# Física 3: Electricidad y Magnetismo

Pablo Dmitruk

Clase 17

# Campo magnético de una espira pequeña o muy lejos de la espira

Lo hacemos con el potencial vector $$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\kappa\, I'\, \vec{\mathbf{dl}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$$

para $r \gg r'$ $$|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'}|^{-1} \approx r^{-1}\left(1 + \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}'}}{r^2}\right)$$

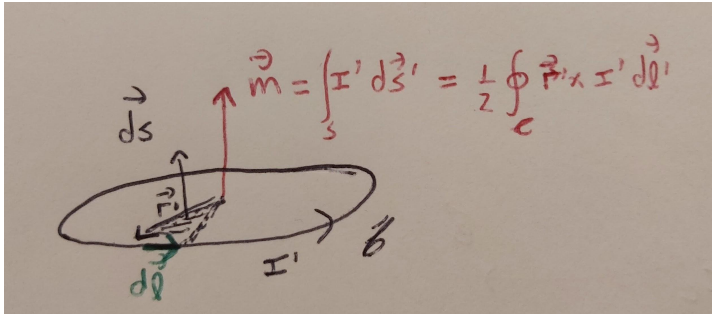
$$\Rightarrow \vec{\mathbf{A}} \approx \kappa I' \left[\frac{1}{r} \oint_C \vec{\mathbf{dl}}' + \frac{1}{r^3} \oint_C \vec{\mathbf{dl}}' (\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}')\right]$$

$\oint_C \vec{\mathbf{dl}}' = 0$ → No hay término monopolar en el desarrollo → no hay monopolos magnéticos

$$\oint_C \vec{\mathbf{dl}}' (\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}') = \int_{S(C)} \vec{\mathbf{dS}}' \times \vec{\nabla}' (\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}') = \int_{S(C)} \vec{\mathbf{dS}}' \times \vec{\mathbf{r}}$$

En donde empleamos una generalización del teo. de Stokes

$$\Rightarrow \quad \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\kappa I'}{r^3} \int_{S(C)} \vec{\mathbf{dS}}' \times \vec{\mathbf{r}} = \kappa \frac{\vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^3} \quad \text{con} \quad \vec{\mathbf{m}} = \int_{S(C)} I' \, \vec{\mathbf{dS}}' = \frac{1}{2} \oint_C \vec{\mathbf{r}}' \times I' \vec{\mathbf{dl}}'$$




el momento dipolar magnético de la espira

en volumen sería $\vec{\mathbf{m}} = \frac{1}{2} \int \vec{\mathbf{r}}' \times \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}') \, d\mathcal{V}'$

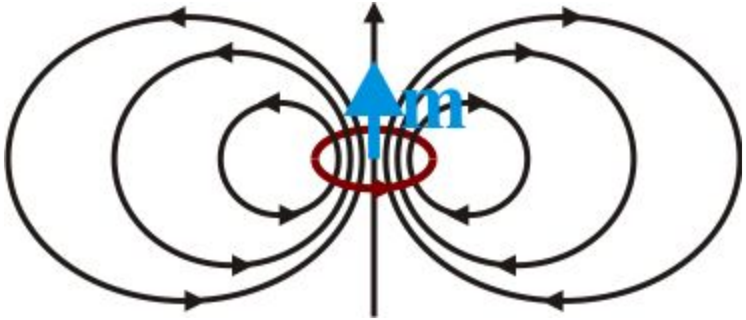
Para obtener el campo magnético nos falta tomar el rotor,

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = \kappa \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^3} \right) = \kappa \left[ \vec{\mathbf{m}} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} \right) - (\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} \right]$$

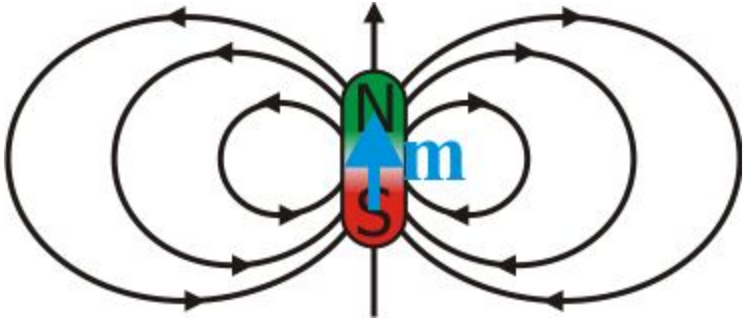
$$(\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} = \frac{\vec{\mathbf{m}}}{r^3} - \frac{3(\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{r}})}{r^5} \vec{\mathbf{r}} \quad y \quad \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\mathbf{B}} = \frac{\kappa}{r^3} \left[ \frac{3(\vec{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{r}})}{r^2} \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{m}} \right]$$

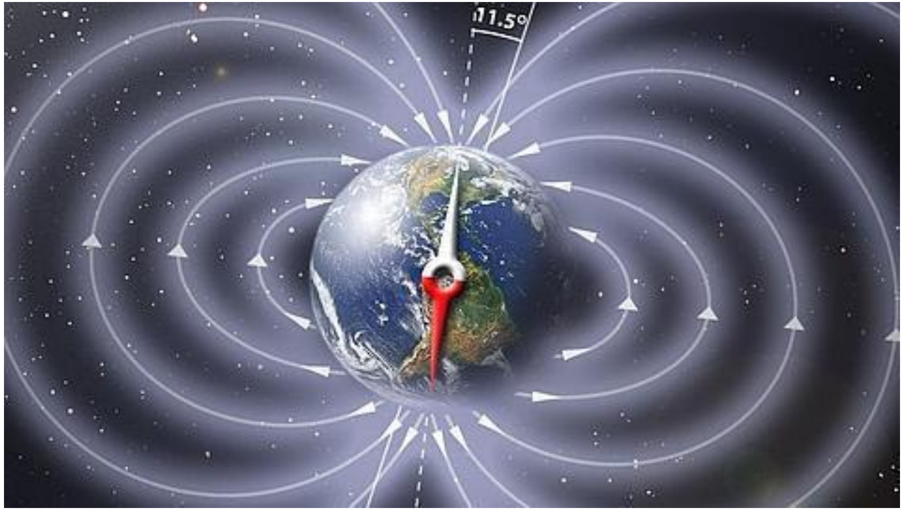
Es idéntico al campo eléctrico de un dipolo, si hacemos $\vec{\mathbf{m}} \to \vec{\mathbf{p}} \;,\; \kappa \to k$




campo magnético de un dipolo magnético $\vec{\mathbf{m}}$

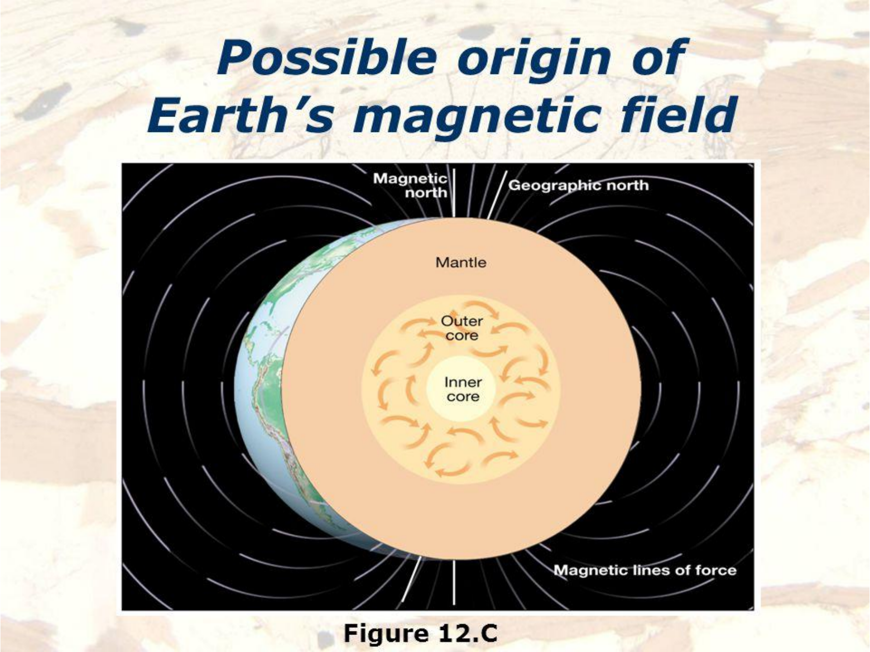


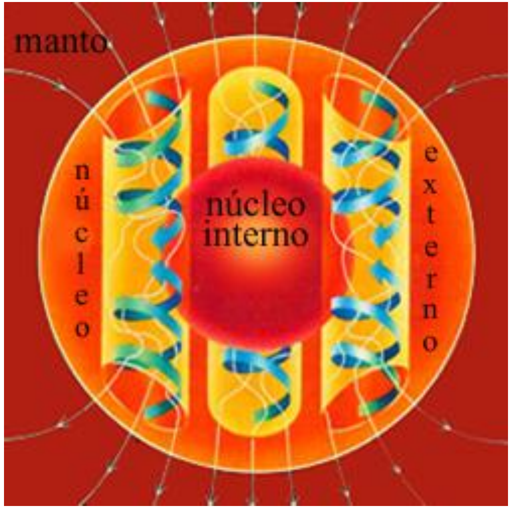

campo magnético de un imán

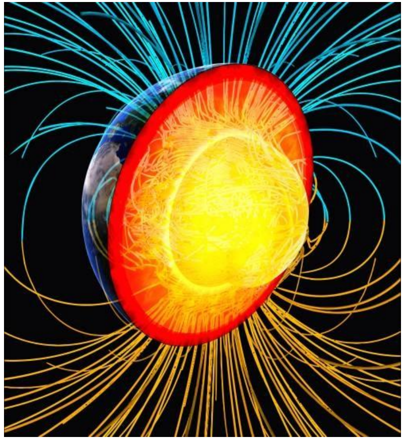


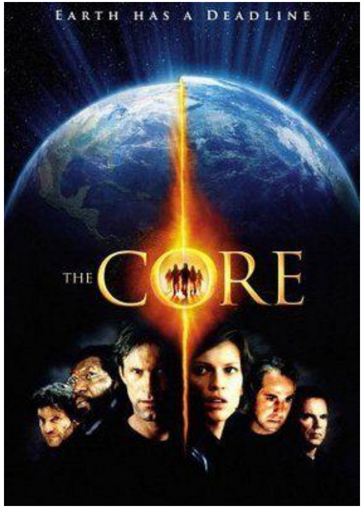

campo magnético terrestre !

Cuál es el origen del campo magnético terrestre ?



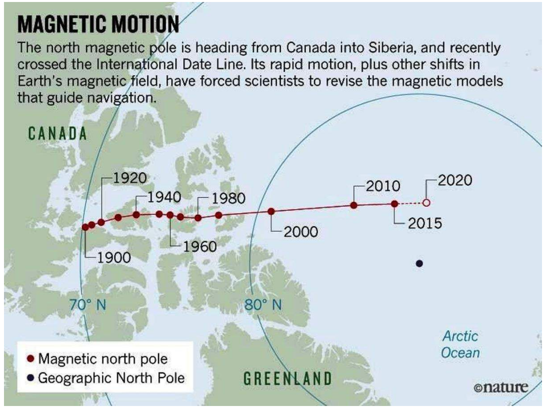





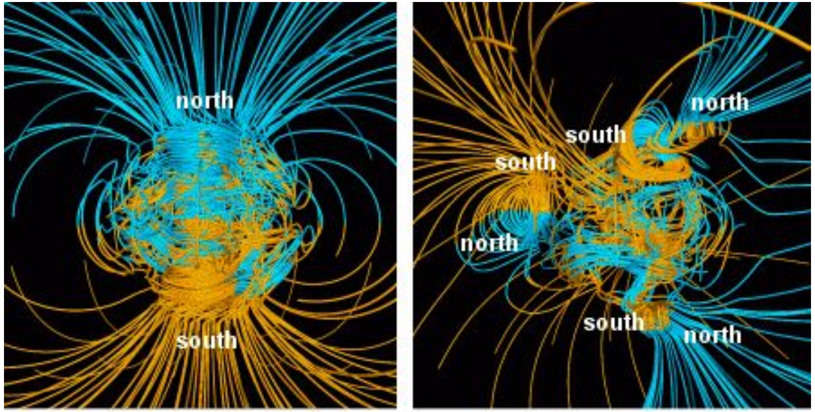

magnetofluido → metal líquido en movimiento, con cargas libres
→ ecuaciones magnetohidrodinámicas → dínamo

El campo magnético terrestre es dinámico y va cambiando en el tiempo.

Los polos magnéticos de hecho se están moviendo.



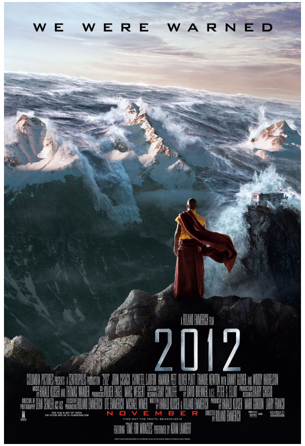

y en escalas de tiempo grandes pueden ocurrir reversiones de la polaridad magnética




between reversals　　during a reversal

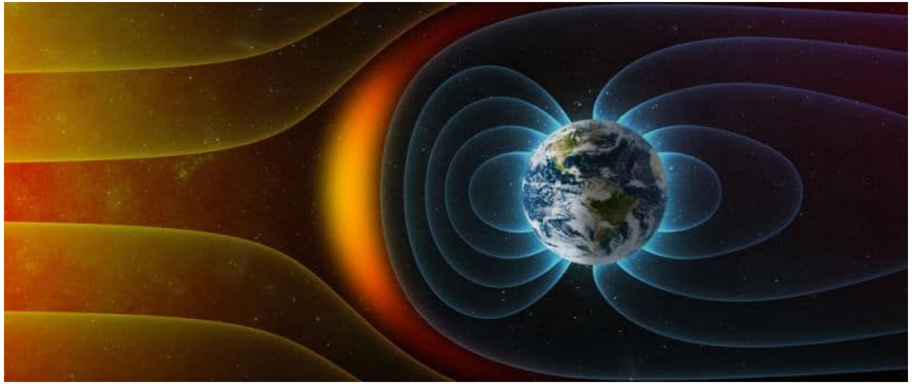
Simulación numérica de una reversión magnética terrestre.

y una película...

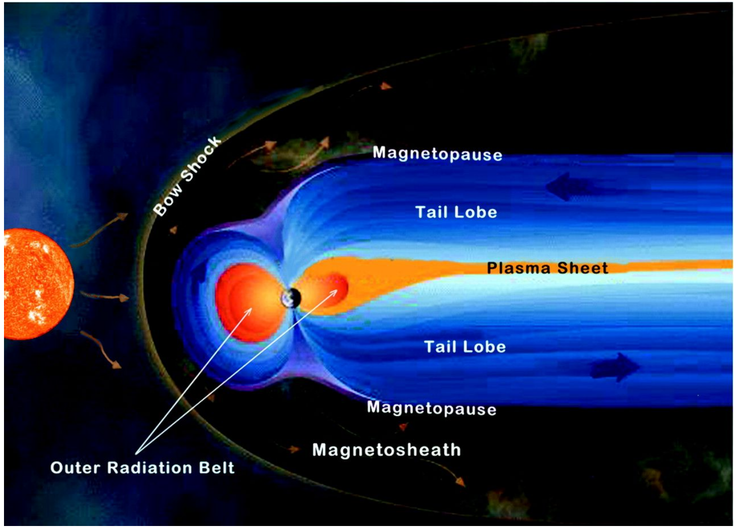



Un video un poco más sensacionalista….

El campo magnético terrestre además se ve fuertemente influenciado por el Sol y el *viento solar*.



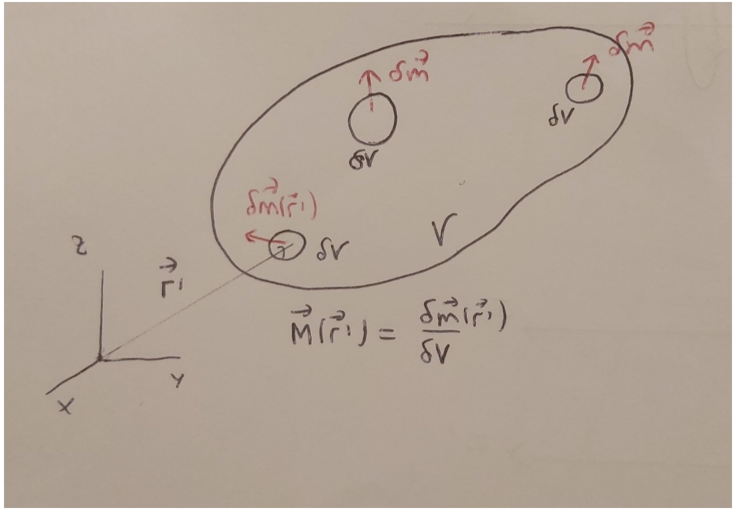
magnetósfera terrestre




magnetósfera: simulaciones

# Campo magnético en medios materiales

Suponemos que a un volumen de material, lo dividimos en pequeños volúmenes $\delta\mathcal{V}$, y en cada uno de ellos hay un momento magnético dipolar $\delta\overrightarrow{\mathbf{m}}$ $\rightarrow$ el origen de este momento magnético lo podemos atribuir a los momentos magnéticos en los átomos producto del movimiento de los electrones que actúan como pequeñas espiras con corriente




Definimos la magnetización como el momento magnético por unidad de volumen:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}') = \frac{\delta\overrightarrow{\mathbf{m}}}{\delta\mathcal{V}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}')$$

Vimos que el potencial vector asociado a un momento magnético $\vec{\mathbf{m}}$ es $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa \frac{\vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^3}$

y si el dipolo magnético está ubicado en una posición $\vec{\mathbf{r}}'$ entonces $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa \frac{\vec{\mathbf{m}} \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3}$

Si aplicamos esto a un volumen material, $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa \int_{\mathcal{V}} \frac{\overrightarrow{\delta \mathbf{m}} \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = \kappa \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} d\mathcal{V}'$

Usamos $\frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right)$ y la identidad $\vec{\nabla} \times (f\, \vec{\mathbf{M}}) = f\, \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{M}} - \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\nabla} f$

$$\frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} = \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) = \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} - \vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right)$$

$$f = \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \kappa \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} d\mathcal{V}' - \int_{\mathcal{V}} \kappa \vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} \right) d\mathcal{V}'$$

La segunda integral la convertimos a integral de superficie,

$$-\int_{\mathcal{V}} \kappa \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\right) d\mathcal{V}' = -\oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \kappa\, \vec{\mathbf{dS}}' \times \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} = \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \kappa \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times \vec{\mathbf{dS}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} = \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \kappa \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times \hat{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, dS'$$

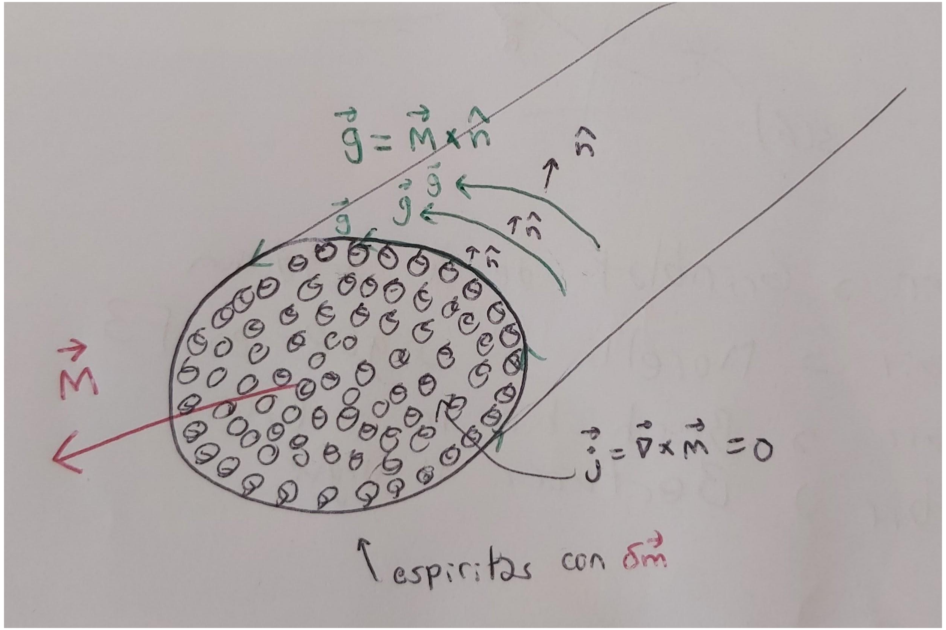
$$\Rightarrow \quad \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \kappa \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, d\mathcal{V}' + \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \kappa \frac{\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times \hat{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, dS'$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{V}} \kappa \frac{\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, d\mathcal{V}' + \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} \kappa \frac{\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, dS'$$

con $\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}') = \vec{\nabla}' \times \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')$ la densidad de corriente de magnetización (en volumen)

y $\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}}') = \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') \times \hat{\mathbf{n}}$ la densidad de corriente de magnetización (en superficie)

# Interpretación de las corrientes de magnetización




Un cilindro con magnetización **M** uniforme en la dirección de su eje tiene una corriente de magnetización **g** en su cara lateral en la dirección azimutal, que podemos interpretar como la superposición de las corrientes de muchas espiritas con momento magnético en la dirección del eje del cilindro.

Supongamos ahora tenemos corrientes “libres” y corrientes “de magnetización”

$$\overrightarrow{\mathbf{j}} = \overrightarrow{\mathbf{j}}_L + \overrightarrow{\mathbf{j}}_M$$

Usamos Ampere,

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\mathbf{j}} = \mu_0 \left( \overrightarrow{\mathbf{j}}_L + \overrightarrow{\mathbf{j}}_M \right)$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \frac{\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \overrightarrow{\mathbf{j}}_M = \overrightarrow{\mathbf{j}}_L \qquad\qquad \overrightarrow{\mathbf{j}}_M = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{M}}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \left( \frac{\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \overrightarrow{\mathbf{M}} \right) = \overrightarrow{\mathbf{j}}_L$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathbf{H}} = \overrightarrow{\mathbf{j}}_L \quad \text{con} \quad \overrightarrow{\mathbf{H}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \overrightarrow{\mathbf{M}}$$

un campo vectorial auxiliar que se conoce como “intensidad” o “excitación magnética”

La ecuación $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_L \quad \rightarrow \quad \oint_C \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{dl}} = I_L$

expresa la ley de Ampere en medios materiales y nos indica que las fuentes del campo H son las corrientes libres.

Medios ferromagnéticos o imanes: son materiales con magnetización $\vec{\mathbf{M}}$ permanente, que generalmente nos dan como dato → obtenemos el campo magnético a través del cálculo de las corrientes de magnetización.