

Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 4

Potencial eléctrico

Supongamos una carga puntual q_0 en la posición $\vec{\mathbf{r}}'$. El campo eléctrico es $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = k q_0 \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3}$

Introducimos la función escalar $V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{k q_0}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$

Se cumple que: $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\vec{\nabla}V(\vec{\mathbf{r}}) = -\text{grad}(V)(\vec{\mathbf{r}})$ donde el **gradiente** de V es un *operador vectorial*, que en coordenadas cartesianas es $\vec{\nabla}V(\vec{\mathbf{r}}) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$

Esto lo podemos demostrar así:

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{k q_0}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$$

en cartesianas:

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = V(x, y, z) = \frac{k q_0}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-k q_0 (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -E_x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-k q_0 (y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -E_y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-k q_0 (z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -E_z$$

ya que
$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = k q_0 \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3}$$

Una forma alternativa de demostrarlo es usando *notación indicial*, $\vec{\mathbf{r}} = (x_1, x_2, x_3)$

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = k q_0 |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^{-1} = k q_0 \left[\sum_{l=1}^3 (x_l - x'_l)^2 \right]^{-1/2}$$

$$(\vec{\nabla} V)_j = \frac{\partial V}{\partial x_j} = -\frac{k q_0}{2} \left[\sum_{l=1}^3 (x_l - x'_l)^2 \right]^{-3/2} 2 (x_j - x'_j) = -k q_0 (x_j - x'_j) \left[\sum_{l=1}^3 (x_l - x'_l)^2 \right]^{-3/2} = -(\vec{\mathbf{E}})_j$$

Si ahora tenemos N cargas puntuales q_i definimos la función escalar (por superposición):

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{k q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'_i|}$$

que cumple

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\vec{\nabla} V(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^N k q_i \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'_i)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'_i|^3}$$

A esta función escalar la llamamos el **potencial eléctrico**.

Notemos que *la función potencial está definida a menos de una constante aditiva* (es decir, si le sumamos una constante, sigue cumpliendo que su gradiente es el campo eléctrico):

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{k q_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'_i|} + C$$

Si pedimos (imponemos) $V(\infty) = 0 \rightarrow C = 0$

Para distribuciones continuas en volumen,
$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}'} \frac{k \rho(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} d\mathcal{V}'$$

con expresiones correspondientes para distribuciones en superficie o en una curva.

Suponemos en esa expresión (de cálculo del potencial por integración directa) que la distribución está acotada a una región del espacio.

Notemos que la obtención del potencial por integración directa involucra solamente una integral y no tres como para el campo eléctrico.

De todas formas en algunas situaciones es más conveniente obtener el campo eléctrico utilizando la ley de Gauss (como vimos) y calcular el potencial integrando el campo eléctrico, de forma que se satisfaga que

$$-\vec{\nabla}V = \vec{\mathbf{E}}$$

Lo importante es que la función potencial existe siempre (para el caso electrostático), lo cual nos está diciendo algo importante sobre la fuerza eléctrica...

Si traemos una carga de prueba q , la fuerza eléctrica que siente en el campo eléctrico (generado por otras cargas) es $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} = -q\vec{\nabla}V = -\vec{\nabla}U$, con $U = qV(\vec{\mathbf{r}})$

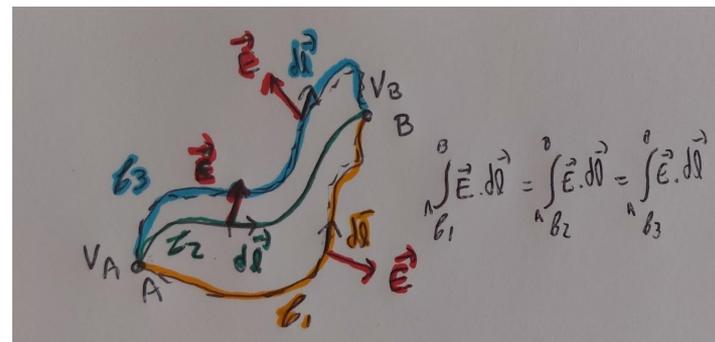
Entonces (en electrostática) **la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa**

La energía potencial electrostática es $U = qV$

Unidades: $[U] = J$ (Joule) $\rightarrow [V] = J/C = V$ (Volt)

(castellanizadas: “Julios”, “Voltios”)

Como $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V \rightarrow [E] = [V]/[L] = V/m$



El trabajo de la fuerza eléctrica en ir de un punto A a un punto B es entonces,

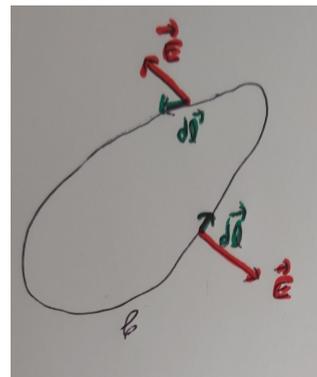
$$W_{\mathbf{F}_E}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_A^B q\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = -\Delta U = U_A - U_B = q(V_A - V_B)$$

$$\rightarrow \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = V_A - V_B \quad (\text{no depende del camino})$$

Si tomamos una curva cerrada (o sea, $A=B$),

$$\text{Circulación} \rightarrow \oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0$$

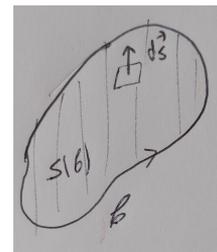
Esto vale para cualquier curva cerrada que uno dibuje en el espacio !



Recordemos otro teorema de Mate 3, el *Teorema de Stokes o Teorema del rotor*,

Si $\vec{\mathbf{A}}$ es un campo “bueno”, $\oint_C \vec{\mathbf{A}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ donde $S(C)$ es una superficie encerrada por C

y aparece un nuevo *operador vectorial, el rotor* (da una idea de la circulación por unidad de área)



$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = \text{rot}(\vec{\mathbf{A}}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Si aplicamos el teorema del rotor al campo eléctrico,

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0, \quad \forall S(C) \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$

Este resultado lo podemos obtener también directamente de $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V$ y aplicando la definición del rotor (usando que las derivadas segundas cruzadas son iguales), es decir usando el hecho de que vale siempre que $\text{rot}(\text{grad})=0$.

El campo eléctrico en electrostática cumple:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$

La primer ecuación se mantiene aún cuando hay variación temporal, la segunda ecuación se modifica.

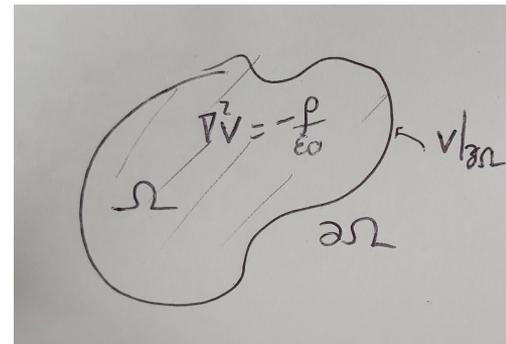
Si combinamos el hecho de que $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V$ y que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\rightarrow \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Donde $\nabla^2 V = \text{lapl}(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ es el *laplaciano* de V

Esta *ecuación diferencial en derivadas parciales* se denomina ecuación de Poisson (también se aplica al potencial gravitatorio).

Esta ecuación es ampliamente conocida por los matemáticos y se puede demostrar que, dada una región en el espacio y *condiciones de borde (o de contorno)* sobre el contorno que encierra a esta región, que pueden ser de Dirichlet (dando el valor de V en los contornos) o de Neumann (dando el valor de la derivada normal de V en los contornos), entonces existe solución y es única !



Miremos el potencial eléctrico, para el caso de una carga puntual q_0 en el origen

$$V(r) = \frac{k q_0}{r}$$

Si traemos una carga de prueba q desde el infinito hasta una distancia r de la carga q_0 el trabajo que hace la fuerza eléctrica contra nosotros es $W_{\text{FE}}(\infty \rightarrow r) = -\Delta U = U(\infty) - U(r) = q[V(\infty) - V(r)] = -q V(r)$ por lo tanto el trabajo que hacemos nosotros es $W = qV(r)$ es decir que

$V(r)$ representa el trabajo por unidad de carga que hay que realizar para traer una carga a la posición r en ese potencial eléctrico.

Energía de un sistema de cargas

Es la energía (trabajo) que se necesita para “armar” una configuración dada de cargas.

Traigo la 1er carga q_1 , a la posición \vec{r}_1 y como no había nada no tengo que hacer ningún trabajo.

Traigo la 2da carga q_2 a la posición \vec{r}_2 , el trabajo es $W_2 = q_2 V_1(\vec{r}_2) = \frac{k q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = U_{21} = U_{12}$

Traigo la 3er carga, $W_3 = q_3 V_1(\vec{r}_3) + q_3 V_2(\vec{r}_3) = U_{31} + U_{32}$

El trabajo hasta aquí es $W = W_2 + W_3 = U_{21} + U_{31} + U_{32}$

Traigo la 4ta carga $W_4 = q_4 V_1(\vec{r}_4) + q_4 V_2(\vec{r}_4) + q_4 V_3(\vec{r}_4) = U_{41} + U_{42} + U_{43}$

El trabajo hasta aquí es $W = W_2 + W_3 + W_4 = U_{21} + U_{31} + U_{32} + U_{41} + U_{42} + U_{43}$

Generalizando, el trabajo total se puede escribir como:

$$U = W = \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} U_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1, n \neq m}^N U_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N q_m \sum_{n=1, n \neq m}^N V_n(\vec{\mathbf{r}}_m) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N q_m V_m$$

Donde usamos que $U_{mn} = U_{nm}$ y definimos $V_m = \sum_{n=1, n \neq m}^N V_n(\vec{\mathbf{r}}_m)$

Llamamos a U la *energía almacenada en la configuración de cargas*.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N q_m V_m$$

Para una distribución continua de cargas en volumen es:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\mathbf{r}}) V(\vec{\mathbf{r}}) d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{\mathbf{r}}) V(\vec{\mathbf{r}}) d\mathcal{V}$$

Extendemos la integral a todo el espacio haciendo la densidad = 0 afuera del volumen de carga

Usamos Gauss, $\rho(\vec{\mathbf{r}}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} \rightarrow U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}) d\mathcal{V}$

y aplicamos la identidad $\vec{\nabla} \cdot (V \vec{\mathbf{E}}) = V \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\nabla} V = V \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$

$$\rightarrow V (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}) = \vec{\nabla} \cdot (V \vec{\mathbf{E}}) + |\vec{\mathbf{E}}|^2$$

reemplazamos en la integral de volumen que nos da la energía,

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \cdot (V \vec{\mathbf{E}}) d\mathcal{V} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\mathbf{E}}|^2 d\mathcal{V}$$

para la primer integral usamos el teo. divergencia, $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \cdot (V \vec{\mathbf{E}}) d\mathcal{V} = \oint_{S(\mathbb{R}^3)} V \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0$

donde usamos que el campo eléctrico se anula en el infinito (el “borde” de todo el espacio).

$$\rightarrow \boxed{U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\mathbf{E}}|^2 d\mathcal{V}}$$

y podemos definir una *densidad de energía eléctrica* $\rho_U = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{\mathbf{E}}|^2$

Podemos interpretar esto como que al crear un campo eléctrico almacenamos una energía, que está distribuida en todo el espacio, con esa densidad de energía.

Algo más...

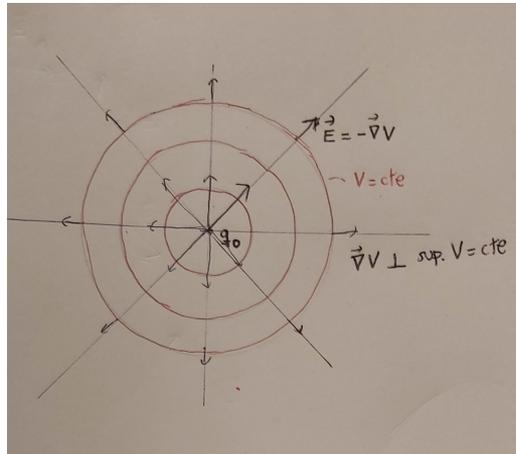
Definimos las *superficies equipotenciales* como las superficies en donde el potencial $V = \text{cte}$

(si estamos en dos dimensiones, en el plano, definimos las curvas equipotenciales, donde $V = \text{cte}$).

Por ejemplo, para el caso del potencial de una carga en el origen, sabemos

$$V(r) = \frac{k q_0}{r}$$

y las superficies equipotenciales son las superficies dadas por $V = \text{cte}$, o sea $r = \text{cte}$, es decir, superficies esféricas.



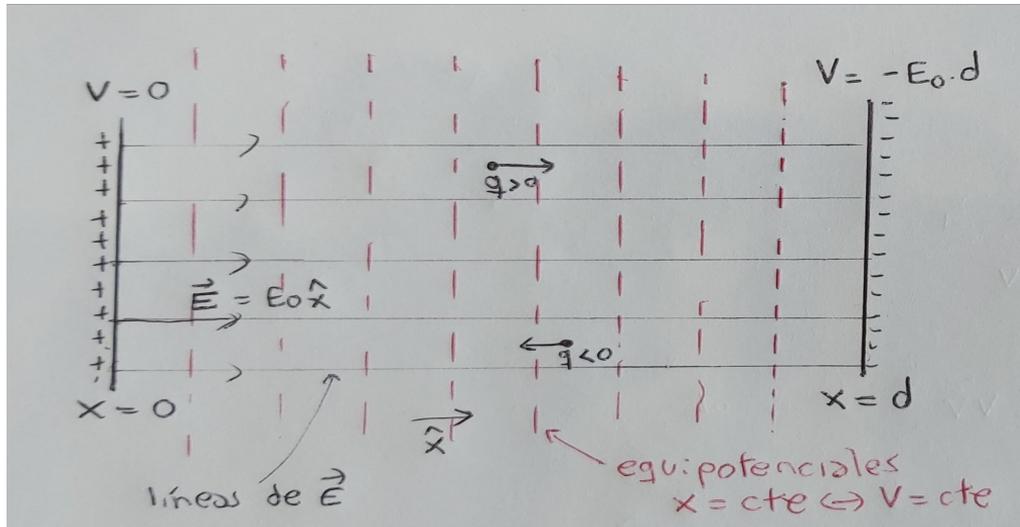
Notemos que las *líneas de campo eléctrico* (que en este caso son radiales) son *ortogonales a las superficies equipotenciales*.

Esto vale siempre, ya que el gradiente de V (que es el campo eléctrico) es ortogonal a las superficies de $V = \text{cte}$.

Si solamente actúa la fuerza eléctrica (conservativa) la **energía total se conserva**, es decir energía cinética más energía potencial = constante.

Si una carga de prueba $q > 0$, es dejada libre (con velocidad inicial = 0) se va a mover en la dirección perpendicular a las equipotenciales (dirección del campo eléctrico), y de las equipotenciales con V mayor a las de V menor, ganando energía cinética. Si la carga de prueba es $q < 0$ entonces se mueve de las equipotenciales de V menor a las de V mayor, también ganando energía cinética (esto ocurre ya que $U = qV$).

Consideremos el siguiente potencial de ejemplo, $V(x) = -E_0 x$, definido entre la posición $x = 0$ y $x = d$ el campo eléctrico es $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = E_0 \hat{x}$ es decir un campo uniforme entre $x = 0$ y $x = d$ que corresponde al campo entre dos placas (infinitas) paralelas a distancia d entre sí.



Una carga $q > 0$ soltada entre las dos placas se mueve en la dirección x positiva (es decir, de V mayor a V menor) disminuyendo su $U = qV$ y ganando energía cinética.

Una carga $q < 0$ soltada entre las dos placas se mueve en la dirección x negativa (es decir de V menor a V mayor) disminuyendo su $U = qV$ y ganando energía cinética.