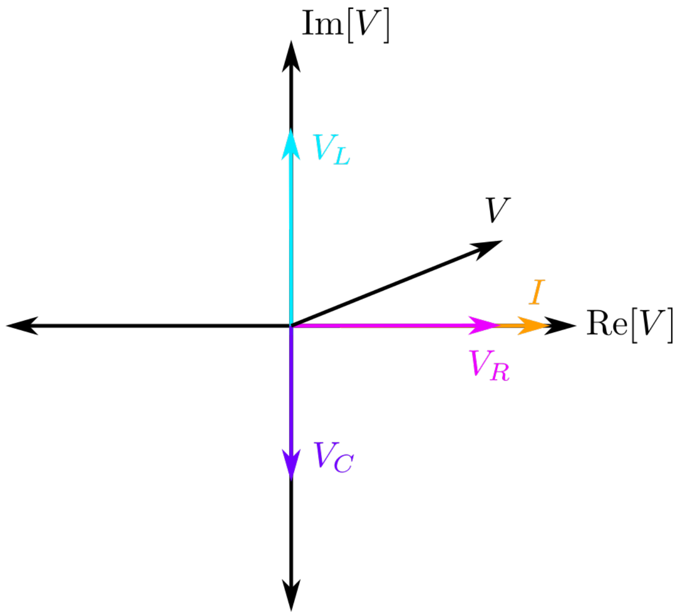


Figura 2

Ahora queremos calcular la impedancia (no la impedancia compleja, si no el módulo de esta). El vector del voltaje total es $\mathbf{V} = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R$ y su módulo es $V = \sqrt{V_R^2 + (V_C - V_L)^2}$, donde distingo los vectores de sus módulos usando negrita para los primeros e itálica para los segundos. El cálculo es solo usar pitágoras aprovechando que son vectores o paralelos o perpendiculares. Un cateto es el módulo de $V_C - V_L$ y el otro es V_R. Parece algo muy particular de este circuito pero es general a cualquier malla con todas las impedancias que haya. Ahora, como todos los voltajes son proporcionales a I podemos reescribir el módulo como

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_C - V_L)^2} = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2} I = \sqrt{R^2 + X^2} I \tag{5}$$

Entonces nos queda que el módulo V es proporcional al módulo de I. Ese número que queda multiplicando a la corriente es la impedancia (no compleja) que es también el módulo de Z_{eq} que calculamos en el inciso anterior.
Si $X = 0$, $\sqrt{R^2 + X^2} = R$. En cambio si $X = R$, $\sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R$. En el próximo inciso vamos a ver que la condición $X = R$ tiene que ver con el ancho de banda del circuito.

(c) Trazar la curva de resonancia y hallar el ancho de banda $(\omega_2 - \omega_1)$

Para encontrar la curva de resonancia, calculemos la intensidad de la corriente I_0.

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2}} \\ |\, I \,|^2 &= \frac{V^2}{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \frac{1}{LC})^2} \end{aligned} \tag{6}$$

El ancho de banda se define como $\omega_2 - \omega_1$ donde $\omega_{1,2}$ son los valores de la potencia RMS del circuito se reducen a la mitad. Como en la resistencia la potencia es $R \mid I \mid^2$, podemos directamente calcular dónde el módulo al cuadrado de la corriente se reduce a la mitad respecto a su valor en resonancia.

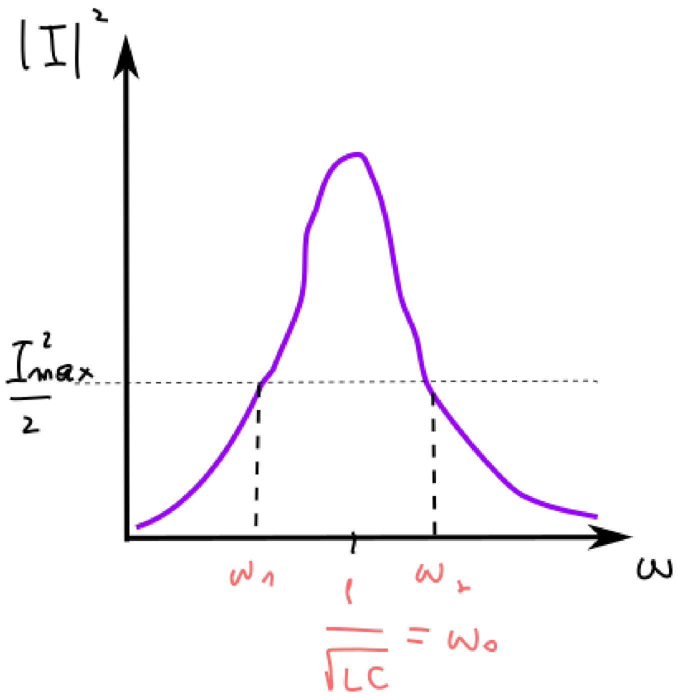


Figura 3

Entonces encontremos $\omega_{1,2}$

$$\begin{aligned}
&\mid I \mid^2 (\omega_0) = \frac{V^2}{R^2} \\
&\mid I \mid^2 (\omega_{1,2}) = \frac{V^2}{2R^2} \Rightarrow R^2 + \frac{L^2}{\omega 1,2^2}(\omega_{1,2}^2 - \frac{1}{LC})^2 = \frac{V^2}{2R^2} \\
&\frac{L^2}{\omega 1,2^2}(\omega_{1,2}^2 - \frac{1}{LC})^2 = R^2 \\
&(\omega_2^2 - \omega_0^2) = \frac{R}{L}\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \\
&(\omega_0^2 - \omega_1^2) = \frac{R}{L}\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

Para hacer la cuenta tengan cuidado cuando toman raíz a ambos lados porque $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$. Con los resultados de arriba tenemos que el ancho de banda es $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$.

(d) Repetir los incisos anteriores suponiendo que ahora los componentes se conectan en paralelo.
Bien, primero diagramamos el circuito.

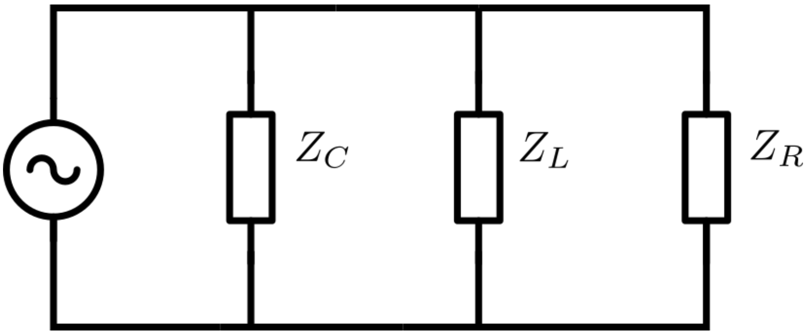


Figura 4

Las impedancias de cada elemento son las mismas que antes, pero ahora como están en paralelo, ya no se suman si no que la inversa de la impedancia equivalente es la suma de las inversas.

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{R} + i(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \tag{8}$$

Escrito en terminos de las admitancias es más cómodo y las cuentas son más fáciles, pero el inciso a) pedía calcular la impedancia equivalente, no la admitancia.

$$\begin{aligned}
Z_{eq} &= \frac{1}{\frac{1}{R} + i(\omega C - \frac{1}{\omega L})} = \frac{\frac{1}{R} - i(\omega C - \frac{1}{\omega L)}}{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2} \\
Z_{eq} &= \frac{R - i\frac{R^2 C}{\omega}(\omega^2 - \frac{1}{LC})}{1 + \frac{R^2C^2}{\omega^2}(\omega^2 - \frac{1}{LC})^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

La reactancia $X = \text{Im}[Z_{eq}]$ se anula para frecuencias tales que $\omega^2 = 1/LC = \omega_0$, igual que para el circuito en serie. El valor de Z_{eq} si $X = 0$, o en resonancia, es

$$Z_{eq}(\omega_0) = R, \tag{10}$$

también igual que en el anterior.

Ahora, el diagrama vectorial ahora en lugar de hacerlo con los voltajes vamos a hacerlo con las corrientes en cada elemento. ¿Por qué? Porque ahora ya no podemos usar la condición de malla única que hacía que valga que la suma de los voltajes es igual al de la fuente. Pero si vale que la corriente que pasa por la fuente (llamémosla I) es igual a la suma de las corrientes en cada componente. Para convencerse de esto pueden plantear los dos nodos con corrientes accesorias y ver que efectivamente vale.

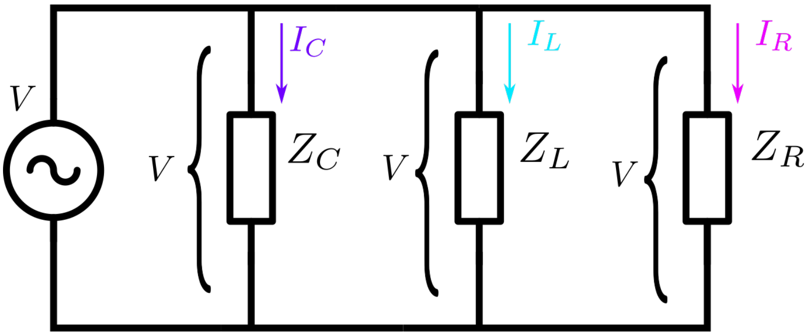


Figura 5

Además la caída de tensión en cada uno de los componentes es la misma (porque están en paralelo), entonces ahora nuestro diagrama lo vamos a construir tomando como referencia la fase de $\mathbf{V}$.

$$\begin{aligned} I_R(t) &= \frac{1}{R} V e^{i\omega t} \rightarrow \text{en fase con la fuente} \\ I_C(t) &= i\omega C V e^{i\omega t} \rightarrow \ 90^\circ \text{ mayor respecto a } V \\ I_L(t) &= \frac{-i}{\omega L} V e^{i\omega t} \rightarrow \ 90^\circ \text{ menor respecto a } V \end{aligned} \tag{11}$$

Con esto en mente construimos el diagrama vectorial del circuito.

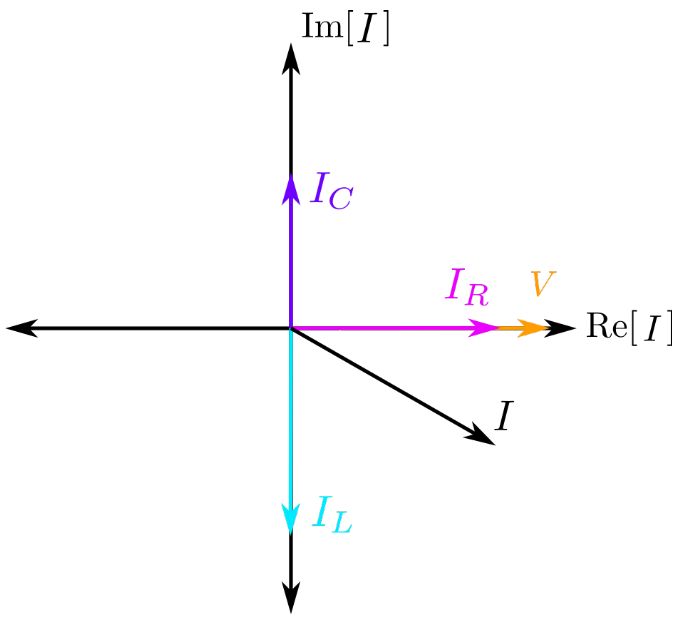


Figura 6

Y para encontrar la impedancia (no compleja, si no su módulo) hacemos lo mismo que para el en serie.

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_L \\ I &= \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} \\ I &= V\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2} \end{aligned} \tag{12}$$

Entonces el módulo de la corriente I nos queda proporcional al módulo del voltaje V. Ese número es la inversa de la impedancia (no compleja). Entonces

$$\mid Z \mid = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2}}. \tag{13}$$

Ahora no es tan fácil escribirlo en términos de la reactancia, porque los vectores son inversamente proporcionales a impedancia compleja. Pero podemos recordar de más arriba que $X = 0$ implicaba $(\frac{1}{\omega L} - \omega C) = 0$. Por lo que entonces tenemos que en ese caso la impedancia es $\mid Z \mid = R$. El otro caso es un poco más complicado, pero podríamos despejarlo haciendo la cuenta de $X = R$ usando el resultado de la Ec. (9) y reemplazando en lo que encontramos arriba.

Por último la campana de resonancia. Pensemos que mediríamos si pusieramos una resistencia en serie con la fuente de voltaje, lo suficientemente chica como para que su efecto en la impedancia total sea despreciable. Ahí la caída de tensión sería proporcional a I, la corriente que pasa por la fuente por lo que podemos pensar en una medida que potencia RMS que sea la disipada por esa resistencia. La idea de esto es poder comparar los resultados que calculemos con los del circuito en serie.

Entonces, tenemos que

$$I = V\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2}, \tag{14}$$

por lo que el módulo al cuadrado es

$$I^2 = V^2(\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2) = V^2(\frac{1}{R^2} + \frac{C}{\omega}(\frac{1}{CL} - \omega^2)^2) = V^2(\frac{1}{R^2} + \frac{C}{\omega}(\omega_0 - \omega C)^2) \tag{15}$$

El gráfico es algo así, cerca de frecuencia natural del circuito. Podemos ver que es prácticamente el opuesto del RLC en serie, la corriente que pasa por la fuente decrece a medida que nos acercamos a la frecuencia natural.

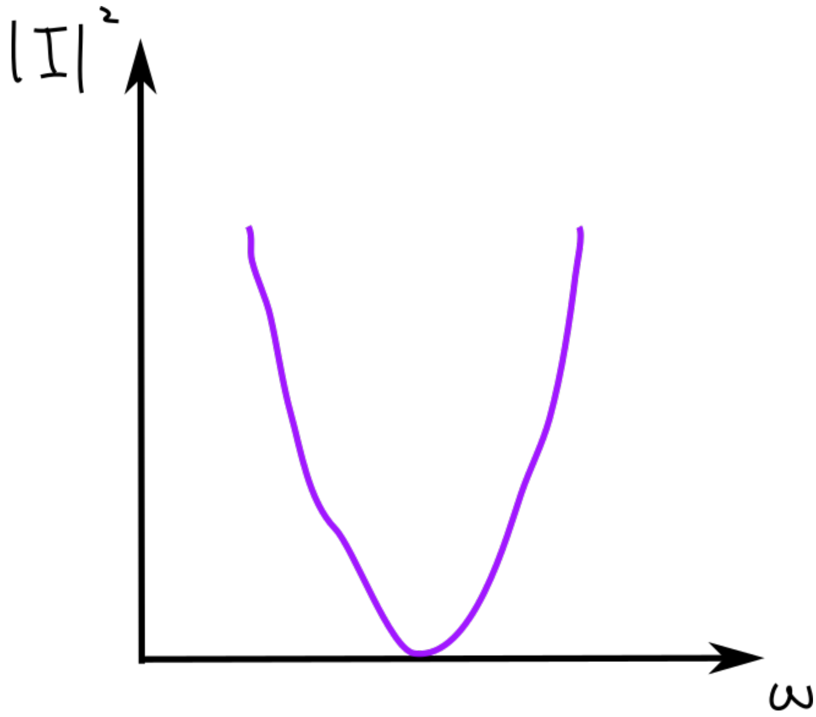


Figura 7: Caption

Para calcular el ancho de banda, en lugar de la corriente I podemos comparar I_R con I. Volvemos a la expresión compleja un rato para ahcer las cuentas.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{V}{Z_{eq}} \Rightarrow V = IZ_{eq} \\
I_R &= \frac{V}{Z_R} = V = IZ_{eq}Z_R \\
\frac{I_R}{I} &= \frac{Z_{eq}}{Z_R} = \frac{1}{R}\frac{R - i\frac{R^2C}{\omega}(\omega^2 - \frac{1}{LC})}{1 + \frac{R^2C^2}{\omega^2}(\omega^2 - \frac{1}{LC})^2} \\
\frac{I_R}{I} &= \frac{Z_{eq}}{Z_R} = \frac{1 - i\frac{RC}{\omega}(\omega^2 - \frac{1}{LC})}{1 + \frac{R^2C^2}{\omega^2}(\omega^2 - \frac{1}{LC})^2}
\end{aligned} \tag{16}$$

Y si ahora calculamos el módulo al cuadrado de I_R/I tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\mid I_R \mid^2}{\mid I \mid^2} &= \frac{Z_{eq}}{Z_R} = \frac{1 + \frac{R^2C^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\left[1 + \frac{R^2C^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2\right]^2} \\
\frac{\mid I_R \mid^2}{\mid I \mid^2} &= \frac{1}{1 + \frac{R^2C^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2}
\end{aligned} \tag{17}$$

Que se parece mucho más a lo que vimos antes con el circuito en serie. Para encontrar el ancho de banda pedimos que $\mid I_R \mid^2$ sea la mitad que $\mid I \mid^2$ (como hicimos para el circuito en serie). Entonces eso implica que

$$\begin{aligned}
1 + \frac{R^2C^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2 &= 2 \\
(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \frac{\omega^2}{R^2C^2} &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

que es casi la misma cuenta que antes, solo que ahora en lugar de $\frac{R}{L}$ tenemos RC. ω_1 y ω_2 quedan

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \omega_0^2} \\ \omega_2 &= \frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \omega_0^2} \end{aligned} \tag{19}$$

y el ancho de banda para el RLC en paralelo es $\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}$.

Un comentario: cuando resolvemos ejercicios donde todas (o algunas) de los componentes están en paralelo, a veces es más cómodo trabajar con la admitancia. El ejercicio habla todo el tiempo de impedancias pero podríamos haberlo resuelto usando $Y_i = Z_i^{-1}$. Así como $Z = R + iX$, $Y = G + iB$, con G la conductancia y B la susceptancia. Podemos relacionar R, X, G y B de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} G &= \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B &= \frac{-X}{R^2 + X^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

donde R es la **parte real de la impedancia**, no necesariamente la resistencia del circuito.

Entonces todo el inciso d) podríamos también haberlo hecho en términos de las admitancias, que es más cómodo porque en paralelo se suman.

Cualquier cosa que no se entienda o no quede claro, pregunten!