Ejercicio integrador guía 1

Física 3 - Primer Cuatrimestre 2022 - Cátedra Dmitruk

Se tiene una esfera de radio R con densidad de carga volumétrica ρ. Sobre la esfera, se apoya un casquete semi-esférico de espesor despreciable, densidad de carga superficial σ y radio R (ver Figura 1). Se pide:

a) El potencial y campo eléctrico sobre el eje de simetría de la configuración.

b) La fuerza que el casquete ejerce sobre la esfera maciza. *Ayuda: Use el principio de acción y reacción.*

c) Los momentos monopolar y dipolar de la distribución. Calcule el valor de σ para el cual se anula el momento monopolar, ¿es posible anular también el momento dipolar?

d) Para el valor de σ hallado en (c), calcule el potencial y campo eléctrico lejos de la configuración. Diagrame las líneas de campo.

Integrales que puede llegar a necesitar:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{a + b\cos x}} dx = -\frac{2}{b}\sqrt{a + b\cos(x)} \tag{1}$$

$$\int \frac{\alpha + \beta\cos x}{(a + b\cos x)^{3/2}} \sin(x) dx = -\frac{2}{b^2}\frac{\beta(2a + b\cos(x)) - \alpha b}{\sqrt{a + b\cos(x)}} \tag{2}$$

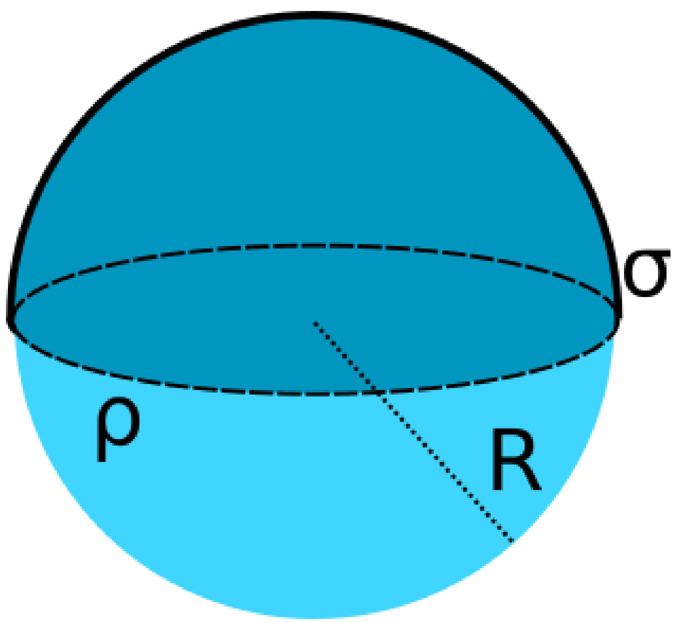

Figura 1: Configuración del problema. Un casquete semi-esférico es la mitad superior de un casquete esférico.

1. Resolución

1.1. Inciso a

Usamos el principio de superposición, calculando por separado el campo del casquete y el de la esfera. Ponemos el origen en el centro de la esfera, para la cual podemos usar fácilmente Gauss. Esta esfera tiene simetría de rotación alrededor de cualquier eje que pase por el origen y de reflexión respecto a cualquier plano que pase por el origen (la parte a la mitad), por lo que es sabemos que $\bar{E}_e(\bar{r}) = E(r)\hat{r}$. Definimos entonces cómo superficie de Gauss un casquete esférico de radio r arbitrario, centrada en el origen. Esta superficie tiene $d\bar{S} = r^2 \sin\theta \hat{r} d\varphi d\theta$ y el flujo resulta

$$\oiint_S \bar{E}(\bar{r}) d\bar{S} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta = E(r) r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi E(r) r^2$$

Por otro lado, la carga encerrada dependerá de si nuestra superficie se encuentra dentro ($r \leq R$) o fuera ($r \geq R$) de la esfera. En el primer caso, tenemos

$$Q_{enc} = \int_0^{r} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$$

mientras que en el otro tenemos

$$Q_{enc} = \int_0^{R} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$

Por lo tanto, tenemos

$$4\pi r^2 E(\bar{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3} r^3 \rho & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{4\pi}{3} R^3 \rho & \text{si } r \geq R \end{cases} \Longrightarrow E(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3} \rho r & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{4\pi}{3} R^3 \rho \dfrac{1}{r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

donde vemos que surge naturalmente $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ y la carga total de la esfera $Q_e = 4\pi R^3 \rho/3$. Reorganizando en términos de estas constantes y recuperando el caracter vectorial, tenemos

$$\bar{E}_e(\bar{r}) = \begin{cases} kQ_e \dfrac{r}{R^3} \hat{r} & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{kQ_e}{r^2} \hat{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Para obtener el campo sobre el eje, basta con evaluar en $\bar{r} = z\hat{z}$

$$\bar{E}_e(z\hat{z}) = \begin{cases} kQ_e \dfrac{z}{R^3} \hat{z} & \text{si } |z| \leq R \\ \dfrac{kQ_e}{z^2} \operatorname{sg}(z) \hat{z} & \text{si } |z| \geq R \end{cases}$$

El campo del casquete es más complicado y sale por integración directa. Empecemos definiendo las variables de la fórmula, donde parametrizamos el casquete en esféricas

$$\begin{aligned} \bar{r} &= z\hat{z} \\ \bar{r}' &= R\hat{r}' = R\left[(\cos\varphi'\hat{x} + \sin\varphi'\hat{y})\sin\theta' + \cos\theta'\hat{z}\right] \qquad 0 \leq \varphi' \leq 2\pi \quad 0 \leq \theta' \leq \pi/2 \\ dS' &= R^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi \qquad \sigma(\bar{r}') = \sigma \\ \bar{r} - \bar{r}' &= -R(\cos\varphi'\hat{x} + \sin\varphi'\hat{y})\sin\theta' + (z - R\cos\theta')\hat{z} \\ |\bar{r} - \bar{r}'|^2 &= R^2(\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi')\sin^2\theta' + (z - R\cos\theta')^2 = R^2\sin^2\theta' + z^2 - 2zR\cos\theta' + R^2\cos^2\theta' = z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta' \end{aligned}$$

Podemos escribir entonces la integral cómo

$$\bar{E}_c(z\hat{z}) = k \int \sigma(\bar{r}') \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} dS' = k\sigma \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{-R(\cos\varphi'\hat{x} + \sin\varphi'\hat{y})\sin\theta' + (z - R\cos\theta')\hat{z}}{(z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta')^{3/2}} R^2 \sin\theta' d\varphi' d\theta'$$

La primer integral en φ' es sencilla, pues las componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ integran cero al ser sinusoidales. El integrando en la componente $\hat{z}$ es constante, por lo que resulta en un factor 2π multiplicando

$$\bar{E}_c(z\hat{z}) = k2\pi\sigma R^2\hat{z}\int_0^{\pi/2}\frac{(z-R\cos\theta')}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta')^{3/2}}\sin\theta' d\theta'$$

Podemos reconocer inmediatamente la integral que nos sugirieron en el problema, donde $\alpha = z$, $\beta = -R$, $a = z^2+R^2$ y $b = -2zR$, por lo que obtenemos simplemente

$$\begin{aligned}\bar{E}_c(z\hat{z}) &= k2\pi\sigma R^2\hat{z}\left[-\frac{2}{4z^2R^2}\frac{-R(2(z^2+R^2)-2zR\cos\theta')+2z^2R}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta'}}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}\\ &= \frac{k2\pi\sigma}{z^2}\hat{z}\left[\frac{R^3-zR^2\cos\theta'}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta'}}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}\\ &= \frac{k2\pi\sigma}{z^2}\hat{z}\left[\frac{R^3}{\sqrt{z^2+R^2}}-\frac{R^3-zR^2}{\sqrt{z^2+R^2-2zR}}\right]\end{aligned}$$

Podemos notar que $z^2+R^2-2zR = (z-R)^2$ y, por lo tanto, $\sqrt{z^2+R^2-2zR} = |z-R|$. Finalmente, sacando un factor común R^2 tenemos

$$\bar{E}_c(z\hat{z}) = \frac{k2\pi\sigma R^2}{z^2}\hat{z}\left[\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}-\frac{R-z}{|z-R|}\right] = \frac{kQ_c}{z^2}\hat{z}\left[\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}-\mathrm{sg}(R-z)\right]$$

donde definimos la carga del casquete $Q_c = 2\pi\sigma R^2$. Para juntar ambos campos, nos basta considerar 3 regiones; la primera por encima de ambos, la segunda dentro de la esfera y la tercera por debajo de la esfera. Notemos también que en $z = R$ la función signo no está bien definida, así que evitaremos ese punto. Resulta entonces

$$\bar{E}(z\hat{z}) = \bar{E}_e(z\hat{z})+\bar{E}_c(z\hat{z}) = \begin{cases}\dfrac{k}{z^2}\left[Q_e+Q_c\left(\dfrac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}+1\right)\right]\hat{z} & \text{si } R<z\\ k\left[Q_e\dfrac{z}{R^3}+\dfrac{Q_c}{z^2}\left(\dfrac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}-1\right)\right]\hat{z} & \text{si } -R\le z<R\\ \dfrac{k}{z^2}\left[-Q_e+Q_c\left(\dfrac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}-1\right)\right]\hat{z} & \text{si } z\le -R\end{cases}$$

Para obtener el potencial total, podemos nuevamente usar superposición y escribir $\phi(z\hat{z}) = \phi_e(z\hat{z})+\phi_c(z\hat{z})$. El potencial para la esfera es fácil de obtener, pues conocemos el campo en todo el espacio y podemos integrar $\bar{E}_e(\bar{r}) = -\nabla\phi_e(\bar{r})$. Cómo siempre, esto equivale a resolver

$$E_r\hat{r}+E_\varphi\hat{\varphi}+E_\theta\hat{\theta} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}$$

Dado que $E_\varphi = 0 = E_\theta$, tenemos que ϕ no depende de φ ni θ y basta con resolver

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -E_r \Longrightarrow \phi_e(\bar{r}) = \begin{cases}-kQ_e\dfrac{r^2}{2R^3}+\alpha & \text{si } r\le R\\ \dfrac{kQ_e}{r}+\beta & \text{si } r\ge R\end{cases}$$

donde integramos en cada región. Finalmente, obtenemos α,β imponiendo continuidad en $r = R$ y pidiendo que $\phi(r\to\infty) = 0$. La última condición impone $\beta = 0$ y con la primera podemos despejar α

$$\phi(R^-) = \phi(R^+) \Longrightarrow -\frac{kQ_e}{2R}+\alpha = \frac{kQ_e}{R} \Longrightarrow \alpha = \frac{3kQ_e}{2R}$$

por lo que finalmente el potencial resulta

$$\phi_e(\bar{r}) = \begin{cases}\dfrac{kQ_e}{2R^3}\left[3R^2-r^2\right] & \text{si } r\le R\\ \dfrac{kQ_e}{r} & \text{si } r\ge R\end{cases}$$

Evaluando nuevamente sobre el eje $\bar{r} = z\hat{z}$, tenemos

$$\phi_e(z\hat{z}) = \begin{cases} \dfrac{kQ_e}{2R^3}\left[3R^2 - z^2\right] & \text{si } |z| \leq R \\ \dfrac{kQ_e}{|z|} & \text{si } |z| \geq R \end{cases}$$

Para el casquete, sin embargo, no es trivial resolver $\bar{E}_c(\bar{r}) = -\nabla\phi_c(\bar{r})$ dado que solo conocemos el campo sobre $\bar{r} = z\hat{z}$. En general, esto no es posible, pues no tenemos información sobre la dependencia en las otras dos direcciones y no podemos calcular las derivadas. En este caso particular, es posible hacerlo porque sobre el eje el campo tiene únicamente dirección en $\hat{z}$ y, por lo tanto, la única ecuación a resolver es $E_z = -\partial_z\phi$. La dependencia en z si la conocemos, por lo que esta ecuación es resoluble. Sin embargo, inspeccionando el campo, nos damos cuenta que deberiamos calcular la primitiva de $\text{sg}(R-z)/z^2$, lo cual no resulta nada trivial. Les propongo entonces calcularlo por integración directa, dado que ya tenemos todos los ingredientes listos de nuestro cómputo de $\bar{E}_c$

$$\phi_c(z\hat{z}) = k\int \frac{\sigma(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}dS' = k\sigma R^2 \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta'}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta'}}d\varphi' d\theta'$$

la primer integral en φ' arroja simplemente un 2π multiplicando y la integral en θ' es análoga a la que tenemos de ayuda, con $a = z^2 + R^2$ y $b = -2zR$, por lo que tenemos

$$\phi_c(z\hat{z}) = k2\pi\sigma R^2 \frac{-2}{-2zR}\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta'}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{kQ_c}{zR}\left[\sqrt{z^2+R^2} - \sqrt{z^2+R^2-2zR}\right] = \frac{kQ_c}{zR}\left[\sqrt{z^2+R^2} - |z-R|\right]$$

donde hicimos manipulaciones idénticas a las del campo eléctrico. El potencial es llamativamente sencillo y es posible calcular su derivada, por lo que podriamos verificar que obtenemos $\bar{E}_c$. También pudimos haber hecho esto para obtener directamente $\bar{E}_c$ y ahorrarnos la integral múltiple, en este caso puntual donde sabemos que el campo es estrictamente en $\hat{z}$. El resultado final es entonces

$$\phi(z\hat{z}) = \phi_e(z\hat{z}) + \phi_c(z\hat{z}) = \begin{cases} \dfrac{kQ_e}{|z|} + \dfrac{kQ_c}{zR}\left[\sqrt{z^2+R^2} - (z-R)\right] & \text{si } R < z \\ \dfrac{kQ_e}{2R^3}\left[3R^2 - z^2\right] + \dfrac{kQ_c}{zR}\left[\sqrt{z^2+R^2} + (z-R)\right] & \text{si } -R \leq z < R \\ \dfrac{kQ_e}{|z|} + \dfrac{kQ_c}{zR}\left[\sqrt{z^2+R^2} + (z-R)\right] & \text{si } z \leq -R \end{cases}$$

1.2. Inciso b

Calcular directamente la fuerza del casquete sobre la esfera no es posible, pues nos exige integrar $\bar{E}_c$ sobre toda la esfera y nosotros solo lo conocemos sobre el eje. El campo de la esfera, sin embargo, lo conocemos en todo el espacio, por lo que calcular la fuerza que la esfera le hace al casquete es posible e, incluso, sencillo. Usando la parametrización previa para el casquete, tenemos

$$\bar{F}_{e\to c} = \int_{S_c} \bar{E}_e(\bar{r}')\sigma dS'$$

En particular, dado que S_c está definida a radio constante, el campo eléctrico sobre ella tiene módulo (¡y solo módulo!) constante. Podemos escribir

$$\bar{F}_{e\to c} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} E_e(R)\hat{r}\sigma R^2 \sin\theta' d\varphi' d\theta' = R^2\sigma E_e(R)\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left[(\cos\varphi'\hat{x} + \sin\varphi'\hat{y})\sin\theta' + \cos\theta'\hat{z}\right]\sin\theta' d\varphi' d\theta'$$

Dado que el campo eléctrico de la esfera es continuo, da igual en que región lo evaluemos y tenemos simplemente $E_e(R) = kQ_e/R^2$. Aunque resulte tentador simplificar este R^2 con el que ya aparece en la expresión, nos resistimos para aprovechar la aparición de $Q_c = 2\pi R^2\sigma$. La integral en φ' anula ambas componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$, al ser sinusoidales, y arroja un 2π multiplicando en la componente $\hat{z}$. La integral en θ' es algo más delicada

$$\bar{F}_{e\to c} = 2\pi R^2\sigma\frac{kQ_e}{R^2}\hat{z}\int_0^{\pi/2}\cos\theta'\sin\theta' d\theta' = \frac{kQ_cQ_e}{R^2}\hat{z}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin(2\theta')d\theta' = \frac{1}{2}\frac{kQ_cQ_e}{R^2}\hat{z}\left[-\frac{1}{2}\cos(2\theta')\right]\Bigg|_0^{\pi/2}$$

donde usamos la clásica propiedad $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ derivada de la fórmula para $\sin(\alpha+\beta)$. Evaluando los límites hace que el corchete reduzca a 1 y obtenemos finalmente

$$\bar{F}_{e\to c} = \frac{1}{2}\frac{kQ_cQ_e}{R^2}\hat{z}$$

que resulta la mitad de la fuerza que una carga Q_e en el origen le haría a una carga Q_c ubicada en $R\hat{z}$. Si ambas tienen el mismo signo, la fuerza es repulsiva (la fuerza resulta en $\hat{z}$ positivo). Para obtener la fuerza que el casquete ejerce sobre la esfera, usamos acción y reacción y tenemos

$$\bar{F}_{c\to e} = -\bar{F}_{e\to c} = -\frac{1}{2}\frac{kQ_cQ_e}{R^2}\hat{z}$$

1.3. Inciso c

Para calcular el momento monopolar, debemos simplemente calcular la carga de ambas distribuciones, con las que ya estuvimos trabajando. Recalculemoslas para ver bien de donde surgieron. Para el casquete, usamos la parámetrización habitual

$$Q_c = \int \sigma dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sigma R^2 \sin\theta d\varphi d\theta = 2\pi\sigma R^2 \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 2\pi\sigma R^2 \left[-\cos\theta\right]\Big|_0^{\pi/2} = 2\pi\sigma R^2$$

Para la esfera, integramos sobre la esfera de forma análoga, pero con un r variable entre 0 y R y θ moviendose por todo su rango $[0,\pi]$ (esfera maciza).

$$Q_e = \int \rho dV = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \rho\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$

Luego, el momento monopolar es

$$Q = Q_e + Q_c = 2\pi R^2\left[\frac{2R\rho}{3} + \sigma\right]$$

que, adelantandonos un poco, podemos ver rápidamente se anula si $\sigma = -2R\rho/3$.

Pasamos ahora al momento dipolar, empezando nuevamente por el casquete

$$\bar{p}_c = \int \sigma \bar{r} dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sigma R\left[(\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y})\sin\theta + \cos\theta\hat{z}\right]R^2 \sin\theta d\varphi d\theta$$

Cómo ya estamos acostumbrados (¡en este ejercicio!), la integral en φ anula las componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ y multiplica por 2 la componente $\hat{z}$. Luego nos queda la integral de $\cos\theta\sin\theta$, que ya resolvimos previamente

$$\bar{p}_c = 2\pi R^3\sigma\hat{z}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{R}{2}Q_c\hat{z}$$

que equivale al momento dipolar una carga Q_c en $\hat{z}R/2$ y resulta reminiscente al caso de la fuerza. Lo deja a uno contemplativo.

Para la esfera, las cuentas son similares, en especial si dejamos la integral en r para el final; parametrizamos $\bar{r}$ igual que para el casquete, pero ahora su módulo r es variable.

$$\begin{aligned}
\bar{p}_e = \int \rho\bar{r} dV &= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho r\left[(\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y})\sin\theta + \cos\theta\hat{z}\right] r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr \\
&= \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \left[(\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y})\sin\theta + \cos\theta\hat{z}\right]\sin\theta d\varphi d\theta \\
&= 2\pi\rho\hat{z}\int_0^R r^3 dr\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{2\pi R^4\rho}{4}\hat{z}[-\cos(2\theta)]\Big|_0^\pi = \frac{R^4\rho}{4}\hat{z}[-\cos(2\pi)+\cos(0)] = 0
\end{aligned}$$

La esfera, por lo tanto, no tiene momento dipolar y el momento dipolar total es

$$\bar{p} = \bar{p}_c = \frac{R}{2}Q_c\hat{z}$$

que solo puede anularse en el caso $Q_c = 0$, osea $\sigma = 0$, cuando no hay casquete. Por lo tanto, anular ambos momentos exige $\rho = 0 = \sigma$, ¡lo cual implica que no tendríamos sistema! Concluimos entonces que no es posible anular ambos simultáneamente sin trivializar el problema.

1.4. Inciso d

Para $\sigma = -\rho 2R/3$ ($Q_c = -Q_e$), tenemos momento monopolar nulo $Q = 0$ y un momento dipolar

$$\bar{p} = -\frac{R}{2} Q_e \hat{z} = -\frac{2\pi}{3} \rho R^4 \hat{z}$$

El potencial lejos de la configuación es entonces

$$\phi_d(\bar{r}) = k \frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{|\bar{r}|^3} = -\frac{2\pi k}{3} \rho R^4 \frac{\hat{z} \cdot \bar{r}}{|\bar{r}|^3}$$

Dado que la simetría natural del problema es cilíndrica (rotación alrededor del eje $\hat{z}$), usamos coordenadas cilíndricas $\bar{r} = r_c \hat{r}_c + z\hat{z}$ donde $r_c = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\hat{r}_c = \cos\varphi \hat{x} + \sin\varphi \hat{y}$. El módulo es simplemente $|\bar{r}| = \sqrt{r_c^2 + z^2}$ y en el producto interno solo sobrevive la componente z

$$\phi_d(\bar{r}) = -\frac{2\pi k}{3} \rho R^4 \frac{z}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}}$$

Obtenemos el campo eléctrico tomando gradiente $\nabla\phi$, que vemos efectivamente no depende de φ

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\nabla\phi(\bar{r}) = -\frac{\partial\phi}{\partial r_c} \hat{r}_c - \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{z} = -\frac{2\pi k}{3} \rho R^4 \left[\frac{3 r_c z}{(r_c^2 + z^2)^{5/2}} \hat{r}_c + \left(\frac{3z^2}{(r_c^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}} \right) \hat{z} \right]$$

Dado que tenemos el campo de un dipolo que apunta en $-\hat{z}$, las líneas de campo serán dipolares pero circulando en sentido opuesto; salen de abajo y entran por arriba, cómo en la Figura 2.

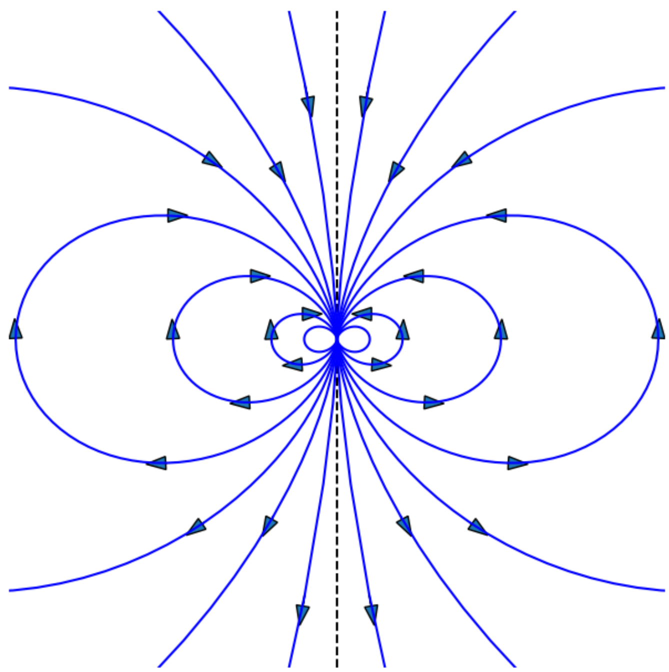

Figura 2: Líneas de campo para un dipolo apuntando en $-\hat{z}$