

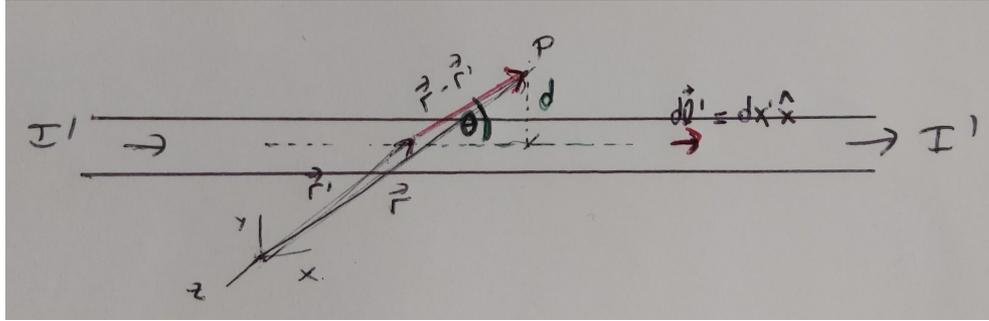
Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 15

Campo magnético por integración directa

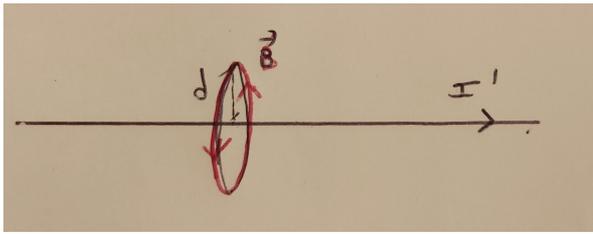
Supongamos un cable infinito con corriente I' . Calculemos el campo magnético en un punto genérico P a distancia d del cable.



$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{C'} \kappa I' d\vec{l}' \times \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = \kappa I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl' |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'| \sin \theta}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} \hat{\mathbf{z}} = \kappa I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl' d}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} \hat{\mathbf{z}} = \kappa I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{(d^2 + l'^2)^{3/2}} dl' \hat{\mathbf{z}}$$

$$\xi = l'/d \quad , \quad d\xi = dl'/d \quad \vec{\mathbf{B}} = \frac{\kappa I'}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{2\kappa I'}{d} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I'}{d} \hat{\mathbf{z}}$$

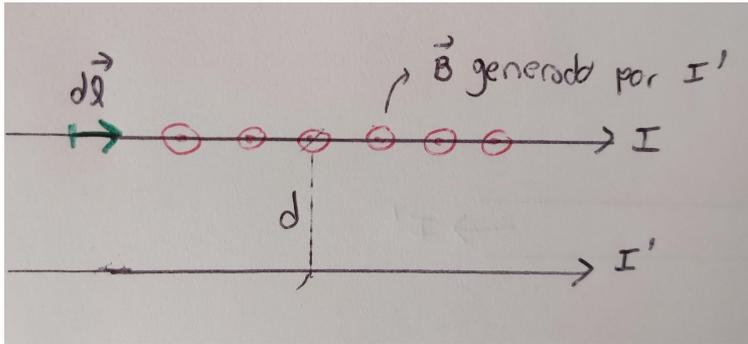
Por simetría vale lo mismo en cualquier punto P a lo largo del eje del cable y también alrededor del cable si estoy a la misma distancia $d \rightarrow$ queda un campo axial alrededor del cable



$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I'}{d} \hat{\phi}$$

Notar que el campo decrece con la distancia al cable como $1/d$

Supongamos tenemos dos cables paralelos, con corrientes I, I'



La fuerza que ejerce el campo de I' sobre el cable con I será

$$\vec{\mathbf{F}} = \int_c I \, d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}} = - \int_c I \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I'}{d} dl \hat{\mathbf{y}} = - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I I'}{d} L \hat{\mathbf{y}}$$

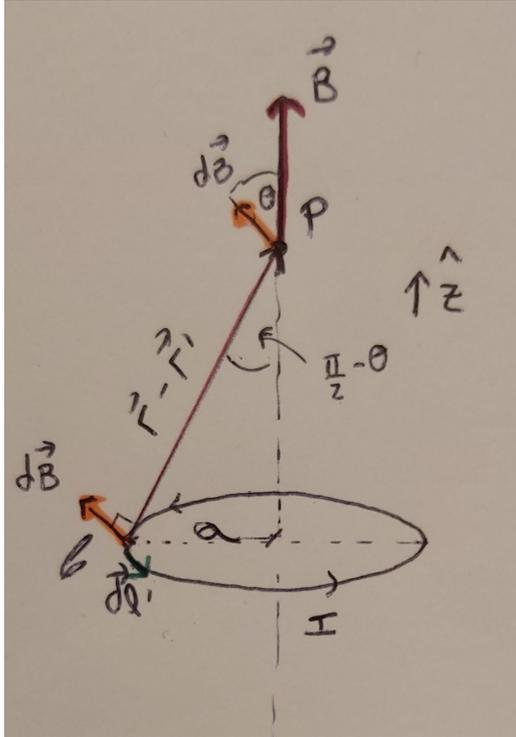
La fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{\vec{\mathbf{F}}}{L} = - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I I'}{d} \hat{\mathbf{y}}$$

Esto nos da una fuerza atractiva para corrientes de igual signo y repulsiva para corr. de signo opuesto

Espira: conductor delgado cerrado por el que circula una corriente estacionaria I .

Vamos a calcular el campo magnético de una espira circular, en el eje de la espira.



$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_C \kappa I \vec{\mathbf{dl}}' \times \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = \kappa I \hat{\mathbf{z}} \int_C \frac{dl' \cos \theta}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^2} = \kappa I \hat{\mathbf{z}} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi$$

aquí usamos que las componentes perpendiculares al eje z se compensan y además que:

$$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^2 = a^2 + z^2 \quad , \quad dl' = a d\varphi \quad , \quad \cos \theta = \frac{a}{(a^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{eje} = \frac{2\pi \kappa I a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \quad \vec{\mathbf{B}}_{eje}(z=0) = \vec{\mathbf{B}}_{max} = \frac{2\pi \kappa I}{a} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{eje}(z \gg a) = \frac{2\pi \kappa I a^2}{|z|^3} \hat{\mathbf{z}} = \frac{2 \kappa I S}{|z|^3} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{con } S = \pi a^2$$

Si definimos la superficie (de la espira) orientada $\vec{S} = \pi a^2 \hat{z}$ y llamamos

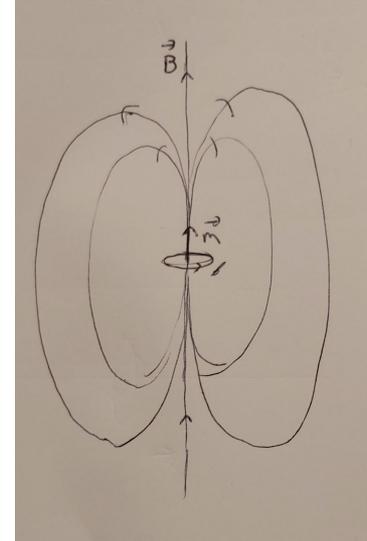
$\vec{m} = I \vec{S}$ al momento magnético de la espira,

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{eje}}(z \gg a) = \frac{2 \kappa \vec{m}}{|z|^3}$$

que es similar al campo de un dipolo eléctrico

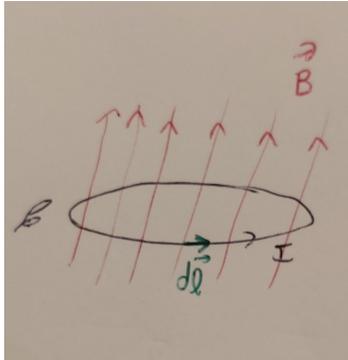
$$\vec{E}_{\text{eje}}(z) = \frac{2 k \vec{p}}{|z|^3}$$

si identificamos $k \rightarrow \kappa$, $\vec{p} \rightarrow \vec{m}$



Idem al campo magnético terrestre o el de un imán

Fuerza y torque sobre una espira (en campo magnético uniforme o espira pequeña)



$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B} = I \left[\oint_C d\vec{l} \right] \times \vec{B} = 0 \text{ ya que } \oint_C d\vec{l} = 0$$

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) = I [d\vec{l} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{l})]$$

$$\vec{\tau} = \oint_C \vec{r} \times d\vec{F} = I \oint_C [d\vec{l} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{l})]$$

$$\oint_C d\vec{l} (\vec{r} \cdot \vec{B}) = \int_{S(C)} d\vec{S} \times \vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{B}) = \int_{S(C)} d\vec{S} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = I \int_{S(C)} d\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

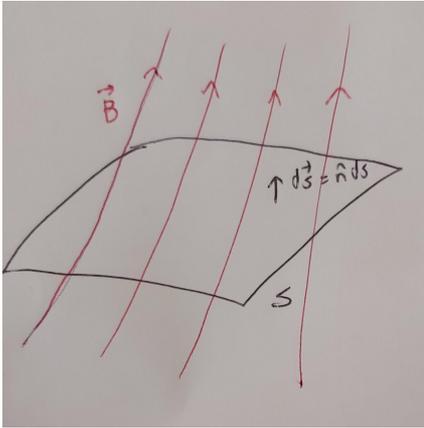
$$\oint_C \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{l}) = \vec{B} \oint_C \vec{r} \cdot d\vec{l} = \vec{B} \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \text{ ya que } \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$$

$$\vec{m} = I \int_{S(C)} d\vec{S}$$

$S(C)$ es una superficie apoyada en C

El momento magnético de la espira

Propiedades del campo magnético



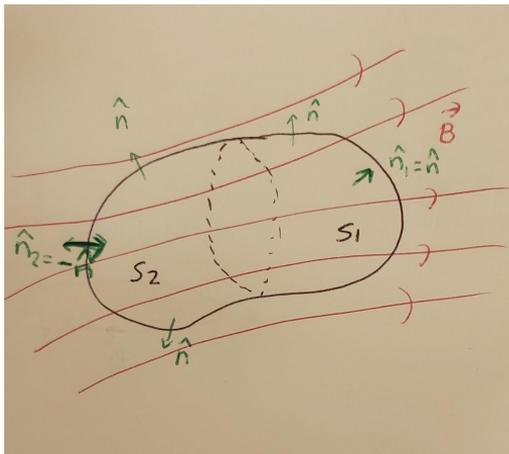
Definimos el **flujo magnético** a través de una superficie S

$$\Phi_B = \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}}$$

Propiedad (experimental): si la superficie S es cerrada, entonces el flujo es SIEMPRE cero

$$\Phi_B = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{dS}} = 0$$

El equivalente de la Ley de Gauss para el campo magnético nos dice entonces que la “carga magnética encerrada (por S)” es siempre cero, o sea, NO HAY CARGAS MAGNETICAS AISLADAS → experimental

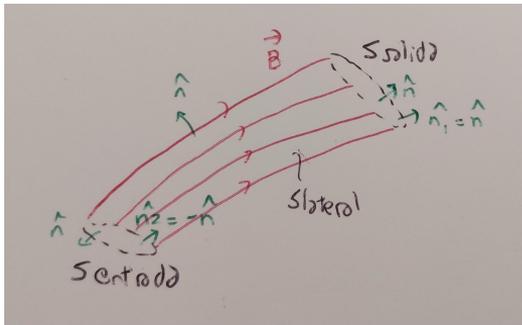


Si a una superficie cerrada S la dividimos en dos partes entonces podemos decir:

$$0 = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \hat{n} dS + \int_{S_2} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \hat{n}_1 dS - \int_{S_2} \vec{B} \cdot \hat{n}_2 dS = \Phi_{saliente} - \Phi_{entrante}$$

$$\Rightarrow \Phi_{saliente} = \Phi_{entrante}$$

y se conserva el flujo magnético.



Dado un conjunto de líneas magnéticas podemos construir un **tubo de flujo** que conserva el flujo (saliente = entrante)

$$0 = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{sal}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS + \int_{S_{entr}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS + \int_{S_{lat}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_{sal}} \vec{B} \cdot \hat{n}_1 dS - \int_{S_{entr}} \vec{B} \cdot \hat{n}_2 dS = \Phi_{sal} - \Phi_{entr}$$

Por el teorema de la divergencia resulta:

$$0 = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_{\mathcal{V}(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} d\mathcal{V} \quad , \forall \mathcal{V}(S) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0}$$

esto nos dice también que las líneas del campo magnético no salen ni confluyen a ningún punto (como sí ocurre con las líneas de campo eléctrico que salen o confluyen a las cargas, según su signo)

→ las líneas de campo magnético siempre son cerradas (o siguen indefinidamente).

Propiedad matemática: si un campo tiene divergencia cero entonces se puede obtener como el rotor de otro campo → es el caso del campo magnético:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$\vec{\mathbf{A}}$ se llama **potencial vector** y está definido a menos de un gradiente ya que si

$$\vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}' = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \quad (\text{se llama } \textit{libertad de gauge})$$

Para el caso magnetostático podemos obtener (por Biot-Savart) el potencial vector, que para una corriente estacionaria en un cable (espira) es:

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \oint_C \frac{\kappa I' d\vec{\mathbf{l}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$$

ya que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = \oint_C \kappa I' \vec{\nabla} \times \left[\frac{d\vec{\mathbf{l}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right] = \oint_C \kappa I' \left[\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) \right] \times d\vec{\mathbf{l}}' = \oint_C \kappa I' d\vec{\mathbf{l}}' \times \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}})$$

y con esto queda demostrado (para este caso) que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$

Si las corrientes están distribuidas en volumen, entonces vale:

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_V \frac{\kappa \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}') dV'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \quad \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = \int_V \kappa \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}') dV' \times \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3}$$