Física 3: Electricidad y Magnetismo

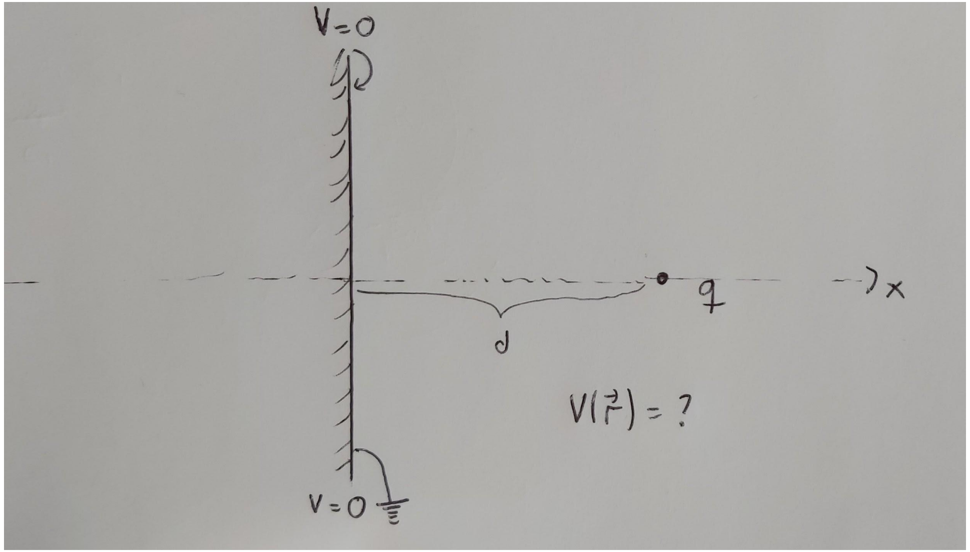
Pablo Dmitruk

Clase 7

Método de imágenes

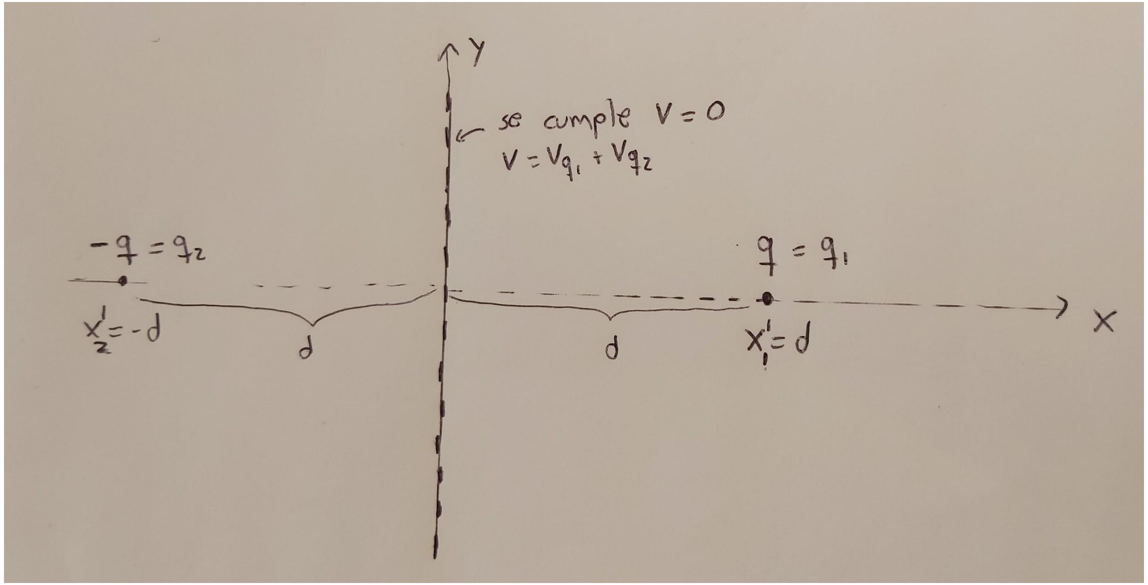
Es un método que sirve para obtener el potencial y el campo eléctrico en situaciones (con geometría sencilla) de cargas frente a conductores, dipolos frente a conductores o conductores frente a un campo uniforme.

Supongamos una carga q frente a un plano infinito, conductor, y con potencial V=0 en la superficie del conductor (o sea, conductor "*puesto a tierra*"). La carga está a una distancia d del plano.



Queremos saber el potencial en cualquier punto del espacio, con x > 0.

Supongamos que colocamos un carga “imagen” de valor opuesto -q, a una distancia d hacia las x negativas (o sea, en x=-d) y quitamos el plano conductor (línea punteada).



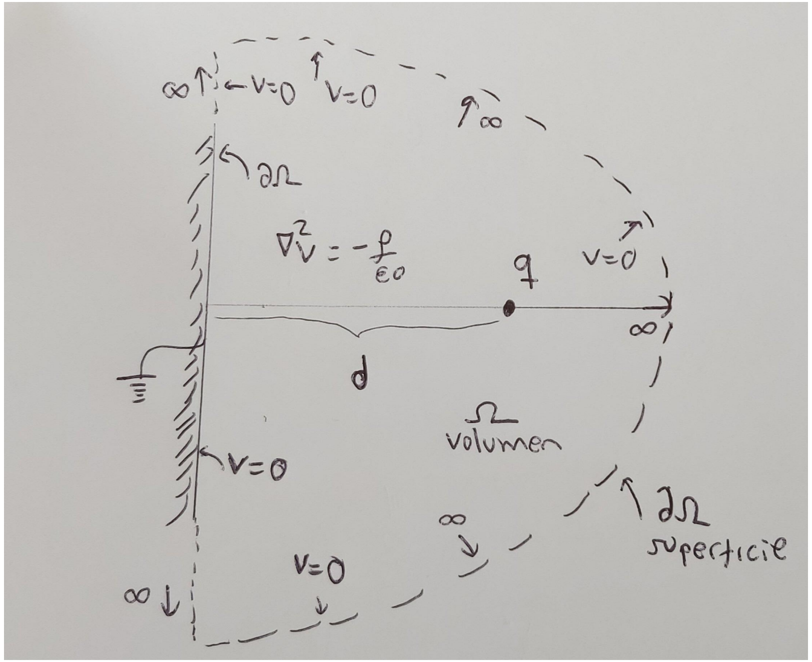
El potencial generado por las dos cargas es:

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = k\Big[\frac{q_1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1'|} + \frac{q_2}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_2'|}\Big] = k\,q\Big[\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - d\hat{\mathbf{x}}|} - \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} + d\hat{\mathbf{x}}|}\Big] = kq\Big[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}\Big]$$

Que cumple que en el plano $x = 0$, $V(x = 0, y, z) = 0$

Pensemos en el problema original con el que empezamos. Lo que queremos es resolver el potencial eléctrico en la región x > 0, que podemos pensar como un volumen infinito, cuyos “bordes” son el plano yz en x=0 y el infinito para distancias grandes de la carga. En esa región hay una única carga en la posición x=d. En los bordes de esa región, tanto en el plano x=0 como en el infinito pedimos que V=0.

Matemáticamente obtener el potencial eléctrico consiste en encontrar la solución a la ecuación de Poisson $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$, con la densidad de carga definida en la región x > 0 (dada por una carga puntual q en la posición x=d), con la condición de contorno de que V=0 en el plano x=0 y V=0 en infinito.



Sabemos que <u>existe</u> solución a este problema y que esa solución es <u>única</u>

Pero si miramos el potencial de las dos cargas q y -q en posiciones x=d y x=-d, vemos que ese potencial cumple que en la región x > 0 la distribución de carga es idéntica a la que nos pedían resolver (una carga q en la posición x=d) y que la condición V=0 se cumple tanto en el plano x=0 como en infinito.

Como sabemos que la solución al problema planteado es <u>única</u>, entonces <u>ESA es la solución</u> !!!!!

<u>LA SOLUCIÓN</u> al problema de la carga q a distancia d de un plano infinito conductor, con potencial V=0 en el plano es:

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = k\,q\Big[\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - d\hat{\mathbf{x}}|} - \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} + d\hat{\mathbf{x}}|}\Big] = kq\Big[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}\Big]$$

Si calculamos el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V$,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = k\,q\left\{\frac{(x-d)}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{(x+d)}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

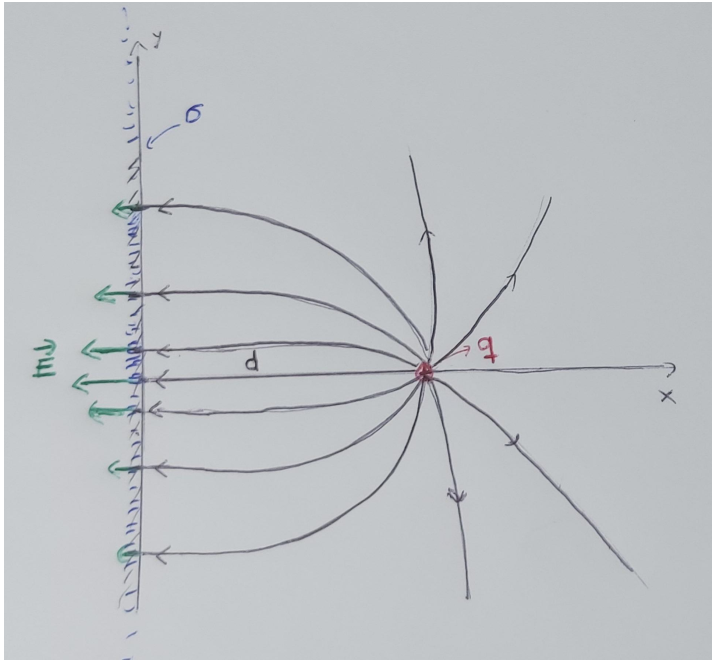
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = k\,q\,y\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = k\,q\,z\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

Notemos que si evaluamos el campo eléctrico en x=0, es decir sobre el plano conductor, entonces

$$E_x(x=0,y,z) = -\frac{2\,k\,q\,d}{[d^2+y^2+z^2]^{3/2}}, \qquad E_y(x=0,y,z)=0, \qquad E_z(x=0,y,z)=0$$

Es decir, el campo eléctrico en (x=0, y, z) tiene sólo componente en x, como corresponde a un campo perpendicular a la superficie conductora. Según el signo de q el campo apunta en uno u otro sentido.



Usando la expresión $\overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$ en la superficie conductora, podemos calcular la densidad de carga σ *inducida* en la superficie

$$\sigma = -\frac{q\,d}{2\pi\left[y^2 + z^2 + d^2\right]^{3/2}}$$

(usamos $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$)

Es decir que si q > 0 la carga que se induce sobre el plano es < 0 y disminuye en intensidad a medida que nos alejamos del origen (frente a la carga q).

Se puede ver también que si integramos la densidad de carga en todo el plano se obtiene -q

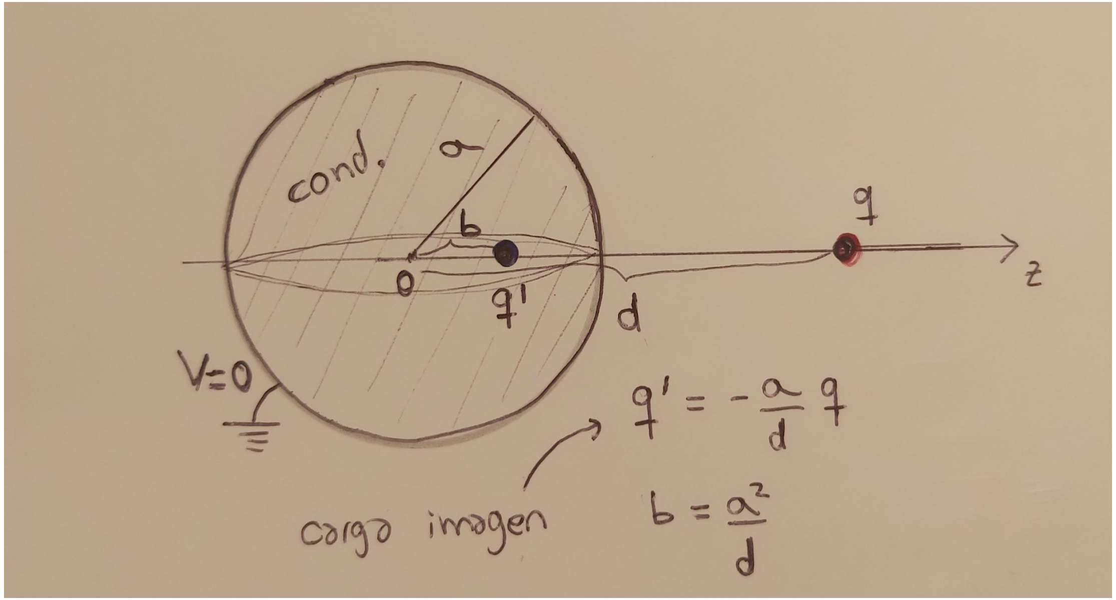
$$\int_{\text{plano x=0}} \sigma\, dS = -q$$

Podemos calcular también la fuerza que el plano ejerce sobre la carga q (que será igual y opuesta a la fuerza que la carga ejerce sobre el plano). Para ello restamos al campo eléctrico total el campo de la carga q, evaluamos en la posición de la carga y se obtiene:

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_{\text{plano}\to\text{carga}} = q\,(\overrightarrow{\mathbf{E}} - \overrightarrow{\mathbf{E}}_q)(x = d, y = 0, z = 0) = -\frac{k\,q^2}{4\,d^2}\hat{\mathbf{x}}$$

Como la fuerza entre dos cargas q y -q separadas una distancia 2d

Carga frente a esfera conductora puesta a tierra (V=0)



q' y b salen de plantear:

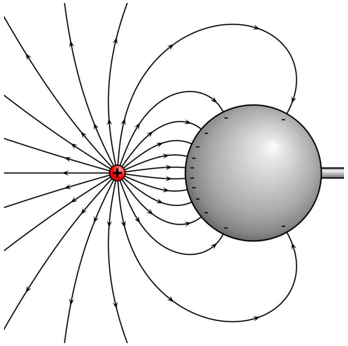
$$\frac{q}{d-a} + \frac{q'}{a-b} = 0$$

$$\frac{q}{d+a} + \frac{q'}{a+b} = 0$$

La carga imagen vale $q' = -\frac{a}{d}q$ y se coloca a una distancia $b = \frac{a^2}{d} < a$ del centro de la esfera

El potencial es: $V(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = k\,q\Big[\frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{r}} - d\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{a}{d\,|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \frac{a^2}{d}\hat{\mathbf{z}}|}\Big]$ y cumple $V(r = a) = 0$

Para calcular el campo eléctrico conviene usar *coordenadas esféricas* y utilizar que:



$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad \hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\theta}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\nabla}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right]$$

Una vez calculado $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ en todo punto, se puede evaluar en la superficie de la esfera, r=a y se obtiene:

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(r=a) = -\frac{k\,q}{a}\frac{(d^2-a^2)}{(a^2+d^2-2\,a\,d\,\cos\theta)^{3/2}}\hat{\mathbf{r}}$$ que es normal a la superficie.

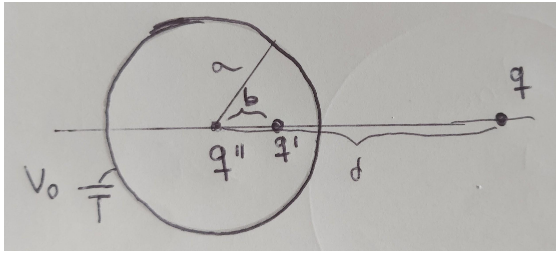
De $\overrightarrow{\mathbf{E}}(r=a) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{r}}$ puede obtenerse la densidad superficial

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a}\frac{(d^2-a^2)}{(a^2+d^2-2\,a\,d\,\cos\theta)^{3/2}}$$

Finalmente, restándole al campo total el campo de la carga q podemos obtener la fuerza que la esfera le hace a la carga,

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_{\text{esfera}\to\text{carga}} = -\frac{k\,a\,d\,q^2}{(d^2-a^2)^2}\hat{\mathbf{z}} = \frac{k\,q\,q'}{(d-b)^2}\hat{\mathbf{z}}$$ que sería la fuerza entre dos cargas q y q' a distancia (d-b)

Cómo hacemos si la esfera tiene $V(r=a) = V_0 \neq 0$?



---> le agregamos una carga q'' en el origen tal que su potencial

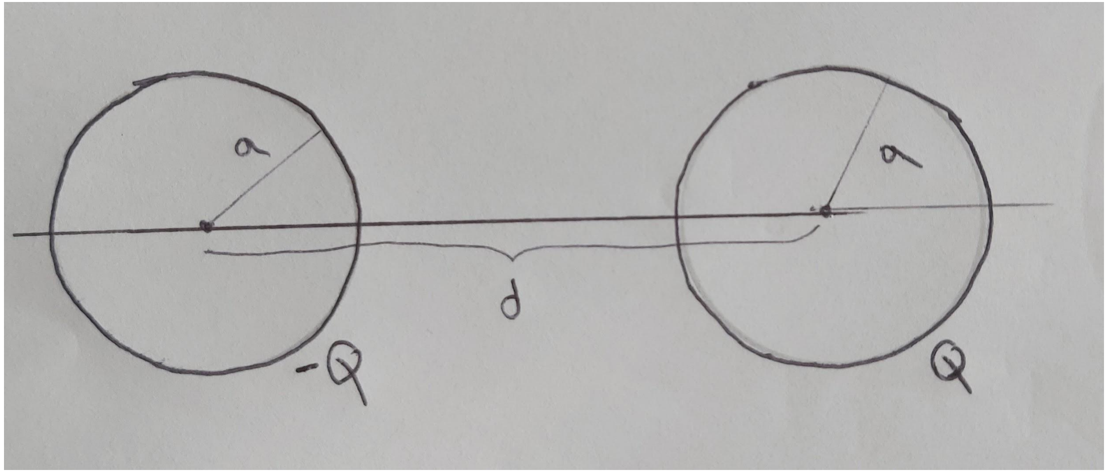
sea V_0 en $r = a$ $\quad \dfrac{k\,q''}{a} = V_0 \;\rightarrow\; q'' = \dfrac{a\,V_0}{k}$

Y si la esfera está aislada e inicialmente neutra ? (o sea la carga neta de la esfera es 0)

---> Con las cargas imágenes q' en b y q'' en el origen me aseguro que V=cte en la esfera, aunque no sé el valor de V_0

---> Pido $q'' + q' = 0 \;\rightarrow\; q'' = -q' = \dfrac{a}{d}q \;\;\mathrm{y}\;\; V_0 = \dfrac{k\,q}{d}$

Problema con infinitas imágenes:



Ummagumma (Pink Floyd)

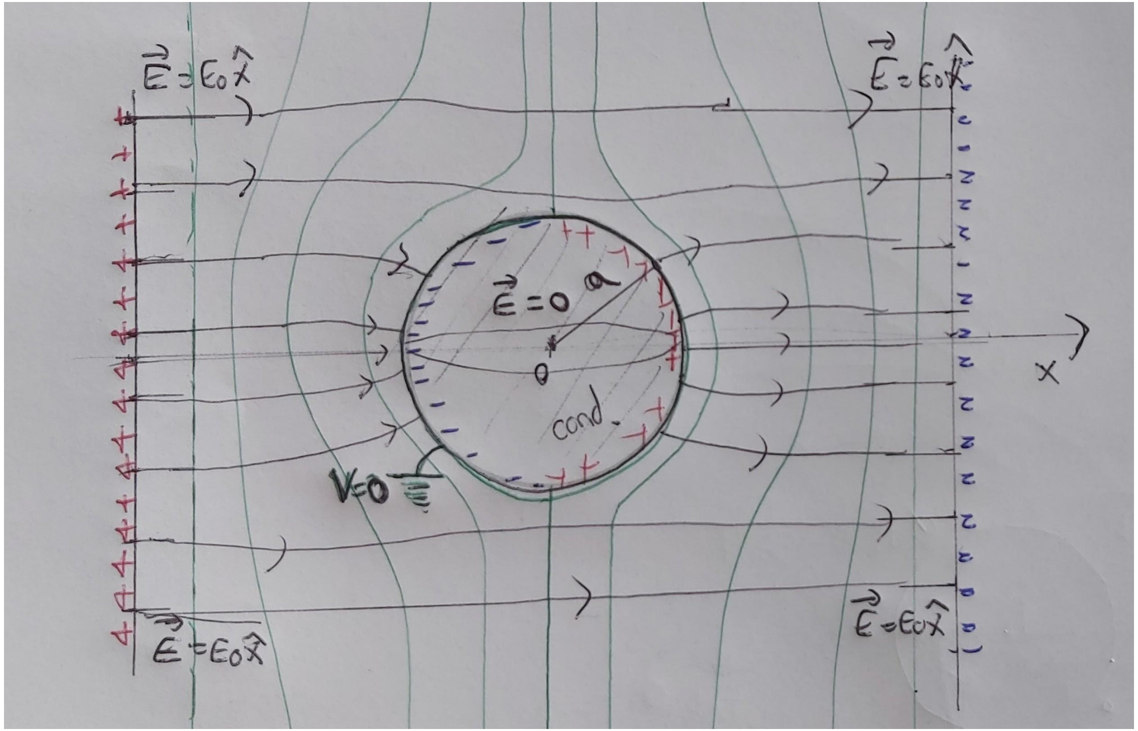
[Efecto Droste !]

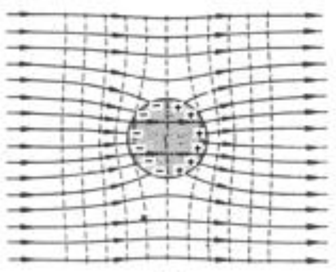
Cómo encuentro las imágenes dadas las cargas y los conductores ?

En verdad si uno dibuja las equipotenciales de un conjunto de cargas después puede considerar el problema al revés: ya sé que esas superficies las podría reemplazar por un conductor, y las cargas que queden encerradas en alguna superficie equipotencial vendrían a ser las imágenes ante el conductor (de esa forma particular dada por la superficie equipotencial) de las cargas que están afuera (y viceversa, las cargas que quedan afuera son las imágenes de las que quedaron adentro)

→ Así lo pensó Maxwell !!

Conductor esférico en campo eléctrico uniforme

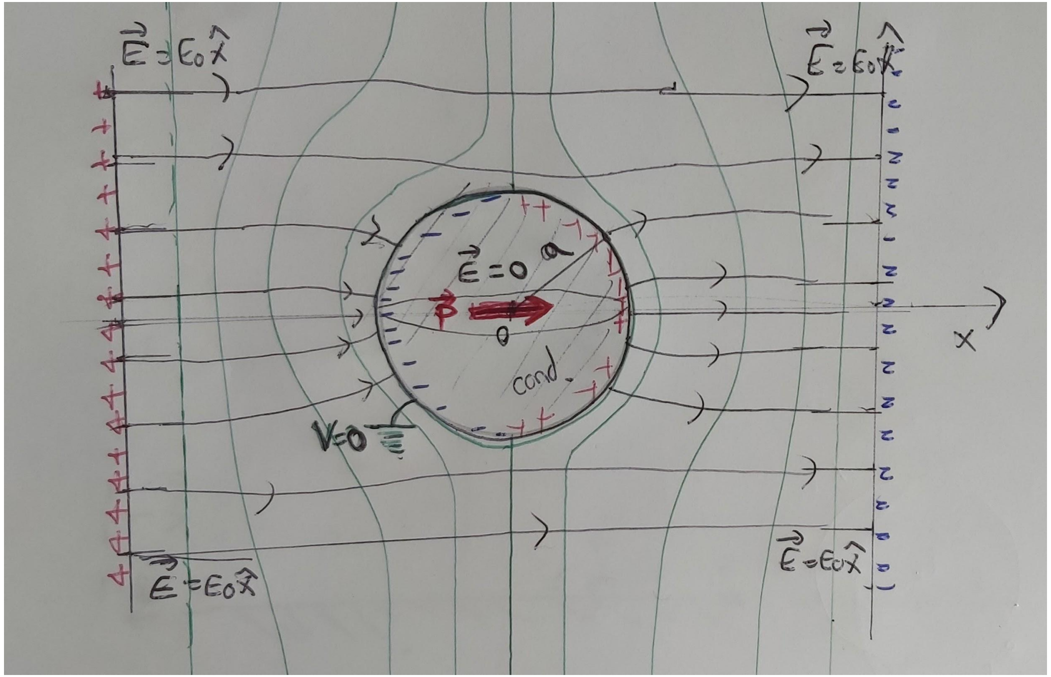



(c)

El potencial de un campo uniforme es $V = -x\, E_0$ y ese es el potencial lejos de la esfera (de modo que el campo sea $\vec{\mathbf{E}} = E_0\, \hat{\mathbf{x}}$ lejos de la esfera). Pero queremos que $V(r = a) = 0$ y este potencial no lo cumple.

Viendo como se distribuyen las cargas sobre la esfera podemos pensar que se parece a un *dipolo*

→ *probemos* sumarle el potencial de un dipolo,



$$V(\vec{\mathbf{r}}) = -xE_0 + k\frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{r^3}$$

Las equipotenciales son las que están en verde en la figura. Hay una (con V=0) en la superficie esférica y a lo largo del eje vertical.
Las equipotenciales a distancias lejos de la esfera, para r grande, tienden a ser rectas verticales con x=cte.

De pedir $V(r=a)=0$ obtenemos $\vec{\mathbf{p}} = \frac{E_0\, a^3}{k}\hat{\mathbf{x}}$ $\rightarrow$ $V(\vec{\mathbf{r}}) = xE_0\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right) = r\cos\theta\, E_0\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)$

y tomando gradiente podemos obtener el campo eléctrico